

الباب الرابع عشر
تطبيقات إحصاء بوز-أينشتاين

Applications of Bose-Einstein Statistics

الصفحة	العنوان	الفصل
252	إشعاع الجسم الأسود	I
260	تكثيف بوز-أينشتاين	II
265	خواص غاز البوزون المثالي	III
265	i حساب الطاقة الداخلية	
266	ii حساب الحرارة النوعية	
267	iii حساب الإنتروبي	
267	iv حساب دالة هلمهولتز	
267	v حساب الضغط	
268	الهيليوم السائل	IV
272	درجة الحرارة السالبة	V
276	معاملات أينشتاين وتضخيم الضوء	VI
282	تمارين عامة	

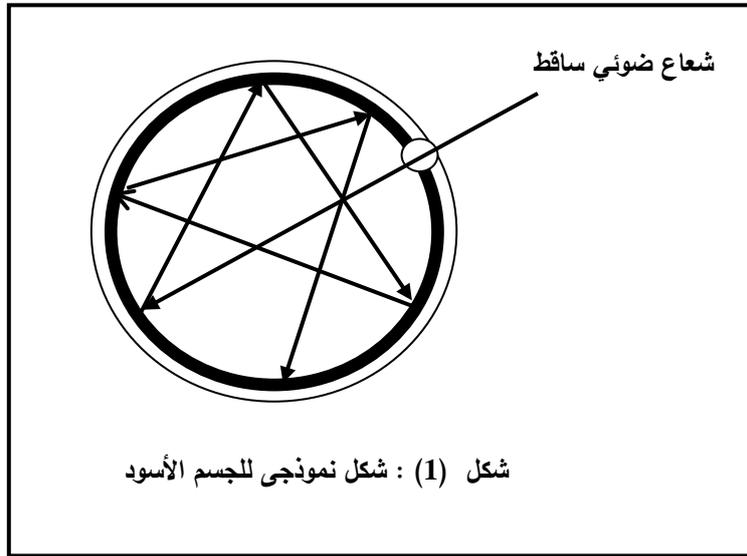
الباب الرابع عشر

تطبيقات إحصاء بوز-أينشتين

Applications of Bose-Einstein Statistics

في هذا الباب سوف نستعرض بعض تطبيقات إحصاء بوز-أينشتين المهمة. سنبدأ أولاً بإشعاع الجسم الأسود وصفاته. بالفصل الثاني سنلقي نظرة عامة على أهم وأحدث التطبيقات ألا وهي تكثف بوز-أينشتين. وسوف نستعرض خواص غاز بوز-أينشتين المثالي بالفصل الثالث.

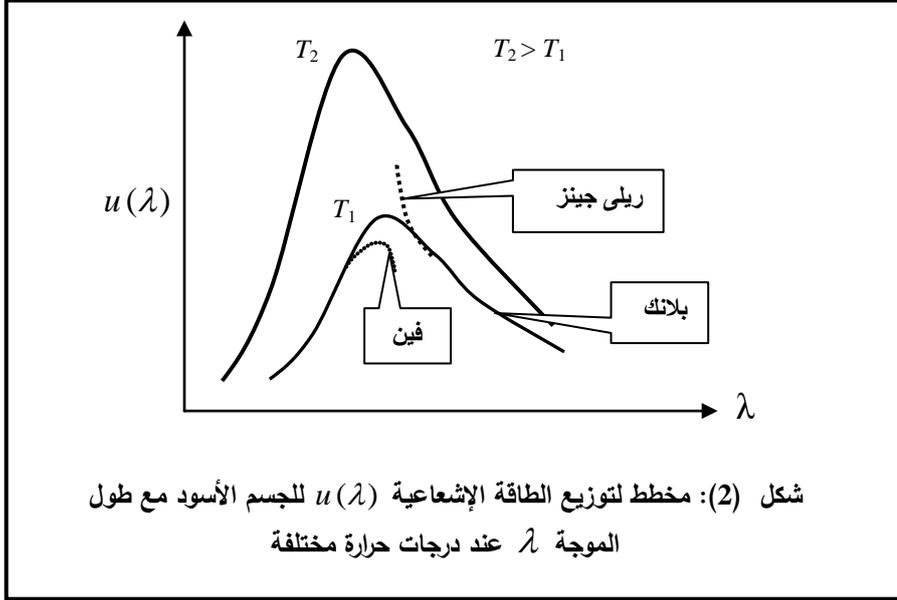
I – إشعاع الجسم الأسود (Black body radiation)



نعلم أن الحرارة الإشعاعية المنبعثة من جسم ما تعتمد على مساحته ونوعية مادته وأيضاً درجة حرارته. ويعرف الجسم الأسود (وهو جسم نظري) بأنه الجسم الذي له أعلى قدرة امتصاصية للأشعة الكهرومغناطيسية الساقطة عليه، ومن ثمّ فلن يكون هناك ضوء ينعكس منه، ولذلك لا نستطيع تحديد لونه. وحيث إن قدرته عالية للامتصاص فإن قدرته عالية أيضاً على الإشعاع. ونستطيع تمثيل الجسم الأسود بجسم مغلق، أجوف، ذي سطح داخلي مطلي باللون الأسود وبه ثقب صغير كما بالشكل (1). ولهذا فإن الجسم الأسود يمتص كل الضوء الساقط عليه من خلال الثقب، حيث إن الأشعة النافذة خلال الثقب لن يسمح لها بالخروج مرةً أخرى، وذلك نتيجة للانعكاسات المتتالية. وعند تسخين الجسم الأسود لدرجة الحرارة المطلقة (T)، فإنه يشع ضوءاً يحتوي على جميع الأطوال الموجية الممكنة اعتماداً على درجة حرارته.

وتبعاً للوصف السابق والدراسات المعملية المكثفة، انظر شكل (2)، فإن الجسم الأسود تظهر له بعض المعالم الاستقرائية المهمة وهي:

- 1 - يمتص كل الأشعة الساقطة (ولا يعكسها) بغض النظر عن الطول الموجي أو الاتجاه.
- 2 - له قدرة عالية على الإشعاع (في جميع الاتجاهات) بالمقارنة بالأجسام الأخرى.



- 3 - منحني الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود لا يعتمد على طبيعة مادته، ولكن يعتمد على درجة حرارته (T).
- 4 - المنحنيات عند درجة الحرارة المنخفضة تقع تماماً بداخل المنحنيات ذات درجات الحرارة المرتفعة.
- 5 - عند درجة حرارة ثابتة (T) تزداد الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود كلما ازداد طول الموجة، ثم تصل إلى القيمة العظمى (λ_{\max}) تبدأ بعدها الطاقة في الانخفاض بزيادة الطول الموجي.
- 6 - قانون فين للإزاحة: وينص على أن: "العلاقة بين القيمة العظمى للطول الموجي (λ_{\max}) ودرجة الحرارة المطلقة (T) للجسم هي علاقة عكسية" بمعنى أن:

$$\lambda_{\max} T = \text{ثابت}$$

وهي علاقة تعبر عددياً عن الحقيقة التجريبية التالية: أنه مع ارتفاع درجة الحرارة للجسم الأسود فإن القيمة العظمى في طيفه تُزاح باتجاه تناقص الطول الموجي (ازدياد التردد). وهذا يتفق مع الحقيقة أنه إذا ارتفعت درجة حرارة جسم متوهج يُصبح أكثر لمعاناً وأكثر بياضاً.

- 7 - قانون ستيفان للمساحة: ينص على أن: "الطاقة الإشعاعية الكلية لوحدة المساحات عند درجة حرارة ثابتة (T) تُعرف بالمساحة المحصورة بين

المنحنى المحدد بقيمة (T) ومحور الطول الموجي وتعطى بالعلاقة:

$$u = bT^4$$

حيث b ثابت وقيمته هي $7.55 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$

8 - قانون ريلي-جينز (Rayleigh-Jeans law) وينص على أنه:
" عند الترددات المنخفضة (الأطوال الموجية الطويلة) تُعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4}$$

ومن معرفتنا بمبادئ الفيزياء التقليدية نتوقع أن الجسم الساخن يشع باستمرار كل حرارته على هيئة موجات كهرومغناطيسية. ولكن من قانون ريلي-جينز نجد أن معدل الإشعاع يصل إلى ما لا نهاية عندما يؤول الطول الموجي الكهرومغناطيسي إلى الصفر. وسميت هذه المعضلة غير المنطقية حين ذاك بلغز "الكارثة الفوق بنفسجية Ultra-violet catastrophe". وأصبح السؤال: ما السبب في هذا اللغز نظرياً؟ وكيف السبيل إلى حله؟

9 - قانون فين (Wien's law) وينص على أنه: " عند الترددات المرتفعة (الأطوال الموجية القصيرة) تعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \lambda^{-5} e^{-d/\lambda T}$$

حيث d ثابت .

وقد نجح بلانك (عام 1901 م) في حل مسألة الجسم الأسود ومنها تم حل المعضلة "الكارثة الفوق بنفسجية" وذلك بفرض أن: "طاقة الجسم الإشعاعية، المتصلة أو المنبعثة، لا تمثل فيضا من القيم المتصلة ولكن تتكون من وحدات طاقة لا تتجزأ وسميت طاقة كم "Quanta" ومقدار الطاقة " E " التي يحملها كل طاقة كم تتناسب مع تردد الإشعاع " ν "، بمعنى أن:

$$E = h \nu = h \frac{c}{\lambda}$$

حيث h هو ثابت بلانك و c هي سرعة الضوء في الفراغ.

ومن فرضيته غير المألوفة، في ذلك الوقت، اشتق بلانك علاقته المشهورة للطاقة الإشعاعية في الصورة:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{(e^{hc/\lambda k_B T} - 1)} \quad (1)$$

حيث k_B هو ثابت بولتزمان. وقد وجد أن هذا القانون أعطى تفسيراً كاملاً للنتائج العملية للإشعاع الحراري من الأجسام الصلبة بالرغم من غرابة الفرضية المقترحة في ذلك الوقت.

مثال: أثبت قانون فين للإزاحة.

الحل: لإثبات قانون فين للإزاحة، فإننا نبحث عن الطول الموجي الذي تكون فيه كثافة الطاقة المعطاة بالمعادلة (1) في قيمتها العظمى وذلك باستخدام الشرط:

$$\left. \frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0$$

وهذا الشرط يعطينا المعادلة:

$$x = 5(1 - e^{-x})$$

حيث $x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}}$. بالإمكان حل المعادلة الأخيرة عددياً أو بالرسم البياني وحلها هو:

$$x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}} = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} = 4.965$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.965 k_B} = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

وهو المطلوب.

مثال: باستخدام قانون الإزاحة لفين احسب درجة حرارة سطح القمر إذا علم أن الطيف يصل ذروته عند الموجة $\lambda_{\max} = 14 \times 10^{-6} \text{ m}$. اعتبر أن القمر جسم أسود.

الحل: باستخدام قانون الإزاحة لفين $\lambda_{\max} T = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$ نجد أن درجة حرارة سطح القمر هي:

$$T = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{\lambda_{\max}} = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{14 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 207 \text{ K}$$

والآن قبل أن نطبق إحصاء بوز-أينشتين على الإشعاع للجسم الأسود الكهرومغناطيسي (وباستخدام لغة ميكانيكا الكم، هو تجمع من الفوتونات) دعونا نسأل ما هي خواص الفوتونات؟

والإجابة هي أن خواص الفوتونات هي:

1 - الحركة المغزلية للفوتونات لها القيمة \hbar . ولذلك يطبق عليها إحصاء بوز-أينشتين.

- 2 - لا تؤثر الفوتونات المثالية في بعضها البعض.
- 3 - كتلة الفوتون الساكنة منعدمة (zero rest mass)، لذلك فهو يتحرك بسرعة الضوء.
- 4 - الفوتون يحقق علاقة التشتت (Dispersion relation)، $\omega = ck$ ، ومن ثمَّ فإن

$$E = \hbar\omega = \hbar ck$$
- 5 - للفوتونات نجد أن كمية الحركة الخطية تعرف بدلالة الطول الموجي λ ، أو التردد ν ، كالتالي:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{c} \nu,$$

$$dp = \frac{h}{c} d\nu$$

حيث c هو سرعة الضوء في الفراغ. وباعتبار أن الفوتونات محتواة داخل جسم مغلق أجوف ذي حجم ثابت V ومتزن حرارياً عند درجة حرارة T مع الوسط المحيط به، فإن عدد الأنماط (مستويات الفوتونات) الموجودة بين القيمتين p و $p + dp$ تعطي من العلاقة (انظر الباب السادس الفصل الثالث):

$$g(p)dp = 2 \times 4\pi \frac{p^2}{h^3 V} dp, \quad (2)$$

وعدد الأنماط الموجودة بين قيمتي التردد ν و $\nu + d\nu$ تعطي بالعلاقة:

$$g(\nu)d\nu = 2 \times 4\pi V \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (3)$$

حيث استخدمنا العدد " 2 " في المعادلتين (2 و 3) للدلالة على الاتجاهين المستقلين لاستقطاب الإشعاع الكهرومغناطيسي.

بالتالي فإن توزيع إحصاء بوز-أينشتين للفوتونات يعطي:

$$dn(\nu) = n(\nu)d\nu = \frac{g(\nu)d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1}$$

$$= 8\pi V \frac{\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \quad (4)$$

حيث $\varepsilon = h\nu$. وكثافة الطاقة $\varepsilon \frac{dn}{V} = u d\nu$ في المدى المحدد هي:

$$\begin{aligned}
 u(\nu)d\nu &= g(\nu) \frac{h\nu d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \\
 &= 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \quad (5)
 \end{aligned}$$

والمعادلة (5) تؤول إلى علاقة بلانك المشهورة للإشعاع (1) هذا إذا استخدمنا القيم التالية للفوتونات:

$$\alpha = 0, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

وهذا يعني ببساطة أننا أهملنا الشرط $\delta N = \sum \delta n = 0$ الذي يدل على أن العدد الكلي للفوتونات يظل ثابتاً. بالطبع فإن الفوتونات تختلف عن جسيمات البوزونات، في أن عدد الفوتونات الكلية لا تكون ثابتة، وذلك ناتج عن ظاهرة الخلق Creation والإفناء Annihilation. بأسلوب آخر: نتيجة لطبيعة الجسم الأسود المثالي فإنه لا يوجد قيود على عدد الفوتونات المنبعثة منه. لذلك، فإنه لكي يكون $\alpha \delta N = 0$ مع الشرط أن $\delta N \neq 0$ فإن α يجب أن تساوي الصفر.

واجب منزلي: باستخدام التعويضات التالية:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2},$$

و

$$u(\lambda) = -u(\nu) \frac{d\nu}{d\lambda} = u(\nu) \frac{c}{\lambda^2}$$

أثبت أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون بلانك (انظر المعادلة 1).

تعليقات:

1 - عند الترددات المنخفضة ($h\nu \ll k_B T \Rightarrow \beta h\nu \ll 1$) نستخدم التقريب:

$$(e^{\beta h\nu} - 1) \approx \beta h\nu - 1 \approx \beta h\nu$$

فنجد أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون ريلي-جينز:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu, \quad (6)$$

2 - عند الترددات المرتفعة ($h\nu \gg k_B T \Rightarrow \beta h\nu \gg 1$) نستخدم التقريب:

$$(e^{\beta h\nu} - 1) \approx e^{\beta h\nu}$$

فنجد أن المعادلة (5) تؤول إلى قانون فين:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\beta h\nu} d\nu, \quad (7)$$

3 - لإيجاد كثافة الطاقة الكلية نكامل المعادلة (5) لجميع أنماط التذبذب الممكنة، وتأخذ القيم من صفر إلى ما لا نهاية بالنسبة للأشعة الكهرومغناطيسية، كالاتي:

$$u = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1} d\nu, \quad (8)$$

وباستخدام التعويض $x = \beta h\nu$ ، نجد:

$$u = \frac{h}{\pi^2 c^3} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\frac{\pi^4}{15}} = bT^4, \quad (9)$$

وهو قانون ستيفان- بولتزمان، حيث:

$$b = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 h^3} = 7.55 \times 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$$

وقد تم التحقق من هذه العلاقة عملياً. بالطبع، فإن معظم الأجسام المشعة، مثل الشمس والغازات الساخنة لا تُعدُّ أجساماً سوداء مثالية ولهذا فإنها لا تحقق العلاقات السابقة بدقة.

وبأسلوب حسابي آخر، لن نتعرض له هنا، يمكن استنتاج أن الكثافة الإشعاعية الكلية مرتبطة بالانبعاث الإشعاعي (الانبعاثية \mathcal{R}) (Radiation emittance) (وهي كمية الطاقة الإشعاعية المنبعثة من وحدة السطوح لجسم تام السواد في الثانية الواحدة) بالعلاقة التالية:

$$\mathcal{R} = \frac{c}{4} u = \sigma T^4, \quad (10)$$

حيث $\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ هو ثابت ستيفان- بولتزمان. وهذه النتيجة أيضاً تتفق مع الحسابات العملية.

4 - الحرارة النوعية للجسم التام السواد تأتي بالتالي عن طريق تفاضل المعادلة (9) لنحصل على:

$$c_v = 4bT^3, \quad (11)$$

وهي تؤول للصفر عندما تصل درجة حرارة الجسم للصفر المطلق. والمعادلة (11) تشبه معادلة ديبياي للأجسام الصلبة.

II – تكثيف بوز – أينشتين Bose-Einstein Condensation

نظام يتكون من عدد N من جسيمات البوزون المستقلة والمحدد بوعاء ذي حجم V ودرجة حرارته المطلقة هي T ، نجد أن التوزيع الأكثر احتمالاً هو:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{N_i^*}{g_i} = \frac{1}{e^{-\beta\mu + \beta\varepsilon_i} - 1} \quad (1)$$

حيث الرمز N_i^* يمثل عدد جسيمات البوزون التي لها الطاقة ε_i . g_i هي درجة الانتماء وتعبر عن المستويات التي لها نفس الطاقة ε_i .

ومن شرط ثبوت العدد الكلي للجسيمات داخل النظام المغلق نجد أن:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{i=0}^{\infty} N_i^* = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \\ &= \frac{g_0}{e^{\beta(\varepsilon_0 - \mu)} - 1} + \frac{g_1}{e^{\beta(\varepsilon_1 - \mu)} - 1} + \dots \\ &= N_0 + N_1 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

حيث التجميع يتم بالمعادلة (2) على جميع مناسيب الطاقة. ولكي نحفظ لكل منسوب بعدد موجب للجسيمات N_i ، فيجب أن يتحقق الشرط $e^{-\beta\mu} \geq 1$ أو $\mu \leq 0$ لجميع الطاقات ε_i .

دعونا نركز الآن على عدد الجسيمات بالمستوى الأرضي باعتبارها N_0 ، حيث طاقة المستوى $\varepsilon_0 = 0$ ، فنجد أن:

$$N_0 = f(\varepsilon_0 = 0) = \frac{1}{e^{\alpha} - 1}$$

حيث $\alpha = -\mu\beta$. بالتأكيد يجب أن تكون القيمة $\alpha > 0$ لنحصل على عدد موجب ومحدود من الجسيمات. ولنعين علاقة e^{α} مع درجات الحرارة المطلقة، سوف نفترض أنه باقتراب درجة حرارة الغاز من الصفر المطلق فإن $N_0 = N$. لذلك نجد أن:

$$N = \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \approx \frac{1}{N}$$

وحيث إن N هو عدد فلكي، فإننا نستطيع، وبدون أخطاء حسابية، أن نضع $\alpha = 0$ أو $e^{\alpha} = 1$ بالمعادلة (1) عند درجات الحرارة المنخفضة. لهذا نجد أن المستوى الأرضي يمكن أن يملأ بعدد كبير جداً من الجسيمات الكلية.

والآن لكي نحسب العدد الكلي لجسيمات البوزون بالمستويات المثارة، الذي يتساوى مع العدد الكلي للجسيمات عند درجات الحرارة المرتفعة، دعونا نحسبه كلاسيكياً باستخدام المعادلة:

$$N_e = N = \sum_{i=0}^{\infty} N_i^* = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \quad (2a).$$

وباستخدام كثافة الحالات بالصورة $g(\varepsilon) = 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$ نجد أن عدد الجسيمات الكلية هي:

$$\begin{aligned} N_e &= 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \\ &= \frac{V}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{\xi^{-1} e^x - 1} \end{aligned} \quad (3)$$

حيث استخدمنا $x = \beta\varepsilon$ والبارامترات التالية:

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi mk_B T}} \quad \text{الطول الموجي لدى- برولى}$$

الفعالية المطلقة (Absolute activity) للغاز أو $\xi = e^{-\alpha} = e^{\mu\beta} \leq 1$ (Fugacity)

لنا هنا تعليق مهم على المعادلة (3) وهو أن المعامل $\sqrt{\varepsilon}$ الموجود بكثافة المستويات يضمن لنا عدم إسهام جسيمات المستوى الأرضي ($\varepsilon = 0$) بالحسابات، ولذلك نستطيع وضع $\xi = 1$ حيث إننا أهملنا المستوى الأرضي.

والآن باستخدام التكامل القياسي:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{e^x - 1} = 1.306\sqrt{\pi}$$

فإن المعادلة (3) تؤول إلى:

$$N_e = 2.612V \times \left(\frac{2\pi mk_B T}{h^2}\right)^{3/2} \quad (4)$$

وكما نعرف، فإن جسيمات البوزون تفضل التجمع في المستوى نفسه، وهذا عكس جسيمات الفيرميون. من هنا نجد أنه عندما تصل درجة حرارة الغاز T إلى درجة الحرارة الحرجة T_B فإن جسيمات البوزون تبدأ في التجمع في المستوى الأرضي، ولكن تظل كثافة جسيمات البوزون بالمستويات المثارة مرتفعة جداً، بمعنى أن $N_e \approx N$. وبخفض درجات الحرارة عن T_B نجد أن الجسيمات تزداد كثافتها

بالمستوى الأرضي، حيث إن $\alpha \propto N^{-1}$. وعندما نصل إلى درجة الصفر المطلق نجد أن جميع جسيمات البوزون تملأ المستوى الأرضي فقط. لذلك عند $T = 0$ نجد أن $N_o = N$. ولحساب درجة الحرارة الحرجة، T_B ، نضع T_B بدلاً من T و N بدلاً من N_e بالمعادلة (4) لنحصل على:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} \quad (5)$$

مثال: لمول واحد من غاز ^4He تحت ضغط جوي 1، احسب T_B .

الحل: لمول واحد من الغاز، نعلم أن $N = N_A = 6.02 \times 10^{23}$ molecules/mol، وحجم الغاز تحت ضغط جوي 1 هو $V = 22.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ وكتلة الغاز هي $m = 4 \times 1.66 \times 10^{-27} = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$. وباستخدام المعادلة (5) نجد:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N}{2.612V} \right)^{2/3} \\ = \frac{(6.63 \times 10^{-34})^2}{2\pi (6.65 \times 10^{-27}) \times 1.38 \times 10^{-23}} \left(\frac{6.02 \times 10^{23}}{2.612 \times 22.4 \times 10^{-3}} \right)^{2/3} = 0.036 \text{ K.}$$

وهي قيمة صغيرة جداً مقارنةً بالقيمة العملية وهي 4.21 K. وملاحظة عامة، فإن جميع الغازات المثالية تتحول إلى الحالة السائلة قبل أن تصل إلى درجة الحرارة الحرجة " T_B ".

واجب منزلي: لمول واحد من غاز H_2 تحت ضغط جوي 1، احسب T_B . قارن النتيجة مع القيمة العملية 14 K.

بقسمة المعادلتين (4) و(5) نحصل على عدد الجسيمات بالمستويات المثارة كدالة في درجة الحرارة بالمعادلة:

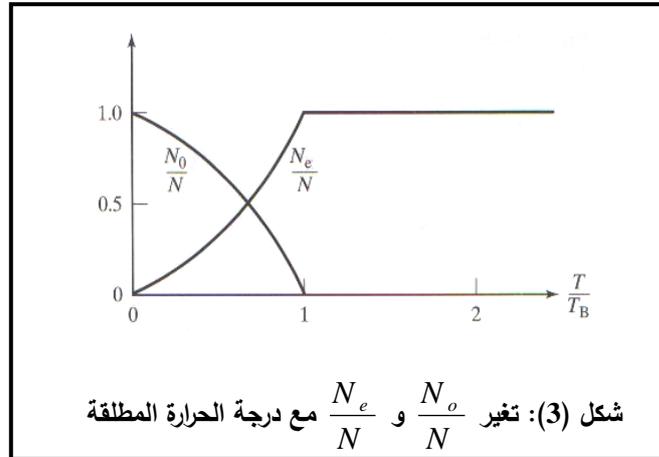
$$N_e = N \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (6)$$

وباقى الجسيمات التي تتجمع بالمستوى الأرضي تصبح:

$$N_o = N - N_e = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \right] \quad (7)$$

ولنا هنا ملاحظة وهي أن عملية التغيير من التجميع إلى التكامل بالمعادلة (2a) عند درجات الحرارة المنخفضة، $T < T_B$ ، قد أحدثت خطأً جسيماً وذلك نتيجة إهمالنا للحد $g(\varepsilon=0) = 0$ بكثافة المستويات. وبإهمال هذا الحد فقد تم إهمال الإسهام الكبير الناتج من المستوى الأرضي. ولقيم صغيرة من z (أو قيم كبيرة من $e^{-\mu\beta}$) فإن إسهام المستويات الأولية يكون منعدماً، بالتالي فعملية التغيير من تجميع إلى تكامل لا ينشأ عنه أي خطأ جوهري أو محسوس. بينما، عندما تقترب z من الواحد الصحيح (أو تكون $e^{-\mu\beta}$ صغيرة)، فإن المستوى الأرضي يصبح مهماً وإسهامه يجعل تجاهله خطأً جسيماً. ولهذا لا نستطيع تغيير التجميع إلى تكامل عندما تقترب من الصفر المطلق. وهذا التكتيف السريع للجسيمات يحدث عندما تقل درجة حرارة النظام عن T_B . وتسمى هذه الظاهرة تكتيف بوز - أينشتاين. وشكل (3) يوضح مدى تغير $\frac{N_e}{N}$ و $\frac{N_o}{N}$ مع درجة الحرارة المطلقة للغاز.

ولسنوات عديدة اعتقد الفيزيائيون أن تكتيف بوز - أينشتاين ضرب من الخيال ولا يمكن التأكد منه عملياً. ولكن في عام 1995 أنتج الباحثون تكتيفاً بواسطة تبريد بخار من ذرات الروبيديوم لدرجة حرارة 1.3×10^{-7} K. وقد عرف هذا الإنجاز بأنه أهم إنجاز في الفيزياء الذرية خلال القرن الماضي. وقد فُتِحَ هذا الإنجاز الباب على مصراعيه للبحث في مجال جديد.



ملاحظات:

- 1 - تجميع (تكتيف) جسيمات البوزون يحدث فقط في حال الجسيمات التي تحتفظ بعدد ثابت. هذا الشرط يجعل جسيمات الفوتون لا تتكاثر حيث إن لها صفة التخليق والفناء.
- 2 - عند الشرط $T < T_B$ نستطيع أن ننظر إلى النظام على أنه مزيج من حالتين (طورين) ألا وهما:
أ - حالة غازية تتكون من N_e من الجسيمات التي تتوزع على المستويات المثارة، حيث $\varepsilon \neq 0$.

ب- حالة تكثيف تتكون من N_o من الجسيمات التي تتجمع في المستوى الأرضي، حيث $\varepsilon = 0$

3 - نجد أن الطول الموجي عندما $T < T_B$ يعرف من المعادلة

$$N = \frac{V}{\lambda_B^3} \times 2.612$$

$$\Rightarrow \lambda_B^3 = \frac{2.612}{\rho}, \quad \rho = \frac{N}{V} \quad (7)$$

ولهذا فإن الطول الموجي مرتبط بمتوسط المسافة بين الجسيمات. ولذلك يظهر التداخل بين الدوال الموجية، ولذا تتضح أهمية التأثير الكمي.

4 - بالطبع فإن جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي لا تساهم بالطاقة الداخلية أو الحرارة النوعية للنظام. وذلك لأنه عندما تكون $T < T_B$ فإن عدد جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي يصبح كبيراً جداً، ولكن طاقة المستوى $\varepsilon = 0$. أما في الحالة $T > T_B$ فإن $N_o = 0$ في أي حال.

III- خواص غاز البوزون المثالي عند درجات الحرارة المختلفة

The Properties of Ideal Bose-Einstein Gas

من توزيع بوز-أينشتين الأكثر احتمالاً:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{-\beta\mu + \beta\varepsilon_i} - 1} \quad (1)$$

نستطيع حساب خواص غاز البوزون المثالي التالية:

1- حساب الطاقة الداخلية

عند درجات الحرارة المرتفعة $T > T_B$ ، نجد أن قانون ديولنج-بيتي يعطي:

$$U_+ \rightarrow \frac{3}{2} N k_B T \quad (2)$$

وعند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$ ، نجد أن:

$$U_- = N \varepsilon = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) \varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1}$$

$$= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (3)$$

وبالقرب من المستوى الأرضي نضع $\mu = 0$ ، واستخدام التعويض $x = \varepsilon / k_B T$ نحصل على:

$$U_- = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1} \quad (4)$$

1.78

ومن المعادلة (II.5) نجد أن:

$$V = \frac{1}{2.612} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T_B} \right)^{3/2}$$

وبالتعويض منها بالمعادلة (4) نحصل على:

$$U_- = 0.77 N k_B T \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2}, \quad (5)$$

وهذا يدل على أن الطاقة الداخلية تتغير كما $T^{5/2}$ عند الدرجات المنخفضة.

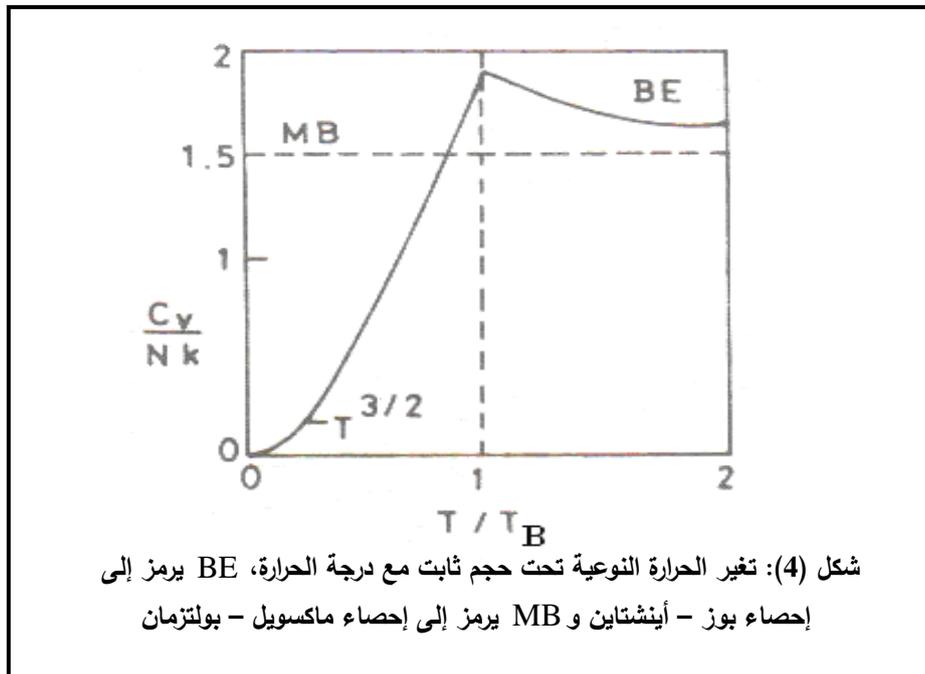
ii- حساب الحرارة النوعية

عند درجات الحرارة المرتفعة الكلاسيكية:
نجد أن الحرارة النوعية تأخذ القيمة

$$C_{V+} = \left(\frac{\partial U_+}{\partial T} \right)_V \approx \frac{3}{2} N k_B \quad (6)$$

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$ ، فنجد:

$$C_{V-} = \left(\frac{\partial U_-}{\partial T} \right)_V \approx 1.92 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (7)$$



ويظهر سلوك الحرارة النوعية مع درجة الحرارة بالشكل (4). فعند درجات الحرارة المنخفضة يبدأ المنحنى في الازدياد من القيمة صفر عند الصفر المطلق حتى يصل إلى قيمة عظمى، وهي $1.92 N k_B$ ، وذلك عندما تتساوى درجة الحرارة مع الدرجة الحرجة T_B ، بمعنى أن $T = T_B$. وبعدها يبدأ ميل المنحنى في التغير مع ارتفاع درجة الحرارة. وعند درجات الحرارة العليا تأخذ الحرارة النوعية القيمة الكلاسيكية وهي $1.5 N k_B$.

iii- حساب الإنتروبي

القيمة المطلقة للإنتروبي عند درجات الحرارة المنخفضة تحسب من قانون الحرارة النوعية كالتالي:

$$S = \int_0^T \frac{C_V}{T'} dT' = 1.28 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \quad (8)$$

ونجد أن الإنتروبي يؤول للصفر عند $T = 0$ ، كما هو معرف بالقانون الثالث للديناميكا الحرارية.

iv- حساب دالة هلمهولتز

تحسب دالة هلمهولتز عند الشرط $(T < T_B)$ كالتالي:

$$\begin{aligned} F = U - TS &= 0.51 N k_B \left(\frac{T}{T_B} \right)^{3/2} \\ &= -1.33 k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} V \end{aligned} \quad (9)$$

v- حساب الضغط

من المعادلة (9) نستطيع أن نحسب الضغط بالعلاقة:

$$\begin{aligned} P &= - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} \\ &= 1.33 k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \end{aligned} \quad (10)$$

ومن المعادلة (10) نجد أن الضغط يتناسب مع $T^{5/2}$ عند درجات الحرارة المنخفضة، ولا يعتمد على الحجم. وعند الصفر المطلق نجد أن جميع جسيمات البوزون تحتل المستوى الأرضي، $\epsilon = 0$ ، ولا يكون لها كمية حركة خطية، ومن ثمَّ ليس لها أي مساهمة في الضغط.

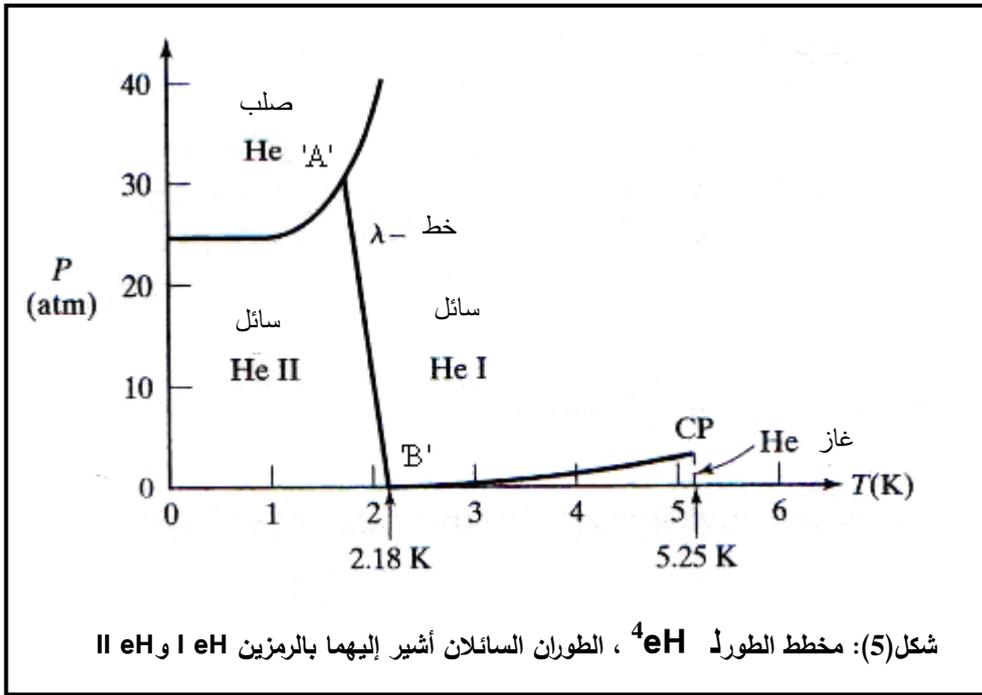
واجب منزلي: أثبت أن الضغط لغاز البوزون يعطى بالعلاقة:

$$P = \frac{2U}{3V} \quad (11)$$

وهي شبيهة بمعادلة الغاز المثالي.

IV- الهيليوم السائل (Liquid Helium)

الرسم الطوري للهيليوم الطبيعي (^4He) موضح بالشكل (5):



من الشكل نجد التالي:

- 1 - يوجد أربع حالات (أطوار) للهيليوم، هي الحالة الغازية والصلبة، وحالتان سائلتان وهما He I و He II .
- 2 - هناك نقطة حرجة "CP \equiv Critical point" عند درجة حرارة 5.25 K، ومعنى النقطة الحرجة أننا لا نستطيع التمييز عندها بين غاز الهيليوم وسائل الهيليوم He I .
- 3 - لا يوجد حالة سائلة للهيليوم عند درجة حرارة أعلى من 5.25 K.
- 4 - عند زيادة الضغط على غاز الهيليوم، عند درجة حرارة ثابتة في المدى $2.18 \text{ K} < T < 5.25 \text{ K}$ ، فإنه يتكثف إلى الحالة السائلة He I .
- 5 - عند درجة حرارة $T < 2.18 \text{ K}$ ، تظهر الحالة السائلة الثانية He II ويسمى سائلاً مفرط السيولة (Superfluid)؛ حيث إن له بعض الصفات المميزة ومنها

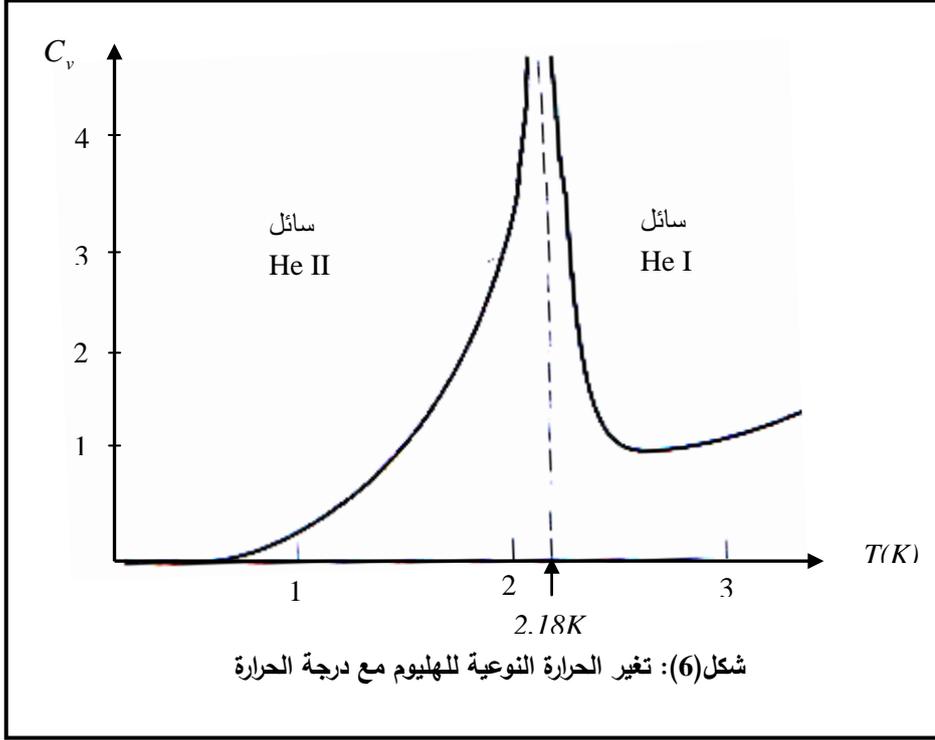
- انعدام اللزوجة. He II (Viscosity). يظل بالحالة السائلة حتى درجة الصفر المطلق.
- 6 - السائلان He I و He II يوجدان في حالة اتزان على مدى واسع من القيم المختلفة للضغط، ودرجة الحرارة تمثل بخط يسمى خط لمدا (Lambda λ - line).
- 7 - الحالة الصلبة للهيليوم لا تتكون عند ضغط أقل من 25 ضغطاً جويًا، ولا توجد في حالة اتزان مع الحالة الغازية في أي درجات حرارة أو أي ضغط، مهما يكن.
- 8 - الهيليوم له نقطتان يقال عنهما النقات الثلاثية، وهما:
 أ - النقطة 'A' ويتكون عندها الحالات الثلاث He I و He II والصلب في حالة اتزان،
 ب - النقطة 'B' ويتكون عندها الحالات الثلاث He I و He II والغاز في حالة اتزان.
- 9 - الانتقال بين الحالتين السائلتين He I و He II يمكن أن يتم على طول خط لمدا (Lambda λ - line). والشكل التالي يوضح تغير الحرارة النوعية للسائلين مع درجة الحرارة، مع ملاحظة أن الشكل يأخذ شكل الحرف λ ، وأن تغير الحرارة النوعية غير مستمر عند درجة الحرارة $T = 2.18 \text{ K}$. وعمامة فإن سلوك الحرارة النوعية مع درجة الحرارة مختلف كثيراً لكلا السائلين.

ومن خلال نظرية السوائل، التي لن نتعرض لها هنا حيث إنها أعلى من مستوى كتابنا هذا، فإن حالة He II السائلة عند درجة حرارة نقاط لمدا تتكون من نوعين من السوائل، سائل عادي He II وسائل مميز He II. السائل المميز يبدأ بنسبة صغيرة عند درجة حرارة نقاط لمدا، وتزداد نسبته مع انخفاض درجة الحرارة حتى يصل إلى 100% عند درجة حرارة الصفر المطلق.

بالدراسة علم أن قوى التفاعل بين الذرات في حالة السائل He II صغيرة، ولذلك نستطيع أن نتعامل مع He II، كتقريب أولي، على أنه غاز بوزون مثالي. بالطبع من الغريب أن نفترض هذا، ولكن الدراسات أثبتت أن He II يتصرف كأنه غاز وليس كسائل. وعند التعرف على درجة حرارة الخط λ ، فإننا نستطيع أن نفترض وجود السائل He II المميز بعدد N_o بالمستوي الأرضي، والسائل He II العادي بعدد N_{ex} بالمستوى المثار الأول. وعندما تبدأ درجة الحرارة في الانخفاض عن درجة حرارة بوز-أينشتاين T_B فإن السائل He II المميز تزداد نسبته بالمستوى الأرضي ويصبح هو المهيمن.

ونسأل، هل تتساوى درجة الحرارة T_B ونقطة λ ؟ دعونا نحسب، وذلك بمعلومية أن $27 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ هو حجم كيلومول من سائل He II. لذلك فإن التركيز هو:

$$\frac{N_o}{V} = \frac{6.02 \times 10^{26}}{27 \times 10^{-3}} = 2.2 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$$



وباستخدام كتلة ذرة الهيليوم بالقيمة $m = 6.65 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ، نجد أن:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B} \left(\frac{N_0}{2.612 V} \right)^{2/3} = 3.1 \text{ K}$$

ودرجة حرارة نقطة λ هي 2.18 K. من ذلك نستطيع أن نستنتج أن صفات السائل المميز He II يمكن أن تشارك، كجزء على الأقل، في تكثيف بوز- أينشتاين عند نقطة λ . نموذج غاز بوزون المثالي ما هو إلا تقريب فقط لسائل He II ، حيث تم إهمال التفاعل الداخلي بين الذرات. الصورة الحقيقية لا نستطيع تناولها هنا حيث إنها معقدة للغاية.

جدول(1): بعض خواص السائل العادي والمفرط السيولة

الخواص	السائل المفرط السيولة	سائل عادي
اللزوجة	0	$0 \neq$
التوصيل الحراري	∞	محدد
الإنتروبي	0	$0 \neq$

المواد فائقة التوصيلية: وجدنا سابقاً أن ظاهرة التكثيف لبوز-أينشتاين، التي يعتمد عليها تفسير خواص المائع مفرط السيولة، تعتمد أساساً على جسيمات البوزون. ومن ثمّ، فإنه لا يوجد ظاهرة مماثلة لتفسير خواص المواد مفرطة التوصيلية، حيث إن التوصيل الكهربائي يعتمد أساساً على إلكترونات التكافؤ وهي جسيمات فيرميون. ولكن

إذا وجدت طريقة ما! بحيث أننا نجحنا في تجميع أزواج مرتبطة من الإلكترونات، مثلاً إلكترون ذو حركة مغزلية لأعلى، والآخر ذو حركة مغزلية لأسفل ليصبح مجموع حركتهم المغزلية صفراً، وتتحرك سوياً، فإن هذه الأزواج تصبح شبيهة بجسيمات البوزون. في الواقع، فإنه عند درجات الحرارة المنخفضة جداً وُجد أن أزواج الإلكترونات المختلفة تتفاعل مع بعضها بعضاً خلال جسيمات تسمى الفونون، وهي جسيمات مرتبطة بتكثيف الموجات الصوتية، بحيث أصبح هناك ارتباط بين هذه الأزواج. وقد عُرف هذا الوصف بأزواج كوبر، إشارة للعالم كوبر الذي اقترح هذا الارتباط. وقد أدى هذا الاقتراح إلى ظهور نظرية تسمى (BSC)، وهذا الاسم اختصار لأسماء العلماء (Bardeen, Cooper, Schrieffer)، التي فسرت لأول مرة ظاهرة المواد الفائقة التوصيلية، والتي اكتشفت في بداية القرن العشرين. ولكن بارتفاع درجات الحرارة فإن الاهتزازات الشبكية (Lattice vibrations) تفقد أزواج الإلكترونات ارتباطاتها. ولذلك لا يوجد تفسير، أو فهم دقيق، لظهور خواص التوصيلية المفرطة لبعض المواد، النقية والمخلطة، عند درجات الحرارة المرتفعة (أعلى من درجة حرارة تسييل النيتروجين). ولكن، بالتأكيد أن هناك علاقة ما بين هذه الظاهرة وإحصاء بوز-أينشتين وأزواج الإلكترونات.

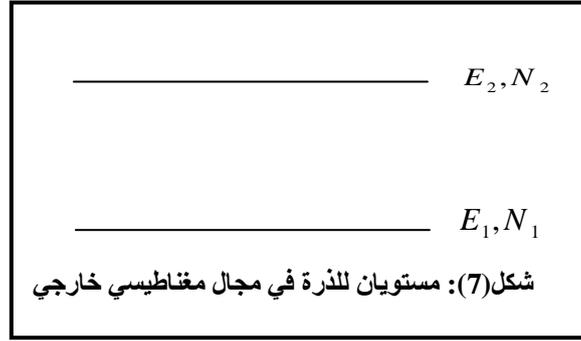
تعليق على تكثيف بوز-أينشتين: بالطبع فإن اختفاء اللزوجة وازدياد التوصيل الحراري ناتج من أن أعداداً مهولة من ذرات الهيليوم قد تكثفت بالمستوى الأرضي، والمعروفة قيمته تماماً. ولذلك إذا اعتبرنا هذه المجموعة المكثفة سوف نجد أن الدقة في حساب كمية الحركة لها تُعدُّ دقيقة جداً. ومن ثمَّ فإنه من نظرية عدم الدقة لهيزنبرج ($\Delta p \Delta r > \hbar$) نجد أن تحديد مكان وجود ذرات الهيليوم بدقة يُعدُّ غير مؤكدة تماماً. ولأننا لا نعلم مكان الذرات المكثفة، فهي تُعدُّ موجودة في كل مكان. وحيث إن التوصيل الحراري يقاس بمدى سرعة انتشار الحرارة من مكان لآخر، وهذا يتطلب جسيمات تتحرك من مكان لآخر، ولكن هذه الجسيمات ليست هنا تارةً وهناك تارةً أخرى بل هي في كل مكان. وهي تكون ما يسمى حالة عملاقة (Giant state). ولهذا فإن الحرارة تنتقل بسرعة الضوء حيث إن الذرات مرتبطة بهذه الحالة العملاقة.

V - درجة الحرارة السالبة

Negative-temperature

للتبسيط، سوف نتعامل هنا مع مستويين للذرة، كما بالشكل (7)، نتيجة لوجودها في مجال مغناطيسي خارجي. المستوى الأول (الأرضي) ذو الطاقة $E_1 = -\varepsilon$ وعدد الإلكترونات N_1 والمستوى الثاني الأعلى ذو الطاقة $E_2 = \varepsilon$ وعدد الإلكترونات N_2 ، بحيث إن

$$N_1 + N_2 = N$$



وباستخدام توزيع بولتزمان الإحصائي بالشكل:

$$N_i = \frac{N}{Z} e^{-\beta E_i}, \quad i = 1, 2$$

نجد أن

$$\frac{N_2}{N_1} = e^{-(E_2 - E_1)/k_B T} = e^{-2\beta\epsilon} = e^{-2\epsilon/k_B T}$$

والطاقة المغناطيسية الكلية للنظام هي:

$$U = N_1 E_1 + N_2 E_2 = (N_2 - N_1)\epsilon$$

ومنها نجد أن:

$$T = \frac{1}{k_B} \left(\frac{2\epsilon}{\ln N_1 - \ln N_2} \right)$$

وفي حالة الاتزان، فإن العدد N_1 للمستوى الأدنى يكون أكبر من العدد N_2 للمستوى الأعلى، ولذلك نجد أن درجة الحرارة المطلقة تصبح موجبة.

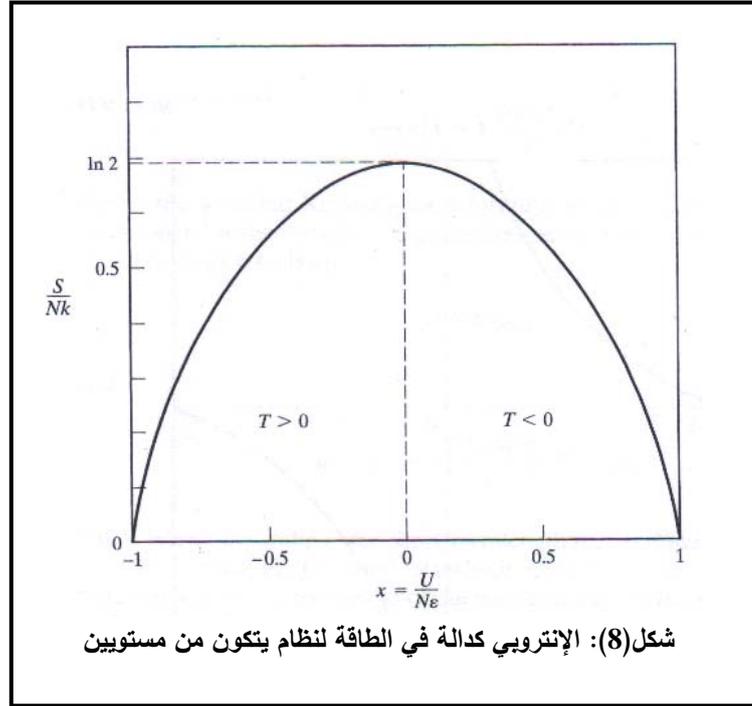
لحساب الإنتروبي للنظام، نبدأ بعدد المستويات المجهولة:

$$\Omega = \frac{N!}{N_1! N_2!}$$

$$N_1 = \frac{N}{2}(1-x) \rightarrow (A), \quad N_2 = \frac{N}{2}(1+x) \rightarrow (B)$$

$$x = \frac{U}{N\epsilon}$$

واجب منزلي: باستخدام تقريب استيرلنج أثبت أن الإنتروبي تأخذ الصورة:



$$\frac{S}{Nk_B} = \frac{k_B \ln \Omega}{Nk_B} = \ln 2 - \frac{1}{2} [(1-x) \ln(1-x) + (1+x) \ln(1+x)]$$

ورسمها كما بالشكل (8)، حيث إن x تتغير من -1 إلى $+1$ ، كما بالشكل (8)،

وفي هذا المدى نجد أن $\frac{S}{Nk_B}$ هي دالة زوجية ولها قيمة عظمى عندما $x = 0$. ومن المعادلتين (A) و (B) نجد أن:

1- $N_1 = N$ و $N_2 = 0$ عندما $x = -1$ ، وتستقر جميع الجسيمات بالمستوى الأرضي.

2- $N_2 = N$ و $N_1 = 0$ عندما $x = 1$ ، وتستقر جميع الجسيمات بالمستوى العلوي.

وبكلتا الحالتين نجد أن $T = 0$.

وعندما تتوزع الجسيمات بالتساوي بين المستويين، فإن الإنتروبي تصل إلى قيمتها العظمى وهي $S = Nk_B \ln 2$. وعند القيمة العظمى نجد أن درجة الحرارة المطلقة تتغير فجأة من ∞ إلى $-\infty$ ، انظر ميل المنحنى حول النقطة $x = 0$ ، وذلك ناتج من عكس المجال المغناطيسي.

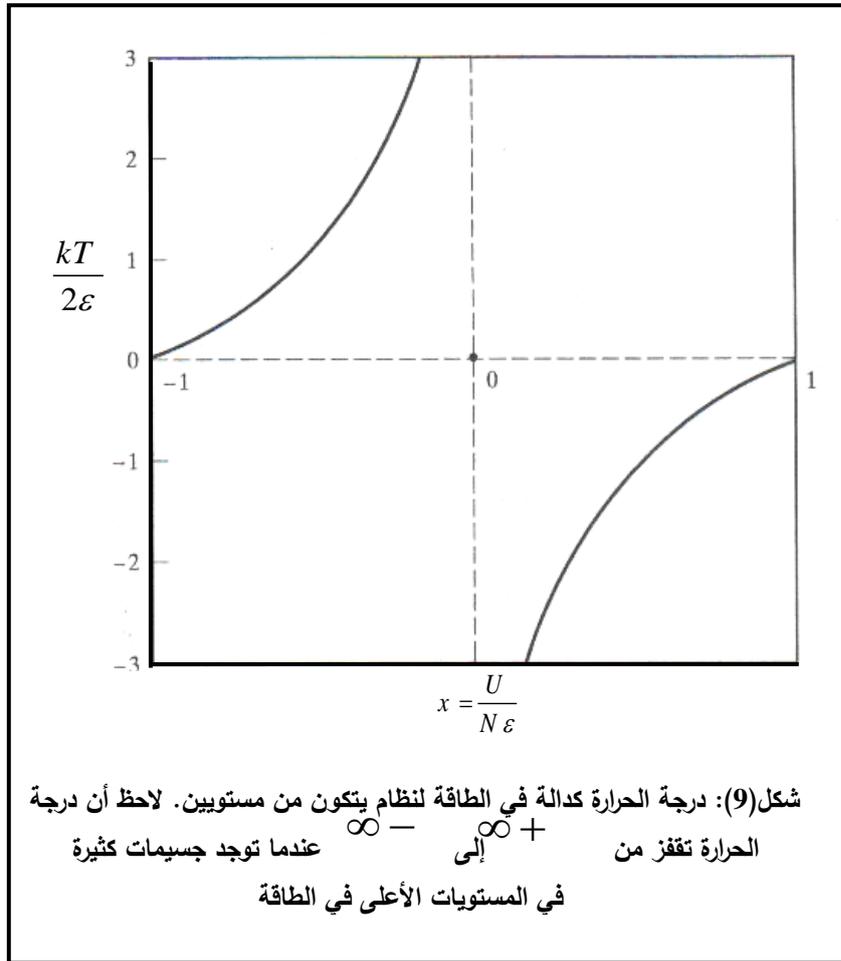
ولتوضيح الصورة، دعونا نستخدم العلاقة بين درجة الحرارة المطلقة والطاقة بالشكل:

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_N .$$

لنجد أن:

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U} \right)_N = \frac{1}{N \varepsilon} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)_N = \frac{k}{2\varepsilon} \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right).$$

وفي الشكل التالي تم رسم كدالة في المتغير $x = \frac{U}{N \varepsilon}$. ويظهر جلياً القفزة الفجائية من ∞ إلى $-\infty$ ، عند التغير القليل في قيمة x .



ولكي نحصل على درجة الحرارة السالبة في النظام، يجب أن تتحقق الشروط الثلاثة التالية:

- 1 - يجب أن يصل النظام إلى حالة الاتزان الحراري.
- 2 - يجب أن يكون لطاقة النظام قيمة محددة عُلياً. هذا الشرط يجعلنا نستبعد الحركة التوافقية البسيطة، حيث إن لها عدداً لا نهائياً من الطاقات الموجبة، بمعنى أنها غير محددة بقيمة عُلياً.

3 - يجب أن تعزل مستويات طاقة النظام عن أي مستويات أخرى للطاقة لها درجة حرارة موجبة.

ولقد قام العالمان بورسيل وباوند (Purcell and Pound) (عام 1951) باستخدام تقنية الرنين المغناطيسي النووي (Nuclear magnetic resonance) لإثبات وجود درجة الحرارة السالبة في النظام المغزلي للنواة.

VI- معاملات أينشتاين وتضخيم الضوء

(Einstein coefficients and Light Amplification)

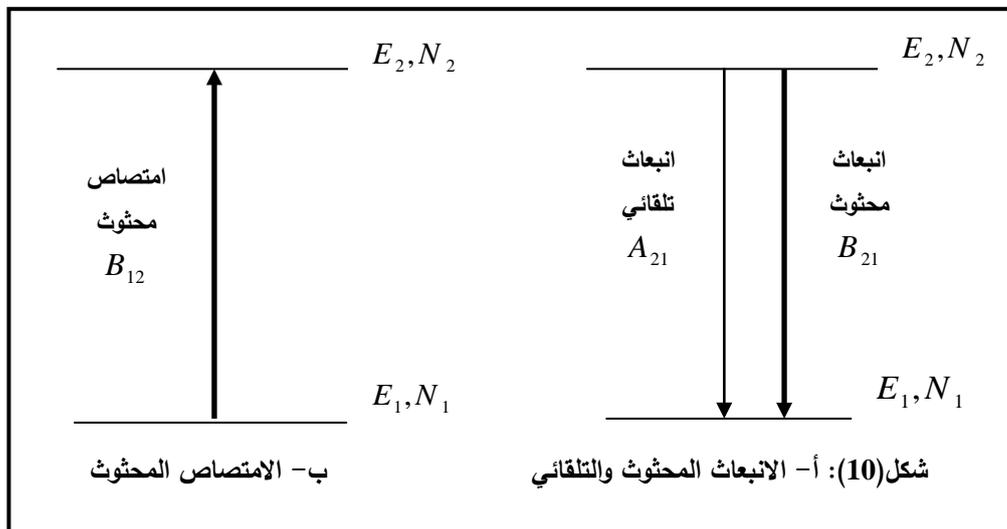
أصبح من السهل الآن إنتاج موجات كهرومغناطيسية شبه أحادية اللون ذات شدة عالية وأيضاً متناسقة (Coherent) وإشعاعات مرئية في شعاع محدد (Narrow beam)، وذلك باستخدام أجهزة الليزر والميزر. الكلمة ليزر هي اختصار للعبارة "تضخيم الضوء بالإشعاع المحثوث":

(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

وكذلك الحال في كلمة "الميزر" وتعني "تضخيم الموجات الميكروية بالإشعاع المحثوث":

(Microwave Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

تأتي عملية تضخيم الضوء (Light amplification) من خلال دراسة تفاعل المواد مع مجال خارجي للطاقة، مثل الإشعاعات الكهرومغناطيسية (Interaction of radiation with matter)، التي يظهر تأثيرها من خلال الفوتونات على إلكترونات المواد. ونحن نعلم أن هذه الإشعاعات لها ترددات مختلفة ومن ثم فهي تتغير مع الزمن، ولهذا نتعامل معها كاضطرابات زمنية. ونتيجة لهذه الاضطرابات الزمنية تصبح مستويات (دوال) الذرة غير مستقرة.



وللتبسيط سوف نتعامل هنا مع مستويين للذرة، انظر الشكل (10)، المستوى الأسفل (الأرضي) ذو الطاقة E_1 وعدد إلكتروناته N_1 والمستوى الأعلى ذو الطاقة E_2 وعدد إلكتروناته N_2 . ومن دراستنا لميكانيك الكم نعلم أن إلكترونات المستوى E_1 بالذرة تظل بنفس المستوي، إلا إذا أثر على الذرة مجال خارجي فنجد أن الإلكترونات تنتقل من المستوى E_1 إلى المستوى E_2 . ويسمى هذا الانتقال المحثوث (أو القسري) (Stimulated transition)، وذلك لتفاعل فوتونات المجال الخارجي مع الذرة. ولذلك نعرف أن إلكترونات المستوى الأسفل انتقلت إلى المستوى الأعلى بواسطة الامتصاص المحثوث (القسري) (Stimulated absorption). والمعدل الزمني للامتصاص المحثوث يعتمد على عاملين:

أ - كثافة الطاقة $\rho_\nu = Nh\nu$ حيث N هي عدد الفوتونات لوحدة الحجم و $h\nu$ هي طاقة الفوتون.

ب - عدد الإلكترونات N_i للمستوى i .

وبصورة رياضية نضع:

$$N_1 \rho_\nu \propto \text{المعدل الزمني للامتصاص المحثوث}$$

$$N_1 B_{12} \rho_\nu =$$

حيث B_{12} هو ثابت التناسب ويعرف على أنه معامل أينشتين للامتصاص المحثوث.

بالنسبة إلى إلكترونات المستوى E_2 نجد أن إلكترونات هذا المستوى تنتقل إلى المستوى E_1 (وينتج عن هذا الانتقال انبعاث فوتونات) بطريقتين مختلفتين:

الأولى: هي الانتقالات التلقائية (أو العفوية، أو الآنية) (Spontaneous transition)، وهي نتيجة لأسباب داخلية لا تتعلق بالمجال الخارجي ومن ثم لا تعتمد على كثافة الطاقة ρ_ν ، ومنها نعرف:

$$N_2 \propto \text{المعدل الزمني للانبعاث التلقائي}$$

$$N_2 A_{21} =$$

حيث A_{21} هو ثابت التناسب ويعرف على أنه معامل أينشتين للانبعاث التلقائي.

والثانية: هي الانتقالات المحثوثة (أو القسرية) (Stimulated transition) والناجمة بتأثير مجالات خارجية، وهي أساس نظرية عمل الليزر، ومنها نعرف:

$$N_2 B_{21} \rho_\nu = \text{المعدل الزمني للانبعاث المحثوث}$$

حيث B_{21} هو ثابت التناسب ويعرف على أنه معامل أينشتاين للانبعاش المحثوث.

وعند تحقق شرط الاتزان الحراري بين المادة والإشعاع الخارجي نجد أن معدلات انتقال الإلكترونات من المستوى العلوي إلى المستوى الأرضي تتساوي مع معدل انتقال الإلكترونات من المستوى الأرضي إلى المستوى العلوي. ولذلك نجد أن:

$$N_1 B_{12} \rho_\nu = N_2 (B_{21} \rho_\nu + A_{21})$$

ومنها نستطيع أن نحصل على:

$$\rho_\nu = \frac{\left(\frac{A_{21}}{B_{21}} \right)}{\left(\frac{N_1 B_{12}}{N_2 B_{21}} \right) - 1}$$

وباستخدام توزيع بولتزمان الإحصائي بالشكل:

$$\frac{N_1}{N_2} = e^{(E_2 - E_1)/k_B T} = e^{h\nu/k_B T}$$

نجد أن:

$$\rho_\nu = \frac{\left(\frac{A_{21}}{B_{21}} \right)}{\left(\frac{B_{12}}{B_{21}} \right) e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

وبمقارنتها بمعادلة الإشعاع للجسم الأسود:

$$\rho_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

نجد أن:

$$B_{12} = B_{21}, \quad (I)$$

$$A_{21} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} B_{21} \quad (II).$$

المعادلات (I) و (II) تُعرّف بمعاملات أينشتاين وتدل على تساوي معامل أينشتاين للامتصاص المحثوث، B_{12} ، مع معامل أينشتاين للانبعاش المحثوث، B_{21} . بالطبع يمكن حساب معاملات أينشتاين الثلاث بواسطة قوانين ميكانيكا الكم، ولكن هذا يحتاج منا مستوى من الدراسة أعلى من هذا الكتاب. وهذه الدراسة لها أهميتها الخاصة عند دراسة طريقة عمل الليزر.

من السهل ملاحظة أنه عند الاتزان الحراري نجد أن: نسبة احتمالية الانبعاث التلقائي إلى احتمالية الانبعاث المحثوث يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho_v(\omega)} = e^{\beta\hbar\omega} - 1.$$

ولذلك إذا تحقق أن $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \gg 1$ ، فإننا نجد أن احتمالية الانبعاث التلقائي تكون أكبر بكثير من احتمالية الانبعاث المحثوث، ومن ثمَّ يمكن إهمال الانبعاث المحثوث. هذه الحالة تتحقق في حالة انتقال الإلكترونات في الذرات والجزيئات وأيضاً الانتقال الإشعاعي في النواة. ولكن في حالة تحقق الشرط $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$ ، كما في منطقة الأمواج الميكروية (Microwave) الطيفية، فإننا نجد أن الاحتمالين يصبحان مهمين.

ونسأل ما هي أهمية الانبعاث المحثوث؟ والإجابة أن الانبعاث المحثوث ناتج من تأثير الإشعاع الساقط على ذرات، أو جزيئات، المادة. من هنا نجد أن جميع الذرات المهتزة بقوة تحتفظ بفرق طوري ثابت (Constant phase difference) بالنسبة إلى الإشعاع الساقط. وذلك يعني أن جميع الموجات المنبعثة من ذرات المادة لها طور واحد، ومن ثمَّ فإن الانبعاث المحثوث يقال عنه إنه متناسق (Coherent). والعكس بالنسبة للانبعاث التلقائي فإنه يحدث عشوائياً لكل ذرة على حدة وبدون أي ارتباط بين زمن الانتقال لأي منها. بالتالي فإن أطوار الإشعاعات الذرية في الانبعاث التلقائي تتوزع عشوائياً، ومنه نقول إن الانبعاث التلقائي غير متناسق (Incoherent).

مثال: احسب النسبة $\frac{A_{21}}{B_{21}\rho_v(\omega)}$ لمصدر ضوئي عادي، عند درجة الحرارة

$$T \sim 10^3 \text{ K} \text{ والتردد } \omega = 3 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1} \text{ (المقابل للطول الموجي } \lambda = 6000 \text{ A)}$$

الحل: بحساب القيمة:

$$\frac{\hbar\omega}{k_B T} = \frac{(1.05 \times 10^{-34} \text{ sec}^{-1} \text{ J} \cdot \text{sec})(3 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1})}{(1.38 \times 10^{-23} \times 10^{15} \text{ J/K}) \times 10^3 \text{ K}} = 23$$

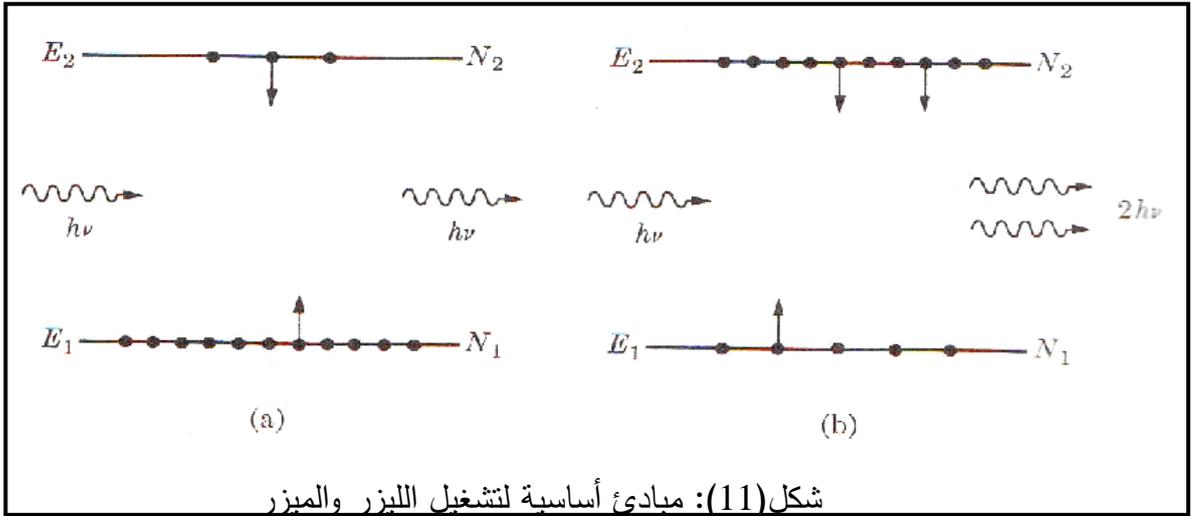
نجد أن النسبة المطلوبة هي:

$$\frac{A_{21}}{B_{21}\rho_v(\omega)} = 10^{10}$$

لهذا فإن الانبعاث التلقائي من المصادر الضوئية العادية يكون هو السائد، وهذا الانبعاث الموجي يكون دائماً غير متناسق (Incoherent).

- كما تم شرحه بالسابق فإنه في حالة الاتزان الحراري بين المادة والإشعاع الساقط يكون معدل الامتصاص والانبعاث متساوياً، وهذا يتضح بالشكل التالي (a).
- بالرغم من أن الانبعاث المحثوث مهمل في هذا الشكل إلا أن التساوي يحدث بين معدلات الامتصاص المحثوث والانبعاث التلقائي نتيجة الكثافة الكبيرة لجسيمات المستوى السفلي بالنسبة لكثافة الجسيمات بالمستوى العلوي عند الاتزان الحراري. وفي الحالة العامة عندما تتفاعل الطاقة الإشعاعية مع المادة ونجد أن نسبة معدل الانبعاث إلى معدل الامتصاص يُعطى بالعلاقة:

$$\frac{\text{Emission rate}}{\text{Absorption rate}} = \frac{(B_{21}\rho_v + A_{21})N_2}{B_{12}\rho_v N_1} = \left(1 + \frac{A_{21}}{B_{12}\rho_v}\right) \frac{N_2}{N_1}$$



- وفي حالة تحقق الشرط $\frac{\hbar\omega}{k_B T} \ll 1$ ، كما في منطقة الأمواج الميكروية (Microwave) الطيفية، نجد أن النسبة $\frac{A_{21}}{B_{12}\rho_v} \ll 1$ ومنها نصل إلى:

$$\frac{\text{Emission rate}}{\text{Absorption rate}} \approx \frac{N_2}{N_1}$$

- وعند الاتزان الحراري نجد أن $N_1 > N_2$ ، كما بالشكل (11) (a)، ومنها نجد أن معدل الانبعاث أقل من معدل الامتصاص (عند استخدام أكثر من فوتون). ولكن، إذا تمت بطريقة ما، إذا حدث انعكاس في التوزيع وأصبحت كثافة الجسيمات بالمستوى العلوي أكثر من كثافة الجسيمات بالمستوى السفلي، أي أن $N_2 > N_1$ ، فسوف نحصل على حالة عدم اتزان حراري، ويصبح معدل الانبعاث أكبر من معدل الامتصاص. وتعبير آخر، فإنه إذا سقط شعاع له كثافة الطاقة ρ_v ومر خلال النظام، فإن الشعاع الناتج من النظام سوف يحتوي على عدد من الفوتونات، ذات التردد ν ، أكثر من فوتونات الشعاع الساقط. انظر الشكل (11) (b). والنتيجة أننا نحصل على تضخيم (Amplification) للطاقة عند هذا التردد. بالطبع هذا يحدث إذا كان فرق

الطاقة بين المستويين يعطى بالعلاقة $E_2 - E_1 = h\nu$. ومع مرور الوقت يصل النظام إلى حالة الاتزان، حيث نجد أن $N_1 > N_2$ ، ويقل التضخيم. وللمحافظة على استمرارية هذا التضخيم يجب أن نستمر إما في ملء المستويات العليا أو تقليل كثافة المستويات السفلية! والأجهزة التي تعنى بهذا التضخيم تسمى "الليزر" وهي اختصار للعبارة تضخيم الضوء بالإشعاع:

(Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation)

وهناك أنواع عديدة من الليزر نذكر منها:

- 1 - ليزر الحالة الصلبة (Solid-state Lasers) مثل ليزر الياقوت (Ruby Lasers).
- 2 - ليزر الغازات (Gas Lasers) مثل ليزر الهيليوم-نيون.
- 3 - ليزرات أشباه الموصلات (Semiconductor Lasers) مثل ليزر الدايمود (Diode Lasers). ويستخدم هذا النوع في عديد من التطبيقات مثل طابعات الليزر و (CD players)

تمارين عامة

1- أثبت أن دالة التجميع للفوتونات تعطى بالشكل:

$$Z_{\text{photon}} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_i}}$$

ومنها أثبت أن:

$$F = -\frac{1}{3}bVT^4,$$

$$S = \frac{4}{3}bVT^3,$$

$$P = \frac{1}{3}bT^4,$$

$$E = F + TS = bVT^4.$$

2- للترددات المنخفضة ($\beta\hbar\omega \ll 1$) وتبعاً لقانون ريلي-جينز وجد أن:

$$U = k_B T,$$

وعند الترددات المرتفعة ($\beta\hbar\omega \gg 1$) وتبعاً لقانون فين وجد أن:

$$U = \hbar\omega e^{-\beta\hbar\omega} d\nu,$$

أ- أثبت أن:

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{1}{T} \right) = \begin{cases} -\frac{k_B}{U^2}, & (\beta \hbar \omega \ll 1), \\ -\frac{k_B}{\hbar \omega U}, & (\beta \hbar \omega \gg 1) \end{cases}$$

ب- باستخدام المعادلتين السابقتين نستطيع تخمين المعادلة:

$$\frac{d}{dU} \left(\frac{1}{T} \right) = -\frac{k_B}{\hbar \omega U + U^2}$$

وبتكاملها نجد أن:

$$U = \frac{\hbar \omega}{e^{\hbar \omega} - 1}$$

وذلك باستخدام الشروط الحدودية لحساب ثابت التكامل.

ملحوظة، الطريقة التي استخدمت هنا هي الطريقة التي اشتق بها بلانك قانونه العام.

3- لقد أثبتنا تكثيف بوز-أينشتين في ثلاثة أبعاد، أثبت أنه لا يوجد تكثيف بوز-أينشتين في بعدين.