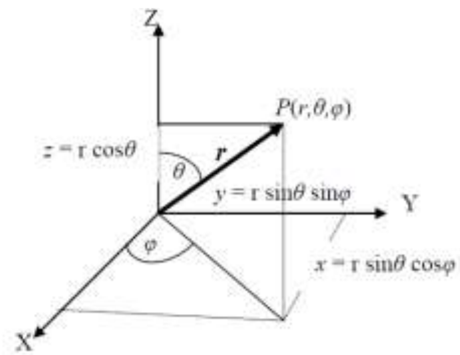
الإحداثيات القطبية الكروية
Spherical Coordinate system

يوجد العديد من المسائل الفيزيائية التي يتطلب حلها استخدام الاحداثيات الكروية. لذلك سوف نلقي نظرة عابرة على هذه الاحداثيات.



شكل (1) الإحداثيات القطبية الكروية

في الإحداثيات القطبية الكروية، تستخدم الزاويتان θ, φ في تحديد موقع النقطة P على سطح كرة نصف قطرها r (انظر الشكل **1**) بحيث إن: $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. من الشكل نجد أن:

زاوية السمت الرأسية θ (Zenith angle) تعرف بالعلاقة: $\cos\theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ وتتغير من 0 إلى π،

وزاوية السمت φ (Azimuthal angle) تعرف بالعلاقة: $\tan\varphi = \frac{y}{x}$ وتتغير من 0 إلى 2π.

يمكن ربط العلاقات الثلاث وعكسها في الإحداثيات القطبية الكروية والكرتيزية كالتالي:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi, & |\boldsymbol{r}| &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi, & \theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ z &= r\cos\theta, & \varphi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

وعنصر الحجم هو $d\tau = r^2\, dr\, d\Omega$ حيث تأخذ r القيم من 0 إلى ∞ وتعرف $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ بالزاوية المجسمة.

واجب منزلي: من العلاقات (1) أثبت التفاضلات التالية:

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin\theta\cos\varphi$	$\frac{\partial\theta}{\partial x} = \frac{\cos\theta\cos\varphi}{r}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}$	$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -y$
$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta\sin\varphi$	$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\theta}$	$\frac{\partial y}{\partial\varphi} = x$
$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos\theta$	$\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r}$	$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial\varphi} = 0$

Classical Mechanics	**Quantum Mechanics**
$L_x = yp_z - zp_y;$	$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$
$L_y = zp_x - xp_z;$	$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$
$L_z = xp_y - yp_x;$	$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$
$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2;$	$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

مقارنة بين كمية الحركة الزاوية المدارية الكلاسيكية والكمية

مثال: أثبت العلاقة:

$$\hat{L}_z \equiv -i\frac{\partial}{\partial \varphi} = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

واجب منزلي: تحقق من الحسابات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{x/r}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

ومنها أثبت أن

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

واجب منزلي: أثبت العلاقات الآتية

$$\hat{L}_x = -i\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) = i\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = -i\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) = i\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad \textbf{(2)}$$

$$\hat{L}_\pm \equiv \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y = \pm e^{\pm i\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\theta} \pm i\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right]$$

قيمة $\hat{L}^2$ بالمعادلة (2) مهمة جداً وخصوصاً عند استخدامها بمعادلة شرودنجر:

$$\hat{H}=\hat{T}+\hat{V}=-\frac{1}{2}\nabla^2+V(r),$$

حيث يأخذ المؤثر لابلاسان ∇^2 في الإحداثيات القطبية الكروية الشكل التالي:

$$\nabla^2=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{r^2}.$$

وتأخذ معادلة شرودنجر (باستخدام الوحدات الذرية) الصورة:

$$\hat{H}\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\hat{L}^2}{2r^2}+V(r)\right]\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)$$

ونجد أن الدالة الكلية تأخذ الشكل:

$$\Psi_{nlm}\equiv\Psi_{nlm}(r,\theta,\varphi)=R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$$ ،

حيث $R_{n,\ell}(r)$ تعرف بأنها الجزء القطري للدالة و $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ تعرف بأنها الدالة التوافقية الكروية (سوف يتم تعريفها لاحقا).

طريقة فصل المتغيرات

دعونا نبدأ بمعادلة لابلاس التفاضلية في الاحداثيات الكروية وهي بالشكل:

$$\overline{\nabla}^2V=\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2V}{\partial\varphi^2}=0 \qquad \text{(أ)}$$

والتي يمكننا حلها بطريقة فصل المتغيرات وذلك باستخدام التعويض التالي:

$$V(r,\theta,\phi)=\Re(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow\quad \sin^2\theta\left[\frac{r^2}{\Re}\frac{\partial^2\Re}{\partial r^2}+\frac{1}{\Theta\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)\right]+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=0$$

ومنها نحصل على ثلاث معادلات تفاضلية وهم:

$$\frac{\partial^2\Re}{\partial r^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\Re=0$$ **معادلة قطرية** (Radial equation) (i)

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}+b^2=0$$ (Azimuthal equation) (ii)

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\left\{l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta=0$$ **معادلة زاوية** (Angular equation) (iii)

للتأكد من صحة الحلول العامة للمعادلات التفاضلية يتم التعويض بكل حل على حدة بالمعادلة الخاصة به.

I. المعادلة (i) لها الحل القطري البسيط:

$$\boxed{\Re(r) = Ar^{\ell} + \frac{B}{r^{\ell+1}}}$$

حيث A و B هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشروط الحدودية.

II. المعادلة (ii) يمكن التعامل معها كالتالي:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -b^2 \Phi \qquad (1)$$

حيث b قيمة ثابتة. حل(1) هو:

$$\Phi(\varphi) = |\Phi\rangle = C\, e^{\pm ib\varphi} \qquad (2)$$

حيث C هو ثابت اختياري ويحسب بواسطة معايرة الدالة $|\Phi\rangle$.

ملاحظات:

أ- الدالة (2) غير مناسبة للاستخدام الفيزيائي؛ وذلك لأننا لو غيرنا الزاوية φ بمقدار 2π فإننا سنعود لنفس النقطة، وهذا يعني أن الدالة تكرارية القيم.

ب- لكي تصبح الدالة غير تكرارية القيم يجب أن نحصرها في المدى $\varphi = \{0, 2\pi\}$ ونستخدم العلاقة:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

ومن ثم فإن الشرط:

$$Ce^{ib\varphi} = Ce^{ib\varphi}e^{ib2\pi} \quad \Rightarrow \quad e^{ib2\pi} = 1$$

ولكي يتحقق الشرط$e^{ib2\pi} = 1$ فإن:

$$2\pi(b) = 2\pi m,$$

$$\Rightarrow b = m \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

وأخيراً نجد أن:

$$\boxed{|\Phi\rangle = Ce^{im\varphi}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad \textbf{(5)}$$

ج- من المعادلة (**5**) نلاحظ أن القيم m هي قيم مميزة للمؤثر $\hat{L}_z \equiv -i\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$ ، حيث $\hat{L}_z\,|\Phi\rangle = m|\Phi\rangle$ ، وهي قيم مكممة (قيم منفصلة)، ويسمى m بالعدد الكمي المغناطيسي.

لحساب قيم A ، نستخدم خواص المعايرة:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int_0^{2\pi} \left(Ce^{im\varphi}\right)^* \left(Ce^{im\varphi}\right) d\phi = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

III. المعادلة (iii) يمكن تبسطها باستخدام التعويض التالي:

$$\mu = \cos\theta, \quad \mu \in [-1, 1]$$

with Azimuthal symmetry m = 0, and using the definition $\mu = \cos\theta$, to prove that:

$$\frac{d}{d\theta} = -\sin\theta \frac{d}{d\mu} = -(1-\mu^2)\frac{d}{d\mu},$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right) = (1-\mu^2)\frac{d^2}{d\mu^2} - 2\mu\frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{d}{d\mu}\right)$$

This implies that the function *P* satisfies the equation

$$\frac{d}{d\mu}\left((1-\mu^2)\frac{dP_\ell(\mu)}{d\mu}\right) = -\ell(\ell+1)P_\ell(\mu)$$

(We now have P_ℓ since for every ℓ we will have a different function.). The last equation is the **Legendre** equation, and its solutions are the **Legendre polynomials** $P_m(\mu \equiv \cos\theta)$.

لنصل للمعادلة التفاضلية:

$$\left[\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{d}{dx}\right\} + \left\{\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\}\right]\Theta_{\ell,m}(\theta,\varphi) = 0$$

المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة "ليجندر" المرافقة وحلها يعطي دالة "ليجندر" المرافقة كثيرة الحدود، وسيتم تعريفها والتعامل معها بالصفحة التالية.

ملاحظة مهمة: الأن يمكن وضع الحل العام لمعادلة لابلاس التفاضلية بالصورة:

$$V(r,\theta,\varphi) = \sum_m \sum_\ell \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)\Theta_{\ell,m}(\theta,\varphi)$$

ملحق

$$\frac{1}{\Re(r)}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial\Re(r)}{\partial r})=\ell(\ell+1)=\text{ constant} \qquad (7)$$

لحل المعادلة (7) دعونا نفترض الحل العام بالصورة:

$$\Re(r)=C\,r^k, \qquad (9)$$

حيث C و k ثوابت اختيارية. بالتعويض من (9) في (7) نحصل على:

$$\frac{1}{Cr^k}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(Cr^k\right)\right)=k\,(k+1)=\ell(\ell+1) \qquad (10)$$

لذلك، نجد أن الثابت يجب أن يحقق العلاقة:

$$k^2+k=\ell(\ell+1) \qquad (11)$$

المعادلة (11) تعطينا القيم التالية للثابت k:

$$k=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\ell(\ell+1)}}{2}=\frac{-1\pm\left(2\ell+1\right)}{2}=\begin{cases}\ell\\ \text{or}\\ -(\ell+1)\end{cases} \qquad (12)$$

بالتالي فإن الحل العام للمعادلة (7) يمكن كتابته بالشكل:

$$\boxed{\Re(r)=Ar^\ell+\frac{B}{r^{\ell+1}}} \qquad (13)$$

حيث A و B هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشروط الحدودية.

المعادلة (8)، المعتمدة على الزاوية θ ، يمكن وضعها بالشكل:

$$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\ell(\ell+1)\sin\theta\right\}\Theta(\theta)=0 \qquad (8)$$

حل هذه المعادلة تسمى دالة ليجيندر متعددة الحدود ويرمز لها بالشكل $P_m(\mu\equiv\cos\theta)$.