

بعض الدوال الخاصة وتطبيقاتها في الفيزياء

Some Special Functions and their Applications in Physics

إعداد

أ.د. إبراهيم محمود أحمد ناصر
أستاذ الفيزياء النظرية
جامعة الملك فهد للبترول والمعادن
الظهران، المملكة العربية السعودية

د. عفاف السيد عبد الهادي
أستاذ الفيزياء النظرية المشارك
الجامعة المصرية الصينية
القاهرة، ج. م. ع

العنوان	Chapter
2- دالة جاما $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Gamma Function)	-1
3- دالة كرونكر دلتا δ_{ij} (Kronecker Delta Function)	
4- دالة الخطأ (Error Function)	
5- دالة دلتا لديراك $\delta(x)$ (Dirac Delta Function)	
6- دالة "ليجندر" كثيرة الحدود $P_n(x)$ (Legendre Polynomials)	
7- دالة "ليجندر" المرافقة كثيرة الحدود $P_n^m(x)$ (Associated Legendre Polynomials)	
8- دالة التوافقيات الكروية $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ (Spherical Harmonic Function)	

مقدمة

تتضح وتتبلور النتائج الفيزيائية، كحلول ذرة الهيدروجين والمهتز التوافقي البسيط، من حل معادلات تفاضلية معظمها من الدرجة الثانية، مثل معادلة لابلاس $\nabla^2 V = 0$. تحل المعادلات التفاضلية، العادية منها والجزئية، بواسطة دوال تسمى الدوال الخاصة. وتلعب الدوال الخاصة دوراً هاماً في دراسة جميع مجالات العلوم التطبيقية والبحثية. لذلك معرفتها واللجوء إليها، بواسطة الطلبة والباحثين، تعتبر من الضروريات. وفي هذا الكتاب سوف نستعرض أهم الدوال الخاصة المرتبطة بدراسة العلوم التطبيقية والبحثية.

يعتمد حل المعادلات التفاضلية على الاحداثيات المفترضة والتي يتم اختيارها على أساس التماثل بالمشكلة المطلوب حلها. فهناك بعض المسائل يكون بها تماثل كرتيزي، كالمكثفات، أو تماثل كروي، للكرة والقشرة الكروية، أو تماثل اسطوانى، للاسلاك الاسطوانية، وهكذا. يوجد أيضا العديد من الاحداثيات الأخرى، والتي لن نستطيع الإشارة لها هنا.

حيث أننا نتعامل مع فضاء ثلاثي الابعاد، فإستخدامنا لطريقة الحل بواسطة فصل المتغيرات، غالبا وليس في جميع الحالات، فإننا نصل الى ثلاث معادلات تفاضلية منفصلة. الحل المنفصل لكل معادلة على حدة يمكن أن يكون دالة خاصة بها. راجع بعضها بالصفحة التالية.

قبل أن انهي المقدمة، أود أن اعبر عن شكري العميق لمنظمين هذه المحاضرات من اعضاء الجمعية العلمية السعودية للعلوم الفيزيائية أولا: للتنظيم المتميز، وثانيا: أنهم أتاحوا لي الفرصة لشرح هذه المادة المحببة إلي باللغة المحببة إلي وهي اللغة العربية. واتمنى من الله أن يستفيد من هذه المحاضرات جميع من حضر هذه الدورة، وايضا من لم يحضر، وذلك بارسالها لمن يرغب بها ويشعر انها سوف تكون مفيدة لهم. ولا نبغي منكم غير الدعاء، والله الموفق.

شكرا لمجهود الاستاذة سمية وشكرا للحضور على حسن التفاعل. وأتمنى أن تكون المحاضرات المعدلة المكتوبة بها بعض التحسن وذلك نتيجة للمشاركة بالأسئلة.

أرحب دائما بأي تعليق ايجابي لتحسين المحاضرات، من ناحية أسلوب العرض أو الموضوع، حتى يستفاد منها اللاحقون.

Introduction

سنقوم هنا بتقديم بعض من المصطلحات المطلوبة والتي سوف تتكرر بتعريفات الدوال الخاصة

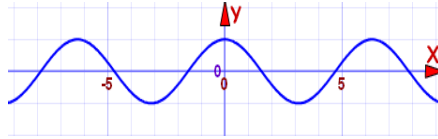
1- **المضروب:** يعرف المضروب لقيمة n كالتالي:
$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 1$$

فمثلاً $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

2- الدالة الزوجية

تكون دالة ما زوجية إذا تحققت العلاقة $y(x) = y(-x)$ لكل قيم x . أي أن قيمة الدالة $y(x)$ لا تتغير عند وضع $-x$ بدلاً من x .

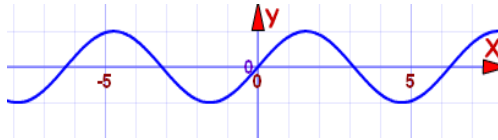
فمثلاً $\cos(x) = \cos(-x)$ هي دالة زوجية.



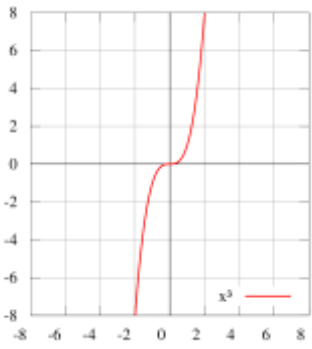
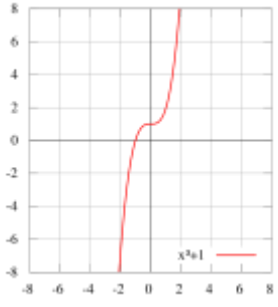
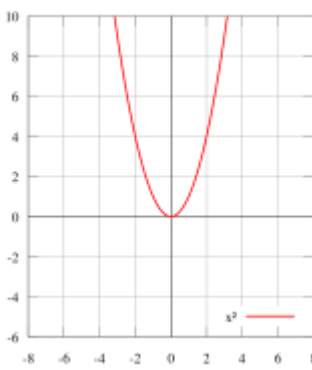
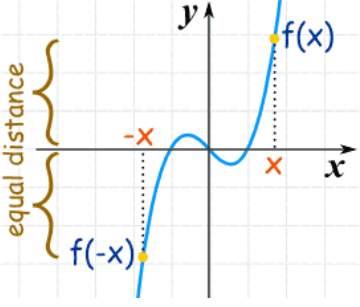
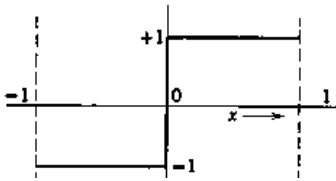
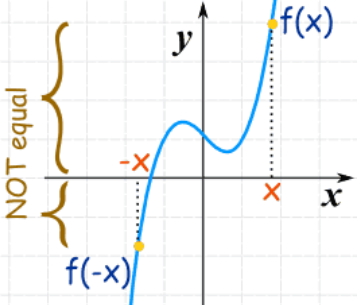
3- الدالة الفردية

تكون دالة ما فردية إذا تحققت العلاقة $y(x) = -y(-x)$ لكل قيم x . أي أن قيمة الدالة $y(x)$ تتغير عند وضع $-x$ بدلاً من x .

فمثلاً $\sin(x) = -\sin(-x)$ هي دالة فردية.



واجب منزلي: حدد نوع الدوال الآتية: فردية، زوجية ، لا زوجية ولا فردية.

Wave	نوع	Wave	نوع
	<p>Odd فردية</p>		<p>Neither even nor odd لا زوجية ولا فردية</p>
	<p>Even زوجية</p>		<p>Odd فردية</p>
	<p>فردية Odd</p>		<p>Neither even nor odd لا زوجية ولا فردية</p>

Few differential equations of special functions

☞ **Laguerre Polynomials (Hydrogen-like atoms)**

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} - (1-x) \frac{d}{dx} + n \right] L_n(x) = 0$$

☞ **Associate Laguerre Polynomials (Hydrogen-like atoms)**

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} - (m+1-x) \frac{d}{dx} + (n-m) \right] L_n^m(x) = 0$$

☞ **Legendre Polynomials (dipole expansion)**

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \ell(\ell+1) \right] P_\ell(x) = 0$$

☞ **Associate Legendre Polynomials (Hydrogen-like atoms, Multipole expansion)**

$$\left[(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + \left\{ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] P_n^m(x) = 0$$

☞ **Spherical Harmonics**

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{d}{d\theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\phi} + \ell(\ell+1) \right] Y_\ell^m(x) = 0$$

☞ **Hermit Polynomials (Harmonic oscillator المتذبذب التوافقي)**

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right] H_n(x) = 0$$

☞ **Bessel functions**

$$\left[x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \{x^2 - \nu^2\} \right] y(x) = 0$$

☞ **Spherical Bessel functions (Scattering الاستطارة، التشتت)**

$$\left\{ r^2 \frac{d^2}{dr^2} + 2r \frac{d}{dr} + [k^2 r^2 - \ell(\ell+1)] \right\} R(r) = 0$$

☞ **Confluent Hypergeometric function**

$$z \frac{d^2 w}{dz^2} + (b-z) \frac{dw}{dz} - aw = 0$$

☞ **Hypergeometric function**

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0.$$

☞ **Airy's function (Optics)**

$$y'' - ty = 0,$$

Chapter 1

بعض الدوال البسيطة

Some of simple special functions

العنوان
1- دالة جاما (Gamma Function $\Gamma(n) = (n-1)!$)
2- دالة كرونكر دلتا (Kronecker Delta Function δ_{ij})
3- دالة الخطأ (Error Function)
4- دالة دلتا لديراك (Dirac Delta Function $\delta(x)$)

1- دالة جاما $\Gamma(n) = (n-1)!$ (Gamma Function)

هذه من الدوال التي تستخدم كثيرا حيث أنها مرتبطة بتعريف المضروب "!" وتقريبا جميع الدوال الخاصة معرفة بدلالة الدالة جاما (أو المضروب).

دعونا نبدأ بالتكامل المعروف للجميع بالصورة:

$$\int_0^{\infty} e^{-qx} dx = q^{-1} \quad (i)$$

وبتفاضل الطرفين بالنسبة للقيمة الثابتة q لعدد n من المرات، فسوف نجد على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \int_0^{\infty} e^{-qx} dx &= \frac{\partial}{\partial q} q^{-1} \Rightarrow \int_0^{\infty} -xe^{-qx} dx = -1q^{-2} \Rightarrow \int_0^{\infty} xe^{-qx} dx = 1q^{-2} \\ \frac{\partial^2}{\partial q^2} \int_0^{\infty} e^{-qx} dx &= \frac{\partial^2}{\partial q^2} q^{-1} \Rightarrow \int_0^{\infty} (-x)^2 e^{-qx} dx = -1(-2)q^{-3} \Rightarrow \int_0^{\infty} x^2 e^{-qx} dx = 2q^{-3} \\ &\vdots \end{aligned}$$

أخيرا نجد أن:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-qx} dx = (n!)q^{-(n+1)} \quad (ii)$$

وبوضع الثابت $q = 1$ ، نجد أننا سوف نحصل على تعريفاً للقيمة $n!$ بواسطة التكامل التالي:

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx \quad (iii)$$

ومنه سوف نعرف دالة جاما بالعلاقة:

$$\Gamma(n) \equiv \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad n > 0$$

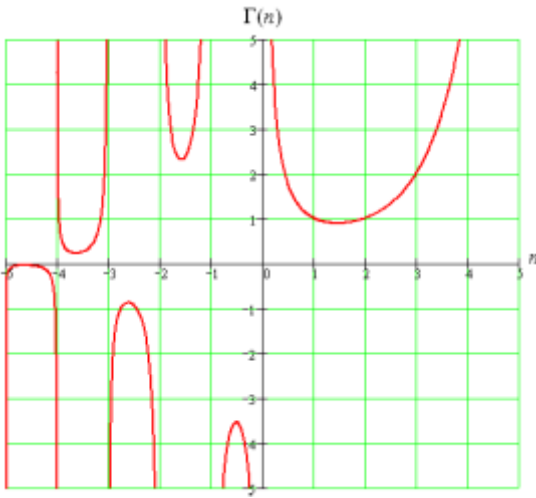
ومن تعريف جاما نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$$

ولقيم $n < 0$ نستطيع استخدام العلاقة:

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

نلاحظ من الرسم المقابل أن قيم $\Gamma(n)$ لها قيم شاذة (Singular) بمعنى أن $\Gamma(n) = \infty$ عند النقاط $n = 0, -1, -2, \dots$.



قيم خاصة لدالة جاما:

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)} \sqrt{\pi}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = -e^{-x} \Big|_0^{\infty} = -(0 - 1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = \Gamma(2 + 1) = 2\Gamma(2) = 2,$$

$$\Gamma(2) = \Gamma(1 + 1) = 1\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(4) = \Gamma(3 + 1) = 3\Gamma(3) = 3 \times 2 \times 1 = 3!$$

Problem. Show that $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Step 1. $\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx$

Step 2. Let $x = u^2, \quad dx = 2udu$

Step 3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = \int_0^{\infty} e^{-u^2} (u^2)^{-\frac{1}{2}} (2udu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} (u)^{-1} (udu) = 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du$

Step 4. $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right)$

Step 5.

$$\int_0^{\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \Rightarrow \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \left(2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du \right) \left(2 \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv \right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv$$

Step 6. Switching to polar coordinates* ($du dv = r dr d\theta$)

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2} \right) e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} \Big|_0^{\infty} d\theta = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0 - 1) d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 2\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

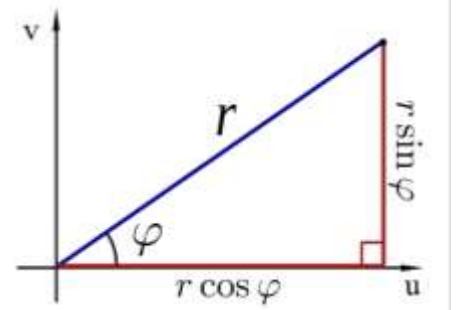
Step 6. $\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi \Rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

*Switching to polar coordinates with $u = r \cos \varphi$ and $v = r \sin \varphi$, we have

$$u^2 + v^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2,$$

and using the Wronskian,

$$du dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr d\theta = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} dr d\varphi = r dr d\varphi$$



we can have the relation $dudv = r dr d\varphi$. With the u, v domain limits defining the first quadrant, $0 < u < \infty$ and $0 < v < \infty$, the limits on r and φ become $0 < r < \infty$ and $0 < \varphi < \pi/2$.

Example: Prove that $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$

Answer: Use the definition $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \Rightarrow \Gamma(n-1) = \frac{\Gamma(n)}{n-1}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-1\right) = \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}$$

Example: Find $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$

Answer: Use the definition $\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \Rightarrow \Gamma(n-1) = \frac{\Gamma(n)}{n-1}$, then

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}-1\right) = \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2} \times -\frac{1}{2}} = \frac{4}{3}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

مثال: جسيم يعرف بالدالة $\psi(x) = xe^{-x/2}$

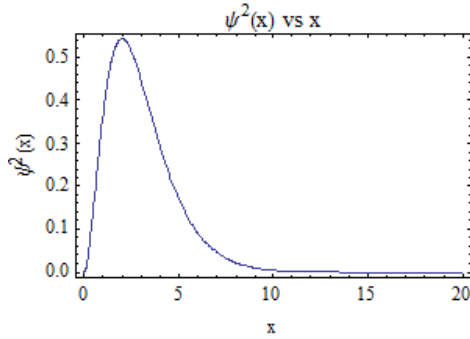
أ- ارسم $|\psi(x)|^2$ كدالة بالمسافة.

ب- احسب الاحتماليه $P = \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$.

ت- قارن الاحتماليه $P = \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx$ بالاحتماليه $P = \int_0^{15} |\psi(x)|^2 dx$

الحل:

أ- رسم $|\psi(x)|^2$ كدالة بالمسافة يعطى بالشكل التالي:



ب- الاحتمالية الأولى تحسب كالتالي:

$$P = \int_0^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = \int_0^{\infty} x^{3-1} e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2! = 2$$

ث- الاحتمالية الثانية تحسب، بأي طريقة حسابية وتنتج:

$$P = \int_0^{15} |\psi(x)|^2 dx = \int_0^{15} x^2 e^{-x} dx = 1.99999$$

ملحوظة: تعد القيمة 15 كأنها ∞ لهذه الدالة.

مثال: جسم كتلته m ثبت على المحور السيني على مسافة a من نقطة الأصل. إذا افترضنا أن الجسم يجذب إلى نقطة الأصل O بقوة تتناسب عكسي مع المسافة x ، بمعنى أن:

$$F = m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x}$$

حيث $k > 0$ هو ثابت التناسب. إذا ترك الجسم يتحرك، احسب الزمن اللازم للوصول إلى نقطة الأصل.
الحل:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{x} \quad (1)$$

دعونا نعرف سرعة الجسم بالعلاقة $\frac{dx}{dt} = v$ ، بالتالي:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \cdot \frac{dv}{dx}$$

بالتعويض في (1) ينتج:

$$mv \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{k}{x} \quad \text{or} \quad \frac{mv^2}{2} = -k \ln x + c$$

باستخدام الشرط الابتدائي $v = 0$ عند $x = a$ نجد أن $c = k \ln a$ ، ومنه نجد:

$$\frac{mv^2}{2} = k \ln \frac{a}{x} \quad \text{or} \quad v = \frac{dx}{dt} = -\sqrt{\frac{2k}{m}} \sqrt{\ln \frac{a}{x}}$$

حيث الإشارة السالبة اخذت في الاعتبار نتيجة أن x تقل مع زيادة الزمن. نحسب الآن الزمن الكلي لتحرك الجسم من النقطة $x = a$ الى نقطة الأصل $x = 0$ بالتكامل:

$$T = \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\ln \frac{a}{x}}} \quad (4)$$

لحساب نتيجة التكامل، نضع $\ln \frac{a}{x} = u$ أو $x = ae^{-u}$ ، لينتج:

$$T = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du = a \sqrt{\frac{m}{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = a \sqrt{\frac{\pi m}{2k}}$$

Beta Function

Beta function is defined by the expression:

$$\beta(m, n) \equiv \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx \quad m, n > 0$$

Use $x = \sin^2 \theta$, one can have:

$$\beta(m, n) \equiv 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta$$

Homework: prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

Special Values:

$$\beta(m, n) = \beta(n, m), \quad \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi;$$

Example: Evaluate the following integrals: $\int_0^{\pi/2} \cos^{16} \theta d\theta$

Answer: use the definition

$$\beta(m, n) \equiv 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m-1} \theta \cos^{2n-1} \theta d\theta = \beta(m, n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Then, in our case $2m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1/2$, and $2n - 1 = 16 \Rightarrow n = 17/2$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \cos^{16} \theta d\theta &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{17}{2}\right)}{2\Gamma(9)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{15}{2} + 1\right)}{2 \times 8!} = \frac{\sqrt{\pi} \frac{15 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{2^8} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2 \times 8!} \\ &= \frac{191305}{196608} \pi = 0.30847 \end{aligned}$$

Example: Evaluate: $\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(2-u^2)}}$

Answer: use the substitution: $x = 1 - u^2$, then

$$dx = -2udu \quad \text{and} \quad du = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$$

And the limit of integration: $u = 0 \Rightarrow x = 1$; $u = 1 \Rightarrow x = 0$

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(2-u^2)}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}}$$

Again use

$$y = x^2 \Rightarrow dy = 2xdx \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x} = -\frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0, \quad x = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4} \int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{-1/2} dy$$

Now, with the values:

$$2m - 1 = -3/4 \Rightarrow m = 1/4, \quad \text{and} \quad 4n - 1 = -1/2 \Rightarrow n = 1/2$$

One gets

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{4} \int_0^1 y^{-3/4}(1-y)^{-1/2} dy = \frac{1}{4} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} = 1.31103$$

With MATHEMATICA

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}\sqrt{(2-u^2)}} du \quad \frac{\text{EllipticK}[\frac{1}{2}]}{\sqrt{2}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}\sqrt{(2-u^2)}} du \quad // \quad \mathbf{N} \quad \mathbf{1.31103}$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{Cos}[u]^{16} du \quad \frac{6435 \pi}{65536}$$

$$\int_0^{\pi/2} \text{Cos}[u]^{16} du \quad // \quad \mathbf{N} \quad \mathbf{0.308474}$$

Homework: evaluate the following integrals and check them with MATHEMATICA.

$$1. \int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx = 4\sqrt{2}\beta\left(3, \frac{1}{2}\right),$$

$$2. \int_0^a x^4 \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{a^6}{2} \beta\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$3. \int_0^2 x^3 \sqrt{8^2-x^2} dx = \frac{8}{3} \beta\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right),$$

2- دالة كرونكر دلتا (Kronecker delta function δ_{ij})

تعرف دالة كرونكر دلتا كالتالي:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \\ 0 & \text{if } m \neq n \end{cases}$$

وتستخدم لتعريف خواص الدوال من التعامد أو العيارية.

مثال: تعد الدالة $\psi_n(r)$ متعامدة أو معيرة إذا حققت الشرط:

$$\int_{\text{all space}} \psi_m^*(r) \psi_n(r) d\tau = \delta_{mn}, \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{if } m = n \text{ معيرة} \\ 0 & \text{if } m \neq n \text{ متعامد} \end{cases} \quad (1)$$

حيث إن الدالة ψ^* هي المرافق المركب للدالة ψ . حيث إن شرط المعاييرة هو $\delta_{ij} = 1$ و شرط التعامد هو $\delta_{ij} = 0$.

مثال: للدالة $\psi = e^{-im\varphi}$ نجد أن:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-im\varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} [\cos(m\varphi) - i \sin(m\varphi)] d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos(0) - i \sin(0)] d\varphi = 2\pi \delta_{m,0} \end{aligned}$$

ومنها أيضا نستطيع تعريف

$$\int_0^{2\pi} e^{-i(m-n)\varphi} d\varphi = 2\pi \delta_{m,n}$$

مثال: تحقق من العلاقات التالية

$$\int_0^a \cos\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{if } m \neq n \\ \frac{a}{2} & \text{if } m = n \neq 0 \\ a & \text{if } m = n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{mn}$$

مثال: لجسيم داخل صندوق مغلق تماماً ، يتحرك في مجال جهد يوصف بالتالي:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

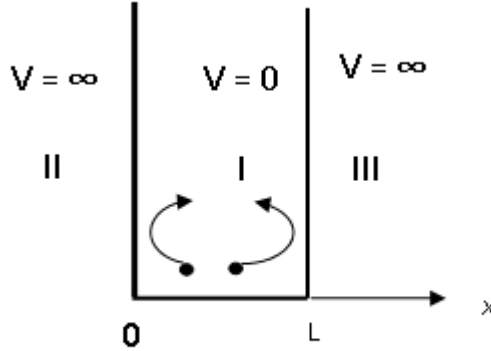
وجد أن الدالة الموجية للجسيم داخل الصندوق تعطى بالعلاقة:

$$\psi_I(x) = A \sin(kx)$$

أوجد الثوابت k و A . العدد k يسمى العدد الموجي حيث يرتبط بالطول الموجي " λ " بالعلاقة $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ، ويرتبط بطاقة

الجسيم " E " بالعلاقة $E = \frac{k^2}{2m}$ ، حيث m هي كتلة الجسيم.

الحل: هذا المثال ينطبق عملياً على حركة إلكترون حر بداخل قطعة معدنية، لها طاقة توتر سطحي يفوق الطاقة الحركية للإلكترون، ومن ثم فإن الإلكترون يتحرك داخل المعدن، ولا يتمكن من الهروب منه، إلا بإعطائه طاقة خارجية. ولحل هذه المسألة نلاحظ من شكل 1 أن حركة الجسيم حرة، ولكنها مقيدة في المدى $0 \leq x \leq L$ حيث إن الجهد $V = \infty$ خارج هذا المدى هو المسؤول عن انعكاس الجسيم من حائل الجهد.



شكل (1) جسيم داخل صندوق مغلق تماماً

أ- لحساب الثابت k استخدم الشرط الحدي $\psi_I(x=L) = 0$ ، بمعنى:

$$\begin{cases} \psi_I(x=L) = 0 \\ A \sin(kL) = 0 \end{cases} \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

حيث n يعرف بأنه عدد كمي. الحل الصفري بالقيمة $n=0$ غير مقبول فيزيائياً حيث لا يدل على وجود جسيم متحرك.

ب- لحساب الثابت A استخدم شرط المعايرة كالتالي:

$$A^2 \int_0^L \sin(k_n x) \sin(k_m x) dx = A^2 \underbrace{\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) dx}_{=\frac{L}{2} \delta_{nm}} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2/L}$$

وتصبح الدالة المميزة على الصورة:

$$\psi_I(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3- دالة الخطأ (Error Function)

تستخدم دالة الخطأ عند دراستنا لتوزيع ماكسويل- بولتزمان الكلاسيكي وتعرف بالعلاقة:

$$\text{erf}(q) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^q e^{-q^2} dq$$

وبالجدول التالي بعض القيم لدالة الخطأ:

q	$\text{erf}(q)$	q	$\text{erf}(q)$
0	0	1.2	0.9103
0.4	0.4284	1.6	0.9763
0.8	0.7421	2.0	0.9953
1.0	0.8427	2.2	0.9981

مثال: احسب عدد الجزيئات لغاز محصور بين سرعتين v و $1.6v$ وسرعته باتجاه المحور السيني فقط.
الحل: عدد الجزيئات التي لها السرعة ما بين v و $1.6v$ يعرف كالتالي:

$$N_{v \rightarrow 1.6v} = \int_v^{1.6v} f(v_x) dv_x$$

حيث دالة ماكسويل- بولتزمان $f(v_x)$ تعرف كالتالي:

$$f(v_x) = \frac{N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{1/2} e^{-m\beta v_x^2/2}$$

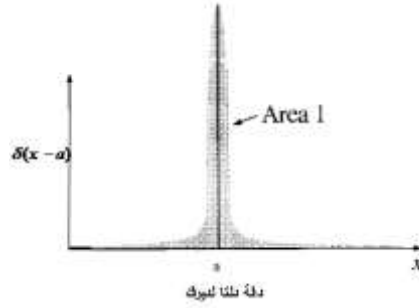
وباستخدام التعويض

$$x = \frac{v_x}{v} \Rightarrow dv_x = v dx,$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned} N_{v \rightarrow 1.6v} &= \frac{N}{\sqrt{\pi}} \int_1^{1.6} e^{-x^2} dx = \frac{N}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1.6} e^{-x^2} dx - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 e^{-x^2} dx \right] \\ &= \frac{N}{2} [\text{erf}(1.6) - \text{erf}(1)] = \frac{N}{2} [0.9763 - 0.8427] = 0.0668 N \end{aligned}$$

4- دالة دلتا لديراك (Dirac Delta Function $\delta(x)$)



هذه ليست دالة بالمعنى المتعارف عليه رياضياً، ولهذا فهي تسمى توزيعاً وأيضاً دالة نبضية (Impulse function). وهي تستخدم للدوال المتصلة وتعرف كالتالي:

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & x \neq a \\ \infty, & x = a \end{cases}, \quad (1)$$

لها الخواص التالية (في بعد واحد):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (2)$$

ومن المعادلة (2) نستطيع حساب التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - a) dx = f(a) \quad (3)$$

وتأخذ الدالة دلتا صوراً وأشكالاً أخرى وسنكتفي بما نعرضه هنا. بعض الخواص الهامة:

☞ $\delta(-x) = \delta(x)$ it is an even function دالة زوجية

☞ $\delta^*(x) = \delta(x)$ it is a real function

☞ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1$ It is normalized صفة المعايرة

☞ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = f(0)$

☞ $f(x) \delta(x - a) = f(a) \delta(x - a)$

☞ $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$

☞ $\frac{d^2|x|}{dx^2} = 2\delta(x)$

مثال: في الإحداثيات الكروية، توجد شحنة Q موزعة بانتظام على سطح قشرة كروية. نجد أن كثافة الشحنات الإحداثيات الكروية $\sigma(r, \theta, \phi)$ تعطى بالعلاقة

$$\sigma(r, \theta, \phi) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R)$$

2- في الإحداثيات الأسطوانية، يوجد توزيع منتظم λ على سطح اسطواني نصف قطرة b . نجد أن كثافة الشحنات في الإحداثيات الأسطوانية $\sigma(s, \phi, z)$ تعطى بالعلاقة:

$$\sigma(s, \phi, z) = \frac{\lambda}{2\pi b} \delta(r - b)$$

واجب منزلي: تحقق من نتائج التكاملات التالية.
ملاحظة: لصيغة ديراك دلتا يجب أن توضع بالصيغة العامة الخطية وهي $\delta(x - a)$. إذا ظهرت بأي صورة أخرى، يجب أن نستخدم التعويض الملائم.

$$a - \int_0^3 x^3 \delta(1 + x) dx = 0 ,$$

Answer: $\delta(1 + x)$ has infinite value at $x = -1$, and this value outside the range $\{0, 3\}$.

الدالة $(1 + x)$ تعني أن $x = -1$ ، والقيمة خارج حدود التكامل وهو $\{0, 3\}$.

$$b - \int_{-2}^2 (2x + 3) \delta(3x) dx = 1 ,$$

Answer: we have to change the variable $y = 3x$, so $dy = 3 dx$, then

$$\int_{-2}^2 (2x + 3) \delta(3x) dx = \int_{-6}^6 (2 \frac{y}{3} + 3) \delta(y) \frac{1}{3} dy , \text{ now } \delta(y) \text{ will be infinite at } y=0 \text{ and it is in the range } \{-6, 6\}, \text{ so } \frac{1}{3} (2 \frac{y}{3} + 3) \Big|_{y=0} = 1$$

الدالة $\delta(3x)$ يجب أن تتحول الى $\delta(y)$ بالتعويض $y = 3x$.

$$c - \int_{-1}^1 x^2 \delta(3x + 1) dx = \frac{1}{27}$$

Answer: we have to change the variable $y = 3x + 1$, so $dy = 3 dx$, then

$$\int_{-1}^1 x^2 \delta(3x + 1) dx = \int_{-5}^7 (\frac{y-1}{3}) \delta(y) \frac{1}{3} dy , \text{ now } \delta(y) \text{ will be infinite at } y=0 \text{ and it is in the range } \{-2, 4\}, \text{ so } \frac{1}{3} (\frac{y-1}{3})^2 \Big|_{y=0} = \frac{1}{27}$$

الدالة $\delta(3x + 1)$ يجب أن تتحول الى $\delta(y + 1)$ بالتعويض $y = 3x$.

Chapter 2

دالة "هيرمت" كثيرة الحدود

(Hermite Polynomials $H_n(x)$)

المعادلة التفاضلية لدالة "هيرمت" Differential equation

$$\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0 \quad (1)$$

تعريف رودريجي Rodrigues' Definition

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}); \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

تعد الدالة $H_n(x)$ زوجية أو فردية إذا كان العدد n يأخذ قيمة زوجية أو فردية بالترتيب:

$$H_n(-x) = (-1)^n H_n(x) \quad (3)$$

دالة مولدة Generating function

$$e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} H_n(x) \quad |t| < 1 \quad (4)$$

علاقات تكرارية Recurrence relations

$$H'_n = \frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}$$

$$(5) \quad \frac{dH_n}{dx} = 2xH_n - H_{n-1}$$

$$H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn} = \sqrt{\pi} 2^n \Gamma(n+1) \delta_{mn} \quad (6)$$

لاحظ هنا وجود الحد e^{-x^2} ، ويسمى معامل اوزان (Weight factor)، والذي يجعل قيمة التكامل قيمة تقاربية (محددة).

جدول لبعض القيم

n	$H_n(x)$	n	$H_n(x)$
0	1	3	$8x^3 - 12x$
1	$2x$	4	$16x^4 - 48x^2 + 12$
2	$4x^2 - 1$	5	$32x^5 - 160x^3 + 120x$

تمثيل الدوال: يمكن تمثيل الدوال (المتصلة والمتقطعة) بدلالة دالة هيرمت كالتالي:
نفترض أن الدالة $f(x)$ يمكن كتابتها بدلالة دالة ليجندر بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n H_n(x)$$

ولإيجاد صيغة للمعاملات c_n نتبع الآتي: بضرب طرفي العلاقة السابقة بالدالة $H_m(x)$ ، وإجراء التكامل، واستخدام علاقة التعامد نجد أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx}_{2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}} = c_n 2^n n! \sqrt{\pi}$$

لنحصل على المعاملات بالشكل:

$$c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) H_m(x) e^{-x^2} dx$$

أمثلة محلولة

مثال 1: باستخدام الدالة المولدة (4) اثبت معادلة هيرمت.
الحل: بدء بالمعادلة

$$g(x, t) = e^{-t^2 + 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} H_n(x)$$

وبالتفاضل بالنسبة إلى t نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x, t) = (-2t + 2x) e^{-t^2 + 2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) n \frac{t^{n-1}}{n!}$$

Expand the terms, and put the generating function in again:

$$-2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

Relabel:

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} n H_{n-1}(x) \frac{t^n}{n!} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}(x) \frac{t^n}{n!}$$

Equating coefficients of t^n :

$$\Rightarrow \boxed{H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)} \quad (n \geq 1)$$

مثال 2: باستخدام الدالة المولدة (4) اثبت أن $H'_n = \frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}$

الحل: بدء بالمعادلة

$$g(x,t) = e^{-t^2+2xt} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{\Gamma(n+1)} H_n(x)$$

وبالتفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial x} g(x,t) = 2t e^{-t^2+2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Stick in g :

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Relabel:

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x) \frac{t^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} H'_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Equating coefficients of t^n :

$$\Rightarrow \boxed{H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)} \quad (n \geq 1)$$

مثال 3: باستخدام العلاقات التكرارية اثبت معادلة هيرمت.

الحل: بدء بالمعادلات

$$\left. \begin{aligned} H_{n+1}(x) &= 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \\ H'_n(x) &= 2nH_{n-1}(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

وبالتفاضل بالنسبة الى x نحصل على

$$H'_{n+1}(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$$

$$2(n+1)H_n(x) = 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) = 0}$$

وهي معادلة هيرمت

يمكن تعريف دالة هيرمت المعدلة كالتالي:

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$$

والتي تحقق علاقة التعامد بالصورة المعدلة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{mn}$$

ومن هنا نحصل على:

$$H_n(x) = e^{x^2/2} \varphi_n(x) \Rightarrow H'_n(x) = x e^{x^2/2} \varphi_n(x) + e^{x^2/2} \varphi'_n(x)$$

$$\Rightarrow H''_n(x) = e^{x^2/2} \varphi''_n(x) + 2x e^{x^2/2} \varphi'_n(x) + (1+x^2) \varphi_n(x)$$

وتصبح معادلة هيرمت بالصورة: $\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2n H_n(x) = 0$

$$\varphi''_n(x) + (1 - x^2 + 2n) \varphi_n(x) = 0$$

نظرة ميكانيكا الكم

للتعامل مع المتذبذب التوافقي الخطي من خلال نظرية ميكانيكا الكم، نجد أن معادلة شرودنجر في بعد واحد تأخذ الصورة:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\psi = 0,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0} \quad (7)$$

حيث $\alpha = m\omega/\hbar$, $\beta = 2mE/\hbar^2$

بالإمكان تبسيط المعادلة (7) وذلك باستخدام التعويض:

$$q = \sqrt{\alpha} x$$

واجب منزلي: باستخدام التعويض $q = \sqrt{\alpha} x$ تأكد من التفاضلات التالية:

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dq} \frac{dq}{dx} = \sqrt{\alpha} \frac{d\psi}{dq}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{d}{dq} \left(\frac{d\psi}{dx} \right) \frac{dq}{dx} = \alpha \frac{d^2\psi}{dq^2}$$

وتتحول المعادلة (7) إلى الصورة المبسطة:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} + (\lambda - q^2)\psi = 0 \quad (8)$$

حيث تم تعريف القيمة المميزة (عديمة الأبعاد) λ بالشكل:

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (9)$$

الحل العام للمعادلة (8) شبيه بالمعادلة $\varphi_n''(x) + (1 - x^2 + 2n)\varphi_n(x) = 0$ ويتحقق فقط لقيم منفصلة للطاقة الكلية تعبر عنها المعادلة:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1,$$

$$\Rightarrow E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

ومن المعادلة (10) نستنتج الآتي:

أ- طاقة المستويات هي طاقة مكمأة، حيث إنها تعتمد على العدد الصحيح n . n تسمى عدد الكم الاهتزازي (Vibrational quantum number).

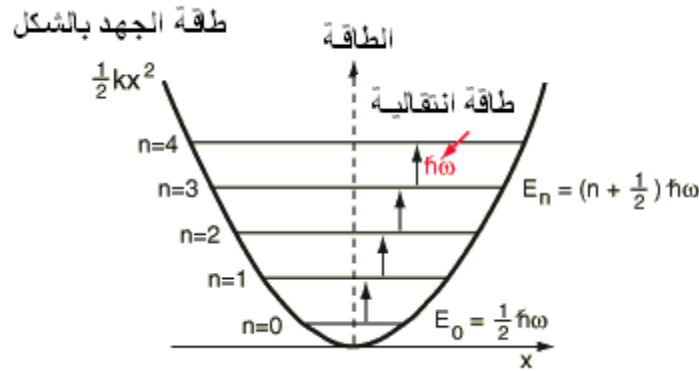
ب- الفروق، ΔE ، بين طاقات المستويات المتتالية تكون متساوية، وتحسب كالتالي:

$$\Delta E = E_{n\pm 1} - E_n = \pm \hbar\omega$$

ج- للعدد $n=0$ فإن الطاقة E_0 (طاقة المستوى الأرضي أو طاقة نقطة الصفر) لا تساوي صفراً، ولكن

$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ ، وهذا لا يتطابق مع نظرية بور. وعدم التطابق له دلالاته الفيزيائية المهمة وهي: أن أقل طاقة

اهتزازية (طاقة المستوى الأرضي) لأي نظام فيزيائي (مثال على ذلك الجزيئات متعددة الذرات أو الذرات بالجوامد) يوصف بجهد المتذبذب التوافقي لا يمكن أن تنعدم حتى عند درجة حرارة الصفر المطلق. لذلك فإن طاقة نقطة الصفر هذه كافية لمنع تجمد سائل الهليوم-4 تحت الضغط الجوي، مهما قلنا من درجة حرارته. وهي مرتبطة بعلاقة هيزنبرج الاتعينية، فإذا كانت طاقة الجسيم معدومة، فإن الجسيم يسكن ومن ثم فإن إحداثيات الجسيم وكميته الحركية الخطية يمكن تعيينهما في آن واحد، وهذا يتعارض مع علاقة عدم التعيين. عملياً يمكن التأكد من أن الطاقة الاهتزازية الصفرية غير منعدمة بواسطة دراسة تشتت الضوء بواسطة البلورات عند تغير درجة الحرارة. والشكل التالي يعبر عن مستويات الطاقة لجهد يعبر عنه بالمعادلة (4).

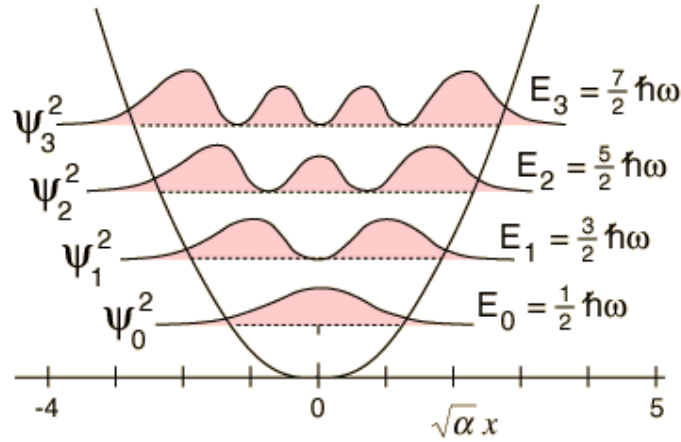


ولكل قيمة n يوجد لها دالة مميزة تعرف بالصورة:

$$\psi_n(q) = N_n e^{-q^2/2} H_n(q), \quad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \quad (11)$$

حيث $H_n(q)$ تسمى دالة هرمت متعددة الحدود. الأربع دوال المميزة الأوائل موضحة بالجدول والشكل التاليين.

n	$\lambda = 2n + 1$	E_n	$\psi_n(q)$
0	1	$\frac{1}{2} \hbar \omega$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}} e^{-q^2/2}$
1	3	$\frac{3}{2} \hbar \omega$	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}} q e^{-q^2/2}$
2	5	$\frac{5}{2} \hbar \omega$	$\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}} (2q^2 - 1) e^{-q^2/2}$
3	7	$\frac{7}{2} \hbar \omega$	$\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{\pi}}} (2q^2 - 3) q e^{-q^2/2}$



المؤثر الدرّجي:
باستخدام الدالة المميزة:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} e^{-x^2/2} H_n(x)$$

بحيث

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

نجد أن تأثير المؤثر $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right)$ على الدالة السابقة يعطي:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) \varphi_n(x) &= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x + \frac{d}{dx} \right) e^{-x^2/2} H_n(x) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(x e^{-x^2/2} H_n(x) - x e^{-x^2/2} H_n(x) + e^{-x^2/2} H_n'(x) \right) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2^{n+1} \sqrt{\pi} n!}} \left(e^{-x^2/2} 2n H_{n-1}(x) \right) = \sqrt{\frac{n}{2^{n-1} \sqrt{\pi} (n-1)!}} \left(e^{-x^2/2} H_{n-1}(x) \right) \\ &= \sqrt{n} \varphi_{n-1}(x) \end{aligned}$$

هذا المؤثر يسمى بالمؤثر الدرّجي (السلمي) التنازلي (أو مؤثر الفناء) حيث أنه يهبط بالدالة المميزة $\varphi_n(x)$ الى الدالة المميزة الأسفل درجة $\varphi_{n-1}(x)$.

واجب منزلي: ادرس تأثير المؤثر $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx} \right)$ على الدالة المميزة $\varphi_n(x)$. هذا المؤثر يسمى بالمؤثر الدرّجي (السلمي) الصاعد (أو مؤثر التخليق) حيث أنه يصعد بالدالة المميزة $\varphi_n(x)$ الى الدالة المميزة الأعلى درجة $\varphi_{n+1}(x)$.

نأتي لسؤال مهم، ألا وهو: لماذا يأخذ المتذبذب التوافقي الكمي قيم صحيحة n ؟ للإجابة على هذا السؤال نعلم أن طاقة المتذبذب التوافقي تأخذ الشكل

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

وأيضاً باستخدام المؤثرات الدرجية وجدنا أننا نستطيع أن نصعد أو نهبط بالدالة المميزة $\varphi_n(x)$ بقيم صحيحة، ولكن لأن لا نجد سبب لماذا قيم صحيحة! السبب هو كالتالي:

حقيقة أن معادلة هيرمت $\frac{d^2 H_n(x)}{dx^2} - 2x \frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0$ لها الحلول لقيم صحيحة n ، ولكن إذا استخدمنا طريقة متسلسلة القوى بالشكل:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots$$

لحل هذه المعادلة نجد الحل التالي:

$$H_n(x) = c_0 \left(1 + \frac{2(-n)}{2!} x^2 + \frac{2^2(-n)(2-n)}{4!} x^4 + \dots \right) + c_1 \left(x + \frac{2(1-n)}{3!} x^3 + \frac{2^2(1-n)(3-n)}{5!} x^5 + \dots \right)$$

حيث أيضاً نتحقق لقيم غير صحيحة n . (وهذه تسمى دالة هيرميت).
لقيم صحيحة n ، نجد أن دالة هيرميت تنقطع وتتوقف لتعطي هيرميت كثيرة الحدود (فردية أو زوجية) تبعاً لقيم n (فردية أو زوجية). لقيم غير صحيحة n ، نجد أن دالة هيرميت لا تتجزأ ولا تتوقف وحدودها تكبر كما الدالة $\phi_n(x) = x^n e^{-x^2/2}$. الدالة المقترحة لا تحقق شروط ميكانيكا الكم.

المتذبذب التوافقي الخطي (حل متعددة الحدود)

تم تعريف الهاملتونيان للمتذبذب التوافقي الخطي بالمعادلة:

$$\frac{d^2 \psi}{dq^2} + (\lambda - q^2) \psi = 0 \quad (1)$$

حيث تم تعريف القيمة المميزة (العدمية الأبعاد) λ بالشكل:

$$\lambda = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2E}{\hbar \omega} \quad (2)$$

وقبل أن نستعرض الحل العام للمعادلة (1) دعونا نتوقف قليلاً لنبحث عن طبيعة الحل التقاربي للدالة ψ ، أي عندما $q \rightarrow \pm \infty$. بوضع $q \rightarrow \pm \infty$ بالمعادلة (1) فإننا يمكننا إهمال المقدار λ وذلك بالمقارنة مع q^2 . وعليه نحصل على المعادلة:

$$\frac{d^2 \psi_{\infty}}{dq^2} - q^2 \psi_{\infty} = 0 \quad (3)$$

التي يمكن وضع حلها بالصورة:

$$\psi_{\infty} = e^{aq^2}$$

ولإيجاد القيمة a نفاضل الدالة مرتين فنجد:

$$\frac{d^2 \psi_{\infty}}{dq^2} = (4a^2 q^2 + 2a) e^{aq^2} \approx 4a^2 q^2 e^{aq^2}$$

ومنها ومن المعادلة (3) نجد أن:

$$a^2 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = \pm \frac{1}{2}$$

ومن ثم نستخلص أن:

$$\psi_{\infty} = ce^{-q^2/2} + de^{+q^2/2}$$

حيث c و d ثابتان اختياريان. الحل ($e^{+q^2/2}$) هو حل مرفوض لأن الشرط $\lim_{q \rightarrow \infty} e^{+q^2/2} = \infty$ لا يحقق شروط ميكانيكا الكم من حيث محدودية الدالة في اللانهاية. لذلك يمكننا وضع المعامل d مساوياً للصفر. وحيث إننا لم نتكلم عن معيارية الدالة فيمكننا وضع المعامل c مساوياً للواحد. من ثم فإن الحل التقاربي للدالة يصبح:

$$\psi_{\infty} = e^{-q^2/2} \quad (4)$$

دعونا نرجع مرةً أخرى للحل العام للمعادلة (1)، الذي سوف نفترضه بالشكل التالي:

$$\psi = \psi_{\infty} H(q) = e^{-q^2/2} H(q) \quad (5)$$

حيث $H(q)$ هي متسلسلة القوى للمتغير q (التي سنعرفها لاحقاً بدالة هرمت متعددة الحدود (Hermit polynomial)). وسوف نوقفها عند حد معين لا نتعداه حتى تحقق شروط ميكانيكا الكم بالنسبة لمحدودية الدالة في اللانهاية.

واجب منزلي: باستخدام $\psi = e^{-q^2/2} H(q)$ أثبت أن

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} = \left[\frac{d^2H(q)}{dq^2} - 2q \frac{dH(q)}{dq} + (q^2 - 1)H(q) \right] e^{-q^2/2}$$

باستخدام المعادلة (5) تصبح المعادلة (1) بالشكل:

$$\frac{d^2H(q)}{dq^2} - 2q \frac{dH(q)}{dq} + (\lambda - 1)H(q) = 0 \quad (6)$$

المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الثانية (6) يمكن حلها حلاً كاملاً، حيث إنها مشابهة لمعادلة هرمت، التي تأخذ الشكل:

$$\frac{d^2H_n(q)}{dq^2} - 2q \frac{dH_n(q)}{dq} + 2n H_n(q) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

وذلك بوضع $H(q) = H_n(q)$ و $\lambda - 1 = 2n$. ومنها نجد:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega} = 2n + 1, \quad (8)$$

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

واجب منزلي: باستخدام المتسلسلات حل المعادلة التفاضلية (6). انظر الحل بالملحق (5.B).

وصلنا الآن إلى هدفنا الأساسي، ونستطيع هنا أن نميز دوال وطاقة المستويات بالرمز n ، الذي يدل على درجة دالة هرمت كثيرة الحدود. أخيراً:

$$\psi_n(q) = N_n e^{-q^2/2} H_n(q), \quad N_n = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

$$E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ملحق (5.B)

حل معادلة هيرمت متعددة الحدود

معادلة هيرمت التفاضلية تُعرف بالشكل:

$$\frac{d^2 H(q)}{dq^2} - 2q \frac{dH(q)}{dq} + (\lambda - 1)H(q) = 0 \quad (1)$$

وتُحل باستخدام متسلسلة القوى كالتالي:

1- نفترض الحل العام بصورة متسلسلة بالشكل:

$$H(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k q^k = e_0 + e_1 q + e_2 q^2 + e_3 q^3 + \dots$$

أ- بإجراء التفاضلات:

$$\frac{dH(q)}{dq} = \sum_{k=0}^{\infty} k e_k q^{k-1} = e_1 + 2e_2 q + 3e_3 q^2 + \dots;$$

$$\frac{d^2 H(q)}{dq^2} = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) e_k q^{k-2} = 2e_2 + 2 \cdot 3e_3 q + 3 \cdot 4e_4 q^2 + \dots$$

ب- بالتعويض من القيم العليا بالمعادلة (1) ومساواة معاملات كل حد من q^m له نفس الدرجة بالصففر، نحصل على العلاقات التالية:

$$2e_2 + (\lambda - 1)e_0 = 0$$

$$2 \cdot 3e_3 + (\lambda - 1 - 2)e_1 = 0$$

$$3 \cdot 4e_4 + (\lambda - 1 - 2 \cdot 2)e_2 = 0$$

.....

وعامةً نصل إلى الحد k نجد العلاقة:

$$(k+1)(k+2)e_{k+2} + (\lambda - 1 - 2k)e_k = 0$$

ومنها نحصل على:

$$e_{k+2} = \frac{\lambda - 1 - 2k}{(k+1)(k+2)} e_k \quad (2)$$

العلاقة التكرارية (Recursion relation) (2)، وتوضح كيف نحصل على قيم المعاملات بمعلومية المعاملات الابتدائية e_0 و e_1 . ويصبح المعاملان e_0 و e_1 ثابتين اختياريين مطلوبين للحل العام للمعادلة (1). يمكننا الآن وضع الحل العام للمعادلة (1) كمجموع متسلسلتين، واحدة تحتوي على الحدود الفردية وأخرى تحتوي على الحدود الزوجية:

$$H(q) = e_0 \left(1 + \frac{e_2}{e_0} q^2 + \frac{e_4}{e_2} \frac{e_2}{e_0} q^4 + \frac{e_6}{e_4} \frac{e_4}{e_2} \frac{e_2}{e_0} q^6 + \dots \right) + e_1 \left(q + \frac{e_3}{e_1} q^3 + \frac{e_5}{e_3} \frac{e_3}{e_1} q^5 + \frac{e_7}{e_5} \frac{e_5}{e_3} \frac{e_3}{e_1} q^7 + \dots \right) \quad (.3)$$

واجب منزلي:

أ- اختبر سلوك الدالة $H(q)$ مع زيادة الدرجة k ، بمعنى أن $k \gg 1$ ، وأثبت أن النسبة

$$\frac{e_{k+2}}{e_k} \rightarrow \frac{2}{k}$$

ب- قارن سلوك الدالة $H(q)$ مع سلوك الدالة $e^{q^2} = 1 + q^2 + \frac{q^4}{2} + \dots + \frac{q^{2k}}{k!} + \dots$ لتثبت أن الدالة $H(q)$ يمكن تمثيلها بالشكل $H(q) \propto e^{q^2}$.

من الواجب المنزلي نجد أن

$$\psi \propto e^{-q^2/2} e^{q^2} \propto e^{q^2/2}$$

وهي دالة تزايدية وغير محددة عندما $q \rightarrow \pm\infty$. هذا يضطرنا إلى وقف المتسلسلات عند حد معين لا نتعداه حتى تحقق الدالة ψ شروط ميكانيكا الكم بالنسبة لمحدوديتها في ما لا نهاية.

العلاقة التكرارية (2) تدلنا على أنه عندما نضع $k = n$ ، بحيث $\lambda = 2n + 1$ ، فإن واحدة من المتسلسلات (3) سوف تتوقف مع e_n ، حيث إن جميع الحدود بدءاً من e_{n+2} سوف تنعدم (أي تتساوى بالصفر). بإمكاننا حذف المتسلسلة الأخرى بوضع $e_0 = 0$ في حالة كون n فردية، أو وضع $e_1 = 0$ في حالة كون n زوجية. ونتيجةً لتوقف المتسلسلات نحصل على قيم الطاقة المميزة بالمعادلة:

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega = (n + \frac{1}{2})h\nu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Series Solutions: Hermite's Equation

Hermite's Equation of order k has the form

$$y'' - 2ty' + 2ky = 0$$

where k is usually a non-negative integer.

We know from the [previous section](#) that this equation will have series solutions which both converge and solve the Differential equation everywhere.

Hermite's Equation is our first example of a differential equation, which has a polynomial solution. As usual, the generic form of a power series is

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

We have to determine the right choice for the coefficients (a_n).

As in other techniques for solving differential equations, once we have a "guess" for the solutions, we plug it into the differential equation. Recall that

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1},$$

and

$$y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}.$$

Plugging this information into the Differential equation we obtain:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - 2t \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} + 2k \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0,$$

or after rewriting slightly:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2k a_n t^n = 0.$$

Next we shift the first summation up by two units:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2k a_n t^n = 0.$$

Before we can combine the terms into one sum, we have to overcome another slight obstacle: the second summation starts at $n=1$, while the other two start at $n=0$.

$$2 \cdot 0 \cdot a_0 \cdot t^0 = 0$$

Evaluate the 0th term for the second sum:

the second summation, if we start at $n=0$ instead of $n=1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n t^n.$$

Thus we can combine all three sums as follows:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n a_n + 2k a_n \right) t^n = 0.$$

Therefore our recurrence relations become:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2n a_n + 2k a_n = 0 \text{ for all } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

After simplification, this becomes

$$a_{n+2} = \frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)} a_n \quad \text{for all } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Let us look at the special case, where $k=5$, and the initial conditions are given as:

$$y(0) = a_0 = 0, \quad y'(0) = a_1 = 1$$

. In this case, all even coefficients will be equal to zero, since $a_0=0$ and each coefficient is a multiple of its second predecessor.

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0.$$

What about the odd coefficients? $a_1=1$, consequently

$$a_3 = \frac{2(1-5)}{2 \cdot 3} = -\frac{4}{3},$$

and

$$a_5 = \frac{2(3-5)}{4 \cdot 5} a_3 = \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{15}.$$

What about a_7 :

$$a_7 = \frac{2(5-5)}{6 \cdot 7} a_5 = 0.$$

Since $a_7=0$, all odd coefficients from now on will be equal to zero, since each coefficient is a multiple of its second predecessor.

$$a_7 = a_9 = a_{11} = a_{13} = \dots = 0.$$

Consequently, the solution has only 3 non-zero coefficients, and hence is a polynomial. This polynomial

$$H_5(t) = t - \frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{15}t^5$$

(or a multiple of this polynomial) is called the **Hermit Polynomial of order 5**.

It turns out that the Hermite Equation of positive integer order k always has a polynomial solution of order k .

We can even be more precise: If k is odd, the initial value problem $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ will have a polynomial solution, while for k even, the initial value problem $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ will have a polynomial solution.

Exercise 1:

Find the Hermit Polynomials of order 1 and 3.

[Answer.](#)

Recall that the recurrence relations are given by

$$a_{n+2} = \frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad \text{for all } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

We have to evaluate these coefficients for $k=1$ and $k=3$, with initial conditions $a_0=0$, $a_1=1$.

When $k=1$,

$$a_3 = \frac{2(1-1)}{2 \cdot 3}a_1 = 0.$$

Consequently all odd coefficients other than a_1 will be zero. Since $a_0=0$, all even coefficients will be zero, too.

Thus

$$H_1(t)=t.$$

When $k=3$,

$$a_3 = \frac{2(1-3)}{2 \cdot 3}a_1 = -\frac{2}{3},$$

and

$$a_5 = \frac{2(3-3)}{4 \cdot 5}a_3 = 0.$$

Consequently all odd coefficients other than a_1 and a_3 will be zero. Since $a_0=0$, all even coefficients will be zero, too. Thus

$$H_3(t) = t - \frac{2}{3}t^3.$$

Exercise 2:

Find the Hermit Polynomials of order 2, 4 and 6.

[Answer.](#)

Recall that the recurrence relations are given by

$$a_{n+2} = \frac{2(n-k)}{(n+2)(n+1)}a_n \quad \text{for all } n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

We have to evaluate these coefficients for $k=2$, $k=4$ and $k=6$, with initial conditions $a_0=1$, $a_1=0$.

When $k=2$,

$$a_2 = \frac{2(0-2)}{1 \cdot 2}a_0 = -2,$$

while

$$a_4 = \frac{2(2-2)}{3 \cdot 4} a_2 = 0.$$

Consequently all even coefficients other than a_2 will be zero. Since $a_1=0$, all odd coefficients will be zero, too.

Thus

$$H_2(t) = 1 - 2t^2.$$

When $k=4$,

$$a_2 = \frac{2(0-4)}{1 \cdot 2} a_0 = -4,$$

$$a_4 = \frac{2(2-4)}{3 \cdot 4} a_2 = \left(-\frac{4}{12}\right) (-4) = \frac{4}{3}$$

$$a_6 = \frac{2(4-4)}{5 \cdot 6} a_4 = 0.$$

Consequently all even coefficients other than a_2 and a_4 will be zero. Since $a_1=0$, all odd coefficients will be zero, too. Thus

$$H_4(t) = 1 - 4t^2 + \frac{4}{3}t^4.$$

You can check that

$$H_6(t) = 1 - 6t^2 + 4t^4 - \frac{8}{15}t^6.$$

Chapter 3

دالة "ليجنر" كثيرة الحدود

(Legendre Polynomials $P_n(x)$)

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left\{ (1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + n(n+1) \right\} y_n(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

لها الحل العام

$$y(x) = A P_n(x) + B Q_n(x)$$

حيث A و B ثوابت. الحل $P_n(x)$ تسمى دالة ليجنر من النوع الأول، وهي دالة منتظمة في المدى $|x| \leq 1$. دالة $Q_n(x)$ ليجنر من النوع الثاني، وهي دالة شاذة (Singular) عند النقاط $x = \pm 1$. ينصب اهتمامنا دائما على الدوال المنتظمة في المدى المطلوب، ولذلك لن نتعامل هنا مع الدالة $Q_n(x)$.

تعريف Definition

أ- علاقة رودريجو Rodrigue's formula

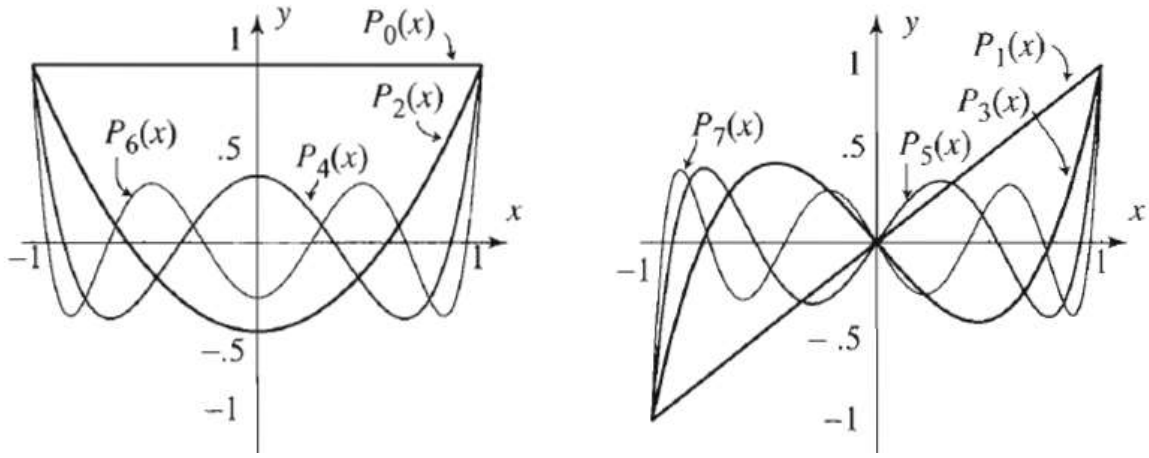
$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ب- علاقة التجميع

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^M (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m}, \quad M = \begin{cases} n/2 & n \text{ is even} \\ (n-1)/2 & n \text{ is odd} \end{cases}$$

جدول لبعض القيم

ℓ	$P_\ell(x \equiv \cos \theta)$	x^ℓ
0	1	P_0
1	x	P_1
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$\frac{1}{3}(2P_2 + 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$	$\frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	$\frac{1}{35}(8P_4 + 20P_2 + 7)$



لاحظ هنا شكل الدوال الزوجية، للقيم $n = 0, 2, 4, \dots$ ، وشكل الدوال الفردية، للقيم $n = 1, 3, 5, \dots$.

دالة مولدة Generating function

$$(1 + 2tx + x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(x); \quad |t| < 1$$

هذا التعريف مشتق من مفكوك القطب الكهربي، وسوف نتعرض له لاحقاً.

علاقات تكرارية Recurrence relations

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x);$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{mn}$$

تمثيل الدوال: يمكن تمثيل الدوال (المتصلة والمتقطعة) بدلالة دالة ليجنر كالتالي:

نفترض أن الدالة $f(x)$ يمكن كتابتها بدلالة دالة ليجنر بالعلاقة:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$$

ولإيجاد صيغة للمعاملات c_n نتبع الآتي: بضرب طرفي العلاقة السابقة بالدالة $P_m(x)$ ، وإجراء التكامل، واستخدام علاقة التعامد نجد أن:

$$\int_{-1}^1 f(x)P_m(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \underbrace{\int_{-1}^1 P_m(x)P_n(x)dx}_{\frac{2}{2n+1} \delta_{mn}} = c_n \frac{2}{2n+1}$$

لنحصل على المعاملات بالشكل:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$$

أمثلة محلولة

مثال: احسب $P_3(x)$ باستخدام علاقة رودريجو .

الحل:

$$\begin{aligned} P_3(x) &= \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^2 - 1)^3 = \frac{1}{2^3 3!} \frac{d^3}{dx^3} (x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1) = \frac{1}{48} (120x^3 - 72x) \\ &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \end{aligned}$$

مثال: احسب $P_1(x)$ و $P_2(x)$ باستخدام علاقة التجميع:

الحل: للقيمة $n=1$ نجد أن $M = \frac{1-1}{2} = 0$ ، بالتالي فان التجميع لحد واحد فقط المرتبط بالقيمة $m=0$.

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1} (-1)^0 \frac{(2)!}{0!(1)!(1)!} x^1 = x$$

للقيمة $n=2$ نجد أن $M = \frac{2}{2} = 1$ ، بالتالي فان التجميع لحدين فقط المرتبطان بالقيم $m=0,1$.

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2^2} \sum_{m=0}^1 (-1)^m \frac{(4-2m)!}{m!(2-m)!(2-2m)!} x^{2-2m} \\ &= \frac{1}{2^2} \overbrace{(-1)^0 \frac{4!}{0!2!2!} x^2}^{m=0} + \frac{1}{2^2} \overbrace{(-1)^1 \frac{(4-2)!}{1!1!0!} x^0}^{m=1} \\ &= \frac{1}{4} 6x^2 + \frac{1}{4} (-1) 2 = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

مثال: ضع الدالة $V(\theta) = \cos(2\theta)$ بدلالة دالة ليجندر.

الحل:

$$V(\theta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1 = 2 \cdot \frac{1}{3} [2P_2 + 1] - 1 = \frac{1}{3} [4P_2 - 1]$$

مثال: ضع الدالة $V(\theta) = \cos(3\theta)$ بدلالة دالة ليجندر.

الحل:

$$\cos(3\theta) = 4\mu^3 - 3\mu = 4 \left[\frac{1}{5} \{2P_3 + 3P_1\} \right] - 3[P_1] = \frac{8}{5} P_3 - \frac{3}{5} P_1$$

مثال: ضع الدالة $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ بدلالة دالة ليجندر.

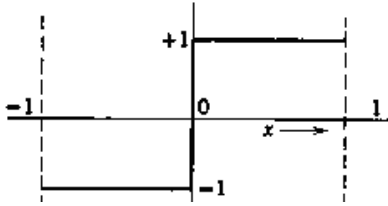
الحل:

$$\begin{aligned} f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 &= \frac{1}{5}(2P_3 + 3P_1) + \frac{1}{3}(2P_2 + P_0) + P_1 + P_0 \\ &= 2\left(\frac{1}{5}P_3 + \frac{1}{3}P_2 + \frac{4}{5}P_1 + \frac{1}{3}P_0\right) \end{aligned}$$

مثال: ضع الدالة غير المستمرة

$$f(x) = \begin{cases} +1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

بدلالة دالة ليجندر.



الحل: باستخدام العلاقة $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x)$ فان المعاملات تحسب كالتالي:

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx = \frac{2n+1}{2} \left[\int_{-1}^0 (-1) P_n(x) dx + \int_0^1 (1) P_n(x) dx \right]$$

حيث أن الدالة المطلوب تمثيلها هي دالة فردية، فننتوقع أن قيم n لدالة ليجندر $P_n(x)$ هي أيضا أرقام فردية. فنحصل على:

$$c_n = (2n+1) \int_0^1 f(x) P_n(x) dx$$

تحقق من القيم

$$c_1 = (2 \times 1 + 1) \int_0^1 x dx = 3 \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{3}{2},$$

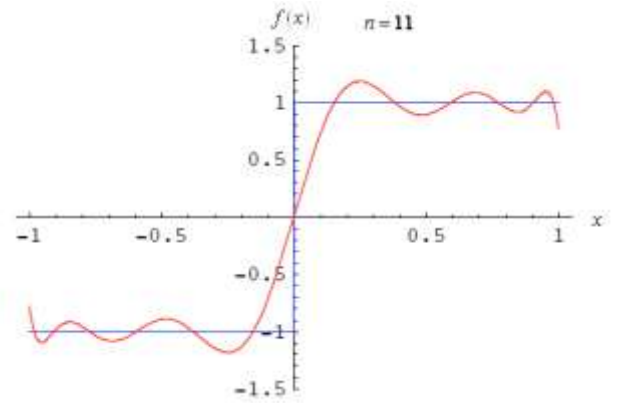
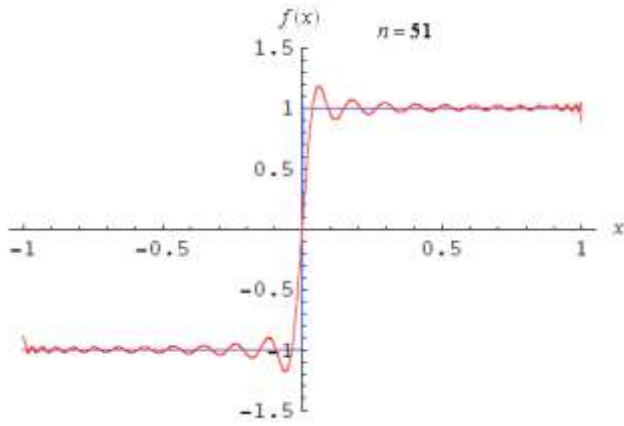
$$c_3 = (2 \times 3 + 1) \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 (5x^3 - 3x) dx = -\frac{7}{8},$$

$$c_5 = ?? = \frac{11}{16}, \dots$$

وتكون النتيجة النهائية هي:

$$f(x) = c_1 P_1 + c_3 P_3 + c_5 P_5 + \dots = \frac{3}{2} P_1 - \frac{7}{8} P_3 + \frac{11}{16} P_5 - \dots$$

باستخدام الكمبيوتر تم رسم الدالة $f(x)$ باستخدام $n = 11, 51$ ومقارنتها بالدالة الحقيقية.



واجب منزلي: ضع الدالة

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & (-1 \leq x \leq 0) \end{cases}$$

بدلالة دالة ليجنדר.
مساعدة: تأكد من القيم التالي:

$$c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$c_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 x^2 dx = \frac{3}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{1}{2}(3x^2 - 1)x dx = \frac{5}{4} \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{16}$$

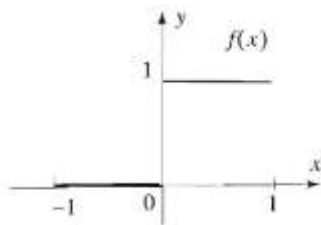


Figure 1 Function in Example 2.

واجب منزلي: ضع الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \leq x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

بدلالة دالة ليجنדר.
مساعدة: تأكد من القيم التالي:

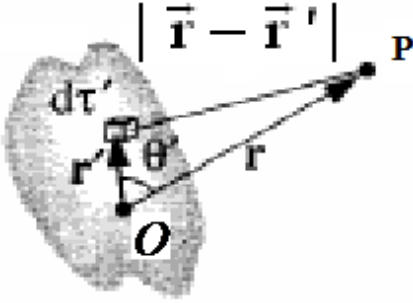
$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 P_0(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 1 dx = \frac{1}{2}$$

$$A_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 P_1(x) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 x dx = \frac{3}{4}$$

$$A_2 = \frac{5}{2} \int_0^1 P_2(x) dx = \frac{5}{2} \int_0^1 \frac{3x^2 - 1}{2} dx = 0$$

$$A_3 = \frac{7}{2} \int_0^1 P_3(x) dx = \frac{7}{2} \int_0^1 \frac{5x^3 - 3x}{2} dx = -\frac{7}{16}$$

مفكوك متعدد القطب الكهربائي



الجهد الكهربائي نتيجة توزيع مركزي للشحنات

يستخدم هذا المفكوك بكثافة في الفيزياء النظرية، على سبيل المثال: لحساب الجهد الكهربائي عند النقطة P، التي تبعد مسافة r عن مركز الشحنات O، الناتج عن شحنات كثافتها الحجمية ρ(r') وتبعد مسافة r' عن المركز كما بالشكل المقابل، والذي يعرف بالمعادلة:

$$\Phi(\vec{r}) = k \int d\vec{\tau}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1)$$

حيث dτ' وحدة الحجم. أو عند التعامل مع ذرات متعددة الإلكترونات، أبسطها ذرة الهيليوم. سوف نستعرض هنا صورة مبسطة لهذا المفكوك.

مثال: اثبت المفكوك التالي:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta'), \quad r \gg r' \quad (2)$$

حيث P_n(cos θ') هي دالة ليجنر متعددة الحدود و θ' هي الزاوية المحصورة بين r و r'. الحل: باستخدام المفكوك والتعويض التاليين:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 - 2rr' \cos \theta' + r'^2 = r^2 \left[1 - 2 \left(\frac{r'}{r} \right) x + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 \right], \quad x = \cos \theta'$$

نجد أن:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2xr' + r'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \varpi}}, \quad r' = \frac{r'}{r}, \quad \varpi = 2xr' - r'^2$$

باستخدام مفكوك ذات الحدين * نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} (1 - \varpi)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{r} \left[1 + \frac{\varpi}{2} + \frac{3\varpi^2}{8} + \frac{5\varpi^3}{16} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[1 + r' x - \frac{r'^2}{2} + \frac{3}{8} (4x^2 + r'^4 - 4xr'^3) + \frac{5}{16} (8r'^3 x^3 + \dots) + \dots \right] \end{aligned}$$

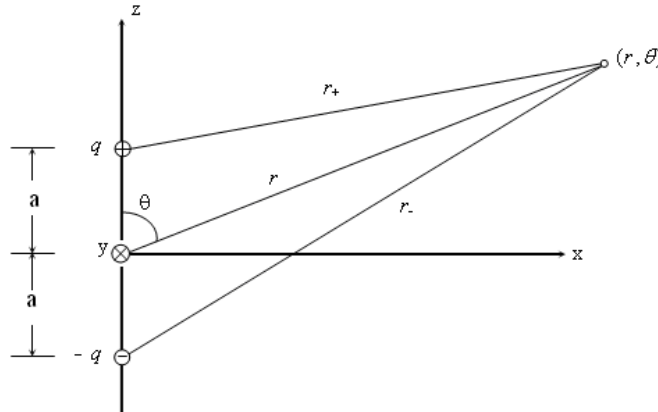
وبتجميع معاملات r' نصل إلى:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \frac{1}{r} \left[1 + x \left(\frac{r'}{r} \right) + \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \left(\frac{r'}{r} \right)^3 + \dots \right] \\ &= \frac{1}{r} \left[P_0(x) + P_1(x) \left(\frac{r'}{r} \right) + P_2(x) \left(\frac{r'}{r} \right)^2 + P_3(x) \left(\frac{r'}{r} \right)^3 + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r'^n}{r^{n+1}} \right) P_n(\cos \theta') \end{aligned}$$

* استخدمنا مفكوك ذات الحدين:

$$(a + x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}x^3 + \dots$$

واجب منزلي: لثنائي القطب الكهربائي كما بالشكل التالي اوجد الجهد عند مسافة r ، $r > a$.
 الحل: يوجد طريقة اخري سهلة لحساب الجهد وذلك عن طريق حسابة على المحور z ومنه نعين الجهد بشكل عام كالتالي:



$$\Phi(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right)$$

First of all, for a point on the z - axis, $z > a$, the potential is

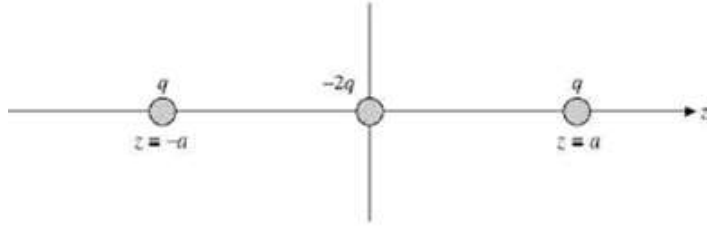
$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{|z-a|} - \frac{1}{z+a} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 z} \left[1 + \left(\frac{a}{z}\right) + \left(\frac{a}{z}\right)^2 + \dots - \left(1 - \left(\frac{a}{z}\right) + \left(\frac{a}{z}\right)^2 \dots \right) \right] \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z} \left[\left(\frac{a}{z}\right) + \left(\frac{a}{z}\right)^3 + \dots \right] \end{aligned}$$

Comparing this with the general expansion $\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$ at $\theta = 0$ we can identify the B_n and write

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\left(\frac{a}{r}\right) P_1(\cos \theta) + \left(\frac{a}{r}\right)^3 P_3(\cos \theta) + \dots \right] \\ \Phi(r, \theta) &\rightarrow \frac{qa}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad \text{as } a \rightarrow 0 \end{aligned}$$

for $r > a$. For $r < a$ we can just swap a and r in this equation.

واجب منزلي: للشكل التالي اوجد الجهد عند مسافة r ، $r > a$.



Linear electric quadrupole.

الحل:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{|\vec{r} + \vec{a}|} - \frac{2q}{\vec{r}} + \frac{q}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right) & \Rightarrow \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \varphi &= \frac{1}{|\vec{r} + \vec{a}|} - \frac{2}{\vec{r}} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \\ \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qa^2 \left(\frac{1 - 3\cos^2 \theta}{r^3} \right) & = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qa^2}{2} P_2(\cos \theta) \end{aligned}$$

On the z axis, the potential is

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{2}{z} + \frac{1}{|z - a|} + \frac{1}{z + a} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \left[-2 + \left(1 + \left(\frac{a}{z} \right) + \left(\frac{a}{z} \right)^2 \dots \right) + \left(1 - \left(\frac{a}{z} \right) + \left(\frac{a}{z} \right)^2 + \dots \right) \right] \\ &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 z} \left[\left(\frac{a}{z} \right)^2 + \left(\frac{a}{z} \right)^4 + \dots \right]. \end{aligned}$$

This result we can immediately infer the expression for the potential at all points:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta) &= \frac{q}{2\pi\epsilon_0 r} \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \left(\frac{a}{r} \right)^4 P_4(\cos \theta) + \dots \right] \\ &= \frac{qa^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} \left[P_2(\cos \theta) + \left(\frac{a}{r} \right)^2 P_4(\cos \theta) + \dots \right] \\ &\rightarrow \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^3} P_2(\cos \theta) \quad \text{as } a \rightarrow 0 \end{aligned}$$

مثال: تم تعيين الجهد $V_0(\theta)$ على سطح كرة مجوفة نصف قطرها R . اوجد الجهد الكهربائي داخل الكرة ($r < R$).

الحل: نظراً للتماثل الكروي لهذه المسألة، فإننا نستطيع استخدام الحل العام لمعادلة لابلاس $\nabla^2 V = 0$ بالشكل:

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_{\ell} r^{\ell} + \frac{B_{\ell}}{r^{\ell+1}} \right) P_{\ell}(\cos \theta)$$

نعتبر المنطقة الداخلية للكرة المجوفة ($r < R$). في هذه المنطقة يجب أن تكون $B_\ell = 0$ ، وإلا أصبح الجهد ما لانهاية بالداخل عند نقطة الأصل $r = 0$. لذلك:

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell r^\ell P_\ell(\cos \theta)$$

باستخدام الشرط الحدودي على سطح الكرة $r = R$ ، نجد أن:

$$V(R, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos \theta) = V_0(\theta)$$

لحساب الثابت A_ℓ ، نستخدم طريقة فوري مع خواص التعامد والعيارية لدالة ليجيندر، بمعنى:

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell \int_0^\pi \underbrace{P_\ell(\cos \theta) P_{\ell'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta}_{\frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'}} = \int_0^\pi P_{\ell'}(\cos \theta) V_0(\theta) \sin \theta d\theta$$

وهذا يعطينا:

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2R^\ell} \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

ولذلك نجد أن:

$$\begin{aligned} V(r, \theta) &= \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell R^\ell P_\ell(\cos \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[\frac{2\ell+1}{2R^\ell} \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] r^\ell P_\ell(\cos \theta) \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2} \left[\int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right] \left(\frac{r}{R} \right)^\ell P_\ell(\cos \theta) \end{aligned}$$

واجب منزلي: أوجد الجهد الكهربائي خارج الكرة ($r > R$). لاحظ هنا أن $A_\ell = 0$ و

$$.B_\ell = \frac{2\ell+1}{2} R^{\ell+1} \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

مثال 2: بالمثال السابق، إذا علم أن $V_0(\theta) = K \cos(3\theta)$ حيث K ثابت.

أ- أوجد الجهد الكهربائي داخل الكرة.

الحل: باستخدام قواعد المثلثات، واستخدام جدول دالة ليجيندر، نجد أن:

$$\cos(3\theta) = 4 \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) = 4\mu^3 - 3\mu$$

$$= 4 \left[\frac{1}{5} \{ 2P_3(\mu) + 3P_1(\mu) \} \right] - 3[P_1] = \frac{8}{5} P_3(\mu) - \frac{3}{5} P_1(\mu)$$

أ- لحساب الجهد الكهربائي داخل الكرة، نحسب أولاً:

$$A_\ell = \frac{2\ell+1}{2R^\ell} \int_0^\pi V_0(\theta) P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

$$= \frac{2\ell+1}{2R^\ell} \int_0^\pi \left[\frac{8K}{5} P_3(\cos \theta) - \frac{3K}{5} P_1(\cos \theta) \right] P_\ell(\cos \theta) \sin \theta d\theta$$

ومن خصائص التعامد لدالة ليجيندر نجد أن قيم ℓ المسموح بها هي 1 و 3. بإجراء التكاملات نجد أن:

$$A_1 = -\frac{3K}{5R}, \quad A_3 = \frac{8K}{5R^3}$$

بالتالي فإن الجهد الكهربائي داخل الكرة هو:

$$V_{\text{ins}}(r, \theta) = -\frac{3K}{5R} r P_1(\mu) + \frac{8K}{5R^3} r^3 P_3(\mu)$$

Chapter 4

الدالة التوافقية الكروية

(Spherical Harmonic Function $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \equiv Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$)

الدالة الوحيدة التي تظهر فيها الزوايا بشكل واضح، وتستخدم في المسائل الفيزيائية المرتبطة بالاحداثيات الكروية. من الملحق الخاص بالاحداثيات الكروية اشتقنا منه المعادلة التفاضلية الخاصة بدالة التوافقيات الكروية.

المعادلة التفاضلية Differential equation

$$\left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \ell(\ell+1) \right] Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = 0 \quad (1)$$

تعريف Definition

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[\frac{(2\ell+1)(\ell-m)!}{4\pi(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_{\ell}^m(\cos \theta) e^{im\varphi}; \quad 0 \leq m \leq \ell$$

$$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{\ell,|m|}^*(\theta, \varphi); \quad m < 0$$

ملاحظة: بعض الكتب لا تستخدم المعامل $(-1)^m$ في التعريف.

جدول لبعض القيم

l	m	ترميز ديراك $ l, m\rangle$	$Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$
0	0	$ 0,0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$ 1,0\rangle$	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	± 1	$ 1,\pm 1\rangle$	$\mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
2	0	$ 2,0\rangle$	$\sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3\cos^2 \theta - 1)$
2	± 1	$ 2,\pm 1\rangle$	$\mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \theta \sin \theta e^{\pm i\varphi}$
2	± 2	$ 2,\pm 2\rangle$	$\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\varphi}$

واجب منزلي: تحقق من العلاقة:

$$Y_{l,0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta)$$

مثال: أوجد التمثيل التوافقي الكروي للدالة $\psi = x + iy$.

الحل:

$$\psi = x + iy = r \sin\theta (\cos\varphi + i \sin\varphi) = r \sin\theta e^{i\varphi} = -\sqrt{\frac{8\pi}{3}} r Y_{1,1}$$

مثال: أوجد التمثيل الكرتيزي للدالة $Y_{3,0}$. تذكر أن $[z = r \cos\theta]$.

الحل:

$$\begin{aligned} Y_{3,0} &= \sqrt{\frac{7}{4\pi}} P_3(\cos\theta) = \sqrt{\frac{7}{4\pi}} \frac{1}{2} (5\cos^3\theta - 3\cos\theta) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \cos\theta (5\cos^2\theta - 3) \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \frac{z}{r} (5\frac{z^2}{r^2} - 3) = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{7}{\pi}} \frac{z}{r^3} (5z^2 - 3r^2) \end{aligned}$$

علاقة التعامد Orthogonality relation

$$\langle \ell m | \ell' m' \rangle = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{\ell,m}^*(\theta, \varphi) Y_{\ell',m'}(\theta, \varphi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

مثال: تحقق من عيارية الدالة $\psi = Y_1^1(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$.

الحل: المطلوب هو اثبات أن:

$$M = \int \psi^* \psi d\Omega$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_1^1(\theta, \phi)^* Y_1^1(\theta, \phi) d\Omega = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_1^1(\theta, \phi)^* Y_1^1(\theta, \phi) d\phi = 1$$

فلنتحقق من هذا بإجراء التكامل:

$$M = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_1^1(\theta, \phi)^* Y_1^1(\theta, \phi) d\phi = \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{-i\phi} \right) \left(\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi} \right) d\phi$$

$$= \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi \sin\theta \sin^2\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -\frac{3}{8\pi} \times 2\pi \int_0^\pi \sin^2\theta d\cos\theta$$

$$= -\frac{3}{4} \int_0^\pi (1 - \cos^2\theta) d\cos\theta = -\frac{3}{4} \left[\cos\theta - \frac{1}{3} \cos^3\theta \right]_0^\pi = -\frac{3}{4} (-1 - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) = -\frac{3}{4} (-\frac{4}{3}) = 1$$

وهذا هو المطلوب اثباته.

مثال: احسب القيمة المتوسطة $\langle Y_1^1(\theta, \phi) | \hat{L}_y | Y_1^1(\theta, \phi) \rangle$ حيث:

$$\hat{L}_y = -i\left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}\right) = -i\left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right)$$

الحل: تحسب القيمة المتوسطة كالتالي:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L}_y \rangle &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_1^1(\theta, \phi)^* \hat{L}_y Y_1^1(\theta, \phi) d\phi \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Y_1^1(\theta, \phi)^* \left[-i\left(\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi}\right)\right] Y_1^1(\theta, \phi) d\phi = ?? \end{aligned}$$

ملاحظة: من الصعب حساب التكامل بصورته النهائية، لذلك نلجأ الى استخدام المؤثرات السلمية (الدرجية) $\langle \hat{L}_\pm \rangle$.

علاقات تكرارية Recurrence relations

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \left[\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right]^{1/2} Y_{\ell+1, m}(\theta, \phi) + \left[\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right]^{1/2} Y_{\ell-1, m}(\theta, \phi) \\ \sin \theta Y_{\ell, m}(\theta, \phi) &= \left[\frac{(\ell+1-m)(\ell+2-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right]^{1/2} Y_{\ell+1, m-1}(\theta, \phi) + \left\{ \left[\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right]^{1/2} Y_{\ell-1, m-1}(\theta, \phi) \right\} e^{i\phi} \end{aligned}$$

مثال: للدالة $Y_{1,0}(\theta, \phi)$ تحقق من صحة العلاقة التالية:

$$\cos \theta Y_{\ell, m}(\theta, \phi) = \left[\frac{(\ell+1+m)(\ell+1-m)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right]^{1/2} Y_{\ell+1, m}(\theta, \phi) + \left[\frac{(\ell+m)(\ell-m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right]^{1/2} Y_{\ell-1, m}(\theta, \phi);$$

وذلك باستخدام طريقتين مختلفتين.

الحل: الطرف الأيسر يحسب من العلاقة التعريفية كالتالي:

$$\begin{aligned} \cos \theta Y_{1,0}(\theta, \phi) &= \left[\frac{(1+1+0)(1+1-0)}{(2 \times 1 + 1)(2 \times 1 + 3)} \right]^{1/2} Y_{2,0}(\theta, \phi) + \left[\frac{(1+0)(1-0)}{(2 \times 1 + 1)(2 \times 1 - 1)} \right]^{1/2} Y_{0,0}(\theta, \phi) \\ &= \left[\frac{4}{15} \right]^{1/2} Y_{2,0}(\theta, \phi) + \left[\frac{1}{3} \right]^{1/2} Y_{0,0}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

الطرف الأيسر يحسب باستخدام الجدول كالتالي:

$$\begin{aligned} \cos \theta (Y_{1,0}(\theta, \phi)) &= \cos \theta \left(\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta \right) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos^2 \theta, \quad \cos^2 \theta = \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{2,0}(\theta, \phi) + 1 \right) \\ &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{1}{3} \left(\sqrt{\frac{16\pi}{5}} Y_{2,0}(\theta, \phi) + 1 \right) = \left[\frac{4}{15} \right]^{1/2} Y_{2,0}(\theta, \phi) + \left[\frac{1}{3} \right]^{1/2} Y_{0,0}(\theta, \phi) \end{aligned}$$

مثال: أوجد التمثيل التوافقي الكروي للدالة الموجية:

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x \pm iy}{r} \right)$$

الحل: استخدم التحويلات

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

نجد:

$$\psi = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{x \pm iy}{r} \right) = \sin \theta \cos \varphi \pm i \sin \theta \sin \varphi = \sin \theta e^{\pm i\varphi} = \mp \sqrt{\frac{8\pi}{3}} Y_{1,\pm 1}$$

مثال: أوجد التمثيل التوافقي الكروي للدالة الموجية:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{z - iy}{r} \right)$$

الحل: استخدم التحويلات

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

نجد:

$$\psi(x, y, z) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{z - iy}{r} \right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta \left(\frac{2i \sin \varphi}{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} + \frac{1}{2} Y_{1,1} + \frac{1}{2} Y_{1,-1}$$

Another method

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \left(\frac{z - iy}{r} \right) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{z}{r} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{iy}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{iy}{r} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x}{r} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x + iy}{r} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x - iy}{r} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} Y_{1,0} + \frac{1}{2} Y_{1,1} + \frac{1}{2} Y_{1,-1} \end{aligned}$$

In ket notation:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1}{2} |1,1\rangle + \frac{1}{2} |1,-1\rangle$$

$$|\psi\rangle^* = \langle\psi| = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1,0| + \frac{1}{2} \langle 1,1| + \frac{1}{2} \langle 1,-1|$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \frac{1}{2} \langle 1,0|1,0\rangle + \frac{1}{4} \langle 1,1|1,1\rangle + \frac{1}{4} \langle 1,-1|1,-1\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \checkmark$$

مثال: أوجد التمثيل التوافقي الكروي للدالة الموجية:

$$\psi(x, y, z) = C(xy + yz + zx)e^{-ar^2}$$

الحل: استخدم التحويلات

$$z = r \cos \theta, \quad x = r \sin \theta \cos \varphi \quad y = r \sin \theta \sin \varphi$$

نجد أن:

$$xy + yz + zx = r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi \cos \varphi,$$

والتعويضات التالية:

$$\sin^2 \theta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{4i} \sin^2 \theta (e^{2i\varphi} - e^{-2i\varphi}) \Rightarrow xy = \frac{r^2}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,2} - Y_{2,-2}),$$

$$\sin \theta \cos \varphi \sin \varphi = \frac{1}{2i} \sin^2 \theta (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) \Rightarrow yz = \frac{r^2}{2i} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (-Y_{2,1} + Y_{2,-1}),$$

$$\sin \theta \cos \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \Rightarrow zx = -\frac{r^2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} (Y_{2,1} - Y_{2,-1}),$$

نجد:

$$\psi(x, y, z) = C \frac{r^2}{2} \sqrt{\frac{8\pi}{15}} \left[\frac{1}{i} (Y_{2,2} - Y_{2,-2}) + \frac{1}{i} (-Y_{2,1} + Y_{2,-1}) - (Y_{2,1} - Y_{2,-1}) \right] e^{ar^2}$$

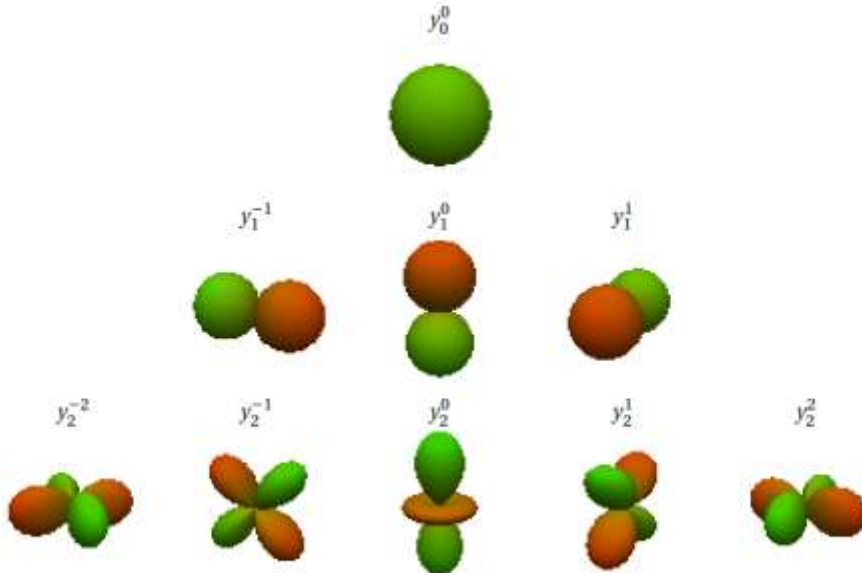
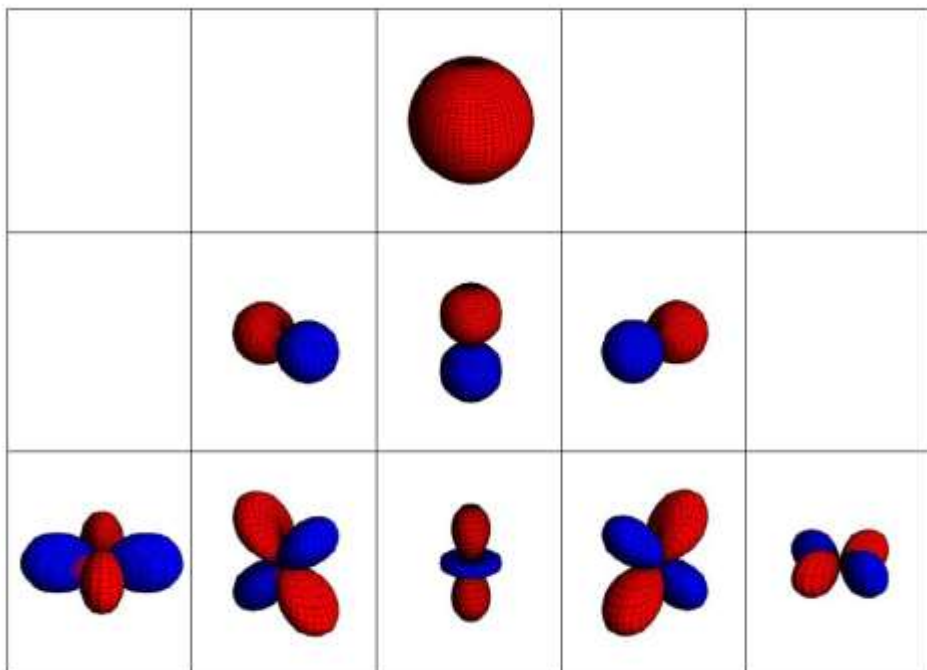


Figure B.1: Plots of the real-valued spherical harmonic basis functions. Green indicates positive values and red indicates negative values.



واجب منزلي:
1- تحقق من العلاقات التالية:

$$a) \sin \theta \cos \varphi = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [-Y_{1,1} + Y_{1,-1}]$$

$$b) \sin^2 \theta \cos 2\varphi = \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [Y_{2,2} + Y_{2,-2}]$$

$$c) xz = r^2 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [-Y_{2,1} + Y_{2,-1}]$$

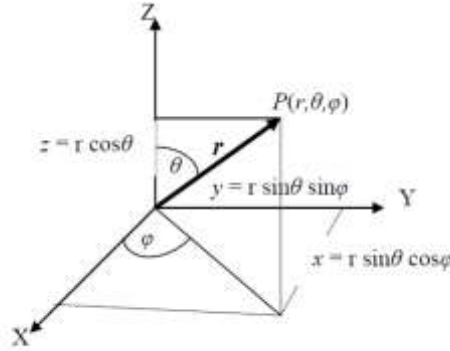
$$d) x^2 - y^2 = r^2 \sqrt{\frac{8\pi}{15}} [Y_{2,2} + Y_{2,-2}]$$

$$e) xy = \frac{r^2}{i} \sqrt{\frac{2\pi}{15}} [-Y_{2,2} + Y_{2,-2}]$$

$$f) y = ir \sqrt{\frac{2\pi}{3}} [Y_{2,2} - Y_{2,-2}]$$

ملحق الإحداثيات القطبية الكروية Spherical Coordinate system

يوجد العديد من المسائل الفيزيائية التي يتطلب حلها استخدام الإحداثيات الكروية. لذلك سوف نلقي نظرة عابرة على هذه الإحداثيات.



شكل (1) الإحداثيات القطبية الكروية

في الإحداثيات القطبية الكروية، تستخدم الزاويتان θ , φ في تحديد موقع النقطة P على سطح كرة نصف قطرها r (انظر الشكل 1) بحيث إن: $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. من الشكل نجد أن:

زاوية السمات الرأسية θ (Zenith angle) تعرف بالعلاقة: $\cos \theta = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ وتتغير من 0 إلى π ،

وزاوية السمات φ (Azimuthal angle) تعرف بالعلاقة: $\tan \varphi = \frac{y}{x}$ وتتغير من 0 إلى 2π .

يمكن ربط العلاقات الثلاث وعكسها في الإحداثيات القطبية الكروية والكرتيزية كالتالي:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & |\mathbf{r}| &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, & \theta &= \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ z &= r \cos \theta, & \varphi &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

وعنصر الحجم هو $d\tau = r^2 dr d\Omega$ حيث تأخذ r القيم من 0 إلى ∞ وتعرف $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ بالزاوية المجسمة. واجب منزلي: من العلاقات (1) أثبت التفاضلات التالية:

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \sin \theta \cos \varphi$	$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta}$	$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -y$
$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin \theta \sin \varphi$	$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta}$	$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = x$

$\frac{\partial r}{\partial z} = \cos \theta$	$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin \theta}{r}$	$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$
---	---	---	---

Classical Mechanics	Quantum Mechanics
$L_x = yp_z - zp_y;$	$\hat{L}_x = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$
$L_y = zp_x - xp_z;$	$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$
$L_z = xp_y - yp_x;$	$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$
$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2;$	$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$

مقارنة بين كمية الحركة الزاوية المدارية الكلاسيكية والكمية

مثال: أثبت العلاقة:

$$\hat{L}_z \equiv -i \frac{\partial}{\partial \varphi} = -i \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

واجب منزلي: تحقق من الحسابات التالية:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2},$$

ومنها أثبت أن

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}$$

واجب منزلي: أثبت العلاقات الآتية

$$\begin{aligned}
\hat{L}_x &= -i \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = i \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
\hat{L}_y &= -i \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = i \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \\
\hat{L}^2 &= \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] \\
\hat{L}_{\pm} &\equiv \hat{L}_x \pm i \hat{L}_y = \pm e^{\pm i \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \pm i \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]
\end{aligned} \tag{2}$$

قيمة \hat{L}^2 بالمعادلة (2) مهمة جداً وخصوصاً عند استخدامها بمعادلة شرودنجر:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{1}{2} \nabla^2 + V(r),$$

حيث يأخذ المؤثر لابلاسان ∇^2 في الإحداثيات القطبية الكروية الشكل التالي:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2}.$$

وتأخذ معادلة شرودنجر (باستخدام الوحدات الذرية) الصورة:

$$\hat{H} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\hat{L}^2}{2r^2} + V(r) \right] \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$$

ونجد أن الدالة الكلية تأخذ الشكل:

$$\Psi_{nlm} \equiv \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

حيث $R_{n,\ell}(r)$ تعرف بأنها الجزء القطري للدالة و $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$ تعرف بأنها الدالة التوافقية الكروية (سوف يتم تعريفها لاحقاً).

طريقة فصل المتغيرات

دعونا نبدأ بمعادلة لابلاسان التفاضلية في الإحداثيات الكروية وهي بالشكل:

$$\bar{\nabla}^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rV) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0 \tag{1}$$

والتي يمكننا حلها بطريقة فصل المتغيرات وذلك باستخدام التعويض التالي:

$$V(r, \theta, \varphi) = \mathfrak{R}(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta \left[\frac{r^2}{\mathfrak{R}} \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0$$

ومن هنا نحصل على ثلاث معادلات تفاضلية وهم:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \mathfrak{R} = 0 \quad \text{معادلة قطرية (Radial equation)} \quad (i)$$

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + b^2 = 0 \quad \text{(Azimuthal equation)} \quad (ii)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \left\{ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \Theta = 0 \quad \text{معادلة زاوية (Angular equation)} \quad (iii)$$

للتأكد من صحة الحلول العامة للمعادلات التفاضلية يتم التعويض بكل حل على حدة بالمعادلة الخاصة به.

I. المعادلة (i) لها الحل القطري البسيط:

$$\mathfrak{R}(r) = Ar^\ell + \frac{B}{r^{\ell+1}}$$

حيث A و B هي ثوابت اختيارية يمكن إيجادها من الشروط الحدودية.

II. المعادلة (ii) يمكن التعامل معها كالتالي:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -b^2 \Phi \quad (1)$$

حيث b قيمة ثابتة. حل (1) هو:

$$\Phi(\varphi) = |\Phi\rangle = C e^{\pm ib\varphi} \quad (2)$$

حيث C هو ثابت اختياري ويحسب بواسطة معايرة الدالة $|\Phi\rangle$.

ملاحظات:

أ- الدالة (2) غير مناسبة للاستخدام الفيزيائي؛ وذلك لأننا لو غيرنا الزاوية φ بمقدار 2π فإننا سنعود لنفس النقطة، وهذا يعني أن الدالة تكرارية القيم.

ب- لكي تصبح الدالة غير تكرارية القيم يجب أن نحصرها في المدى $\varphi = \{0, 2\pi\}$ ونستخدم العلاقة:

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

ومن ثم فإن الشرط:

$$C e^{ib\varphi} = C e^{ib\varphi} e^{ib2\pi} \Rightarrow e^{ib2\pi} = 1$$

ولكي يتحقق الشرط $e^{ib2\pi} = 1$ فإن:

$$2\pi(b) = 2\pi m,$$

$$\Rightarrow b = m \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

وأخيراً نجد أن:

$$|\Phi\rangle = C e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5)$$

ج- من المعادلة (5) نلاحظ أن القيم m هي قيم مميزة للمؤثر $\hat{L}_z \equiv -i \frac{\partial}{\partial \varphi}$ ، حيث $\hat{L}_z |\Phi\rangle = m |\Phi\rangle$ ، وهي قيم مكممة

(قيم منفصلة)، ويسمى m بالعدد الكمي المغناطيسي.

لحساب قيم A ، نستخدم خواص المعاييرة:

$$\langle \Phi | \Phi \rangle = \int_0^{2\pi} (C e^{im\phi})^* (C e^{im\phi}) d\phi = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

III. المعادلة (iii) يمكن تبسيطها باستخدام التعويض التالي:

$$\mu = \cos \theta, \quad \mu \in [-1, 1]$$

with Azimuthal symmetry $m = 0$, and using the definition $\mu = \cos \theta$, to prove that:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} &= -\sin \theta \frac{d}{d\mu} = -(1-\mu^2) \frac{d}{d\mu}, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) &= (1-\mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\mu} \left((1-\mu^2) \frac{d}{d\mu} \right) \end{aligned}$$

This implies that the function P satisfies the equation

$$\frac{d}{d\mu} \left((1-\mu^2) \frac{dP_\ell(\mu)}{d\mu} \right) = -\ell(\ell+1)P_\ell(\mu)$$

(We now have P_ℓ since for every ℓ we will have a different function.). The last equation is the **Legendre** equation, and its solutions are the **Legendre polynomials** $P_m(\mu \equiv \cos \theta)$.

لنصل للمعادلة التفاضلية:

$$\left[\frac{d}{dx} \left\{ (1-x^2) \frac{d}{dx} \right\} + \left\{ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right\} \right] \Theta_{\ell,m}(\theta, \varphi) = 0$$

المعادلة التفاضلية الأخيرة هي معادلة "ليجنדר" المرافقة وحلها يعطي دالة "ليجنדר" المرافقة كثيرة الحدود، وسيتم تعريفها والتعامل معها بالصفحة التالية.

ملاحظة مهمة: الآن يمكن وضع الحل العام لمعادلة لابلاس التفاضلية بالصورة:

$$V(r, \theta, \varphi) = \sum_m \sum_\ell \left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} \right) \Theta_{\ell,m}(\theta, \varphi)$$

Chapter 5

دوال "بيسيل" (Bessel Functions)

دوال "بيسيل" من النوع الأول والثاني (Bessel functions of the First and second kind $J_\ell(x)$, $N_\ell(x)$)

المعادلة التفاضلية Differential equation
معادلة بيسيل التفاضلية من الدرجة الثانية:

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \ell^2) \right] y(x) = 0, \quad \ell \geq 0 \quad (1)$$

حلها العام من الدرجة ℓ هو:

$$y(x) = A J_\ell(x) + B N_\ell(x)$$

حيث A و B ثوابت. الحل الأول $J_\ell(x)$ يسمى دالة بيسيل من النوع الأول، وهي دالة منتظمة في المدى $\{0, \infty\}$. الحل الثاني $N_\ell(x)$ هو دالة بيسيل من النوع الثاني وتسمى دالة نيومان، وهي دالة شاذة (Singular) لها القيمة $-\infty$ عند نقطة الأصل $x = 0$. ينصب اهتمامنا دائما على الدوال المنتظمة في المدى المطلوب.

تعريف النوع الأول Definition of the first kind

$$J_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell+2k};$$

$$J_{-\ell}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell+2k}$$

$$J_{-\ell}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

إذا كانت $\ell \neq 0, 1, 2, \dots$ نجد أن الدوال $J_\ell(x)$ و $J_{-\ell}(x)$ هي دوال مستقلة، وتكون الدوال $J_\ell(x)$ محدودة عند نقطة الأصل، بينما تكون الدوال $J_{-\ell}(x)$ غير محدودة.

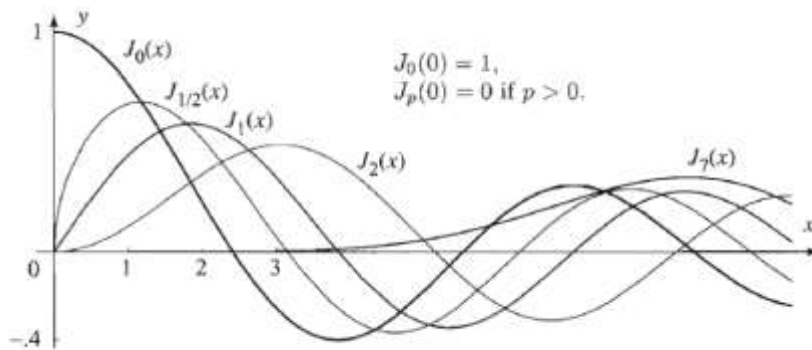


Figure 1 Graphs of $J_p(x)$ for $p = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 7$.

$$1- J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$2- J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 3} + \dots$$

3-

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1! \Gamma(\frac{5}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2! \Gamma(\frac{7}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}} + \dots \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x) \end{aligned}$$

تحقق من الحلول التالية من النوع الأول فقط:

$$1- \text{ the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \left\{ x^2 - \frac{1}{9} \right\} y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$$

$$2- \text{ the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_0(x)$$

$$3- \text{ the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \{x^2 - 1\} y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_1(x)$$

دالة مولدة Generating function

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^{\ell} J_{\ell}(x)$$

بعض من العلاقات التكرارية Recurrence relations

$$J_{\ell+1}(x) = \frac{2n}{x} J_{\ell}(x) - J_{\ell-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} J_{\ell}(x) = \frac{1}{2} \{ J_{\ell-1}(x) - J_{\ell+1}(x) \}$$

ℓ	$J_\ell(x)$	$J_{-\ell}(x)$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$
$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\cos x}{x} + \sin x \right]$
$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3}{x} \sin x \right\}$

تعريف النوع الثاني Definition of the second kind
النوع الثاني من الدرجة ℓ تسمى دوال نيومان، والتي تعرف كالتالي:

$$N_\ell(x) = Y_\ell(x) = \frac{1}{\sin(\ell\pi)} [J_\ell(x) \cos(\ell\pi) - J_{-\ell}(x)]$$

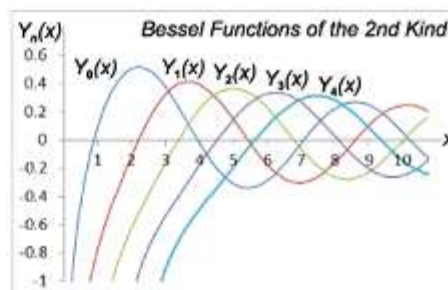
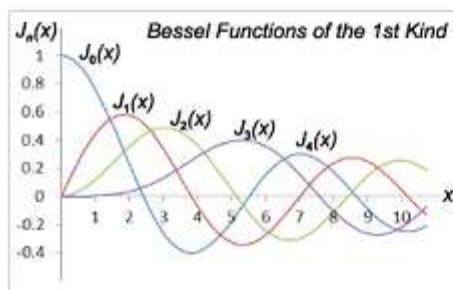
$$= \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \frac{x}{2} + 2\gamma - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k} \right] J_\ell(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(\ell-k+1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\ell+2k}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\ell)! k!} \left\{ \sum_{r=1}^k \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+\ell} \right) \right\} \left(\frac{x}{2} \right)^{\ell+2k}$$

$$N_{-\ell}(x) = (-1)^\ell N_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

ولها القيمة $-\infty$ عند نقطة الأصل. الرمز γ هو ثابت "أويلر" ويعطى بالقيمة:

$$\gamma = 0.5772156649 = -\psi(1); \quad \psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$$



1- $x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 2)y = 0$. Ans: $y(x) = C_1 J_{\sqrt{2}}(\sqrt{3}x) + C_2 Y_{\sqrt{2}}(\sqrt{3}x)$,

2- The *Airy differential equation* known in astronomy and physics has the form:

$$y'' - xy = 0$$

It can be also reduced to the Bessel equation. Its solution is given by the Bessel functions of the fractional order

$$\pm \frac{1}{3}.$$

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} \right) + C_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} i x^{\frac{3}{2}} \right).$$

التجميعات التالية:

$$H_{\ell}^{(1)} = J_{\ell}(x) + iN_{\ell}(x)$$

$$H_{\ell}^{(2)} = J_{\ell}(x) - iN_{\ell}(x)$$

تسمى دوال "هنكل" من النوع الأول والثاني بالترتيب.

دوال "بيسيل" الكروية (Spherical Bessel Functions $j_{\ell}(x)$, $n_{\ell}(x)$)

بمعادلة بيسيل وللقيم $n = \ell + \frac{1}{2}$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) لو استخدمنا التعويض $f(x) = y(x)/\sqrt{x}$ سنحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] f(x) = 0$$

وتسمى معادلة بيسيل الكروية والحل العام لها هو:

$$f(x) = A_{\ell} j_{\ell}(x) + B_{\ell} n_{\ell}(x),$$

حيث A_{ℓ} و B_{ℓ} ثوابت اختيارية. معادلة بيسيل الكروية شبيهة بمعادلة شرودنجر في حالة انعدام الجهد، و $x = kr$ ، حيث k هو العدد الموجي.

تعرف دوال بيسيل الكروية كالتالي:

$$j_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = (-x)^{\ell} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

وتعرف دوال نيومان الكروية كالتالي:

$$n_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = -(-x)^{\ell} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \left(\frac{\cos x}{x} \right)$$

جدول لبعض القيم

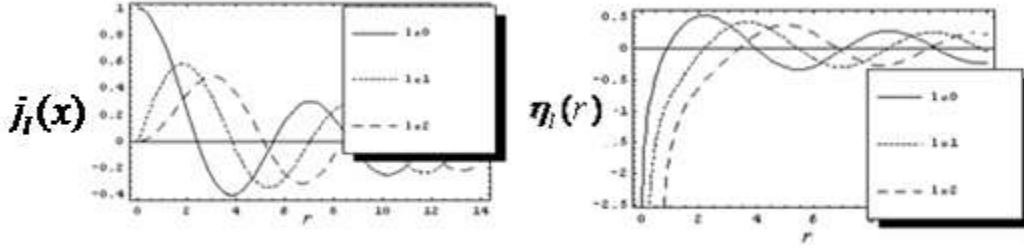
ℓ	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
0	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$
1	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$
2	$\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$	$-\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$

السلوك التقاربي عندما $x \rightarrow 0$ و $x \rightarrow \infty$ هو

الشرط	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
$x \rightarrow 0$	$\frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}$	$\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}$
$x \rightarrow \infty$	$\frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$	$-\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$

حيث $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)(2\ell-1)(2\ell-3)\dots 4\cdot 3\cdot 1$

الشكل التالي يوضح الدالتين $j_\ell(r)$ و $\eta_\ell(r)$ لقيم مختلفة للمسافة r .



و تعرف أيضاً دوال هنكل الكروية كالتالي:

$$h_\ell^{(1)} = j_\ell(x) + in_\ell(x)$$

$$h_\ell^{(2)} = j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

الجهود المتماثلة كروياً

يقال عن طاقة الجهد $V(r)$ بأنها متماثلة كروياً (Spherically symmetric) إذا كانت $V(r)$ لا تتغير بالدوران (Rotationally invariant)، ولهذا فإن $V(r)$ تعتمد فقط على المسافة $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ من مركز القوة، والتي ستختار كنقطة أصل للإحداثيات. من ثم فإن الأسطح المتساوية في الجهد تتكون من سطوح كرات مركزية (قشرة Shell) تبعد عن المركز بالمسافة الثابتة $|r| = \text{constant}$. ومميزات الجهد المركزي هي:

- 1- إن كمية الحركة المدارية L له تكون محفوظة (ثابتة)،
- 2- منه نستطيع تعريف القوة المركزية بالمعادلة:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{r}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

أ- اختزال (تبسيط) مسألة القوى المركزية:

لجسيم كتلته μ يتحرك في مجال قوة مركزية نجد أن الهملتونيان يعرف له كالتالي:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{P^2}{2\mu} + V(r)$$

وله صفة التبادل مع مؤثرات كمية الحركة المدارية، على سبيل المثال:

$$[\hat{H}, \hat{L}] = [\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

وحيث إن:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

لذلك فإن المؤثرات \hat{H} و \hat{L}_z ، \hat{L}^2 يصبح لهن دالة مميزة مشتركة. دعونا نعرف الدالة في الإحداثيات الكروية بالشكل

التالي:

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

ومنها نجد أن معادلة شرودنجر (راجع ذرة الهيدروجين) تصبح:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \Psi = E \Psi$$

وتأخذ المعادلة القطرية الشكل:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r)$$

وهي معادلة تفاضلية مبنية على فصل المتغيرات للمؤثر ∇^2 (ويُدعى لابلاسيان) في الإحداثيات الكروية. من الملائم أيضاً أن نستخدم التعويض التالي:

$$u(r) = rR(r)$$

لنجد أن $u(r)$ تحقق المعادلة القطرية:

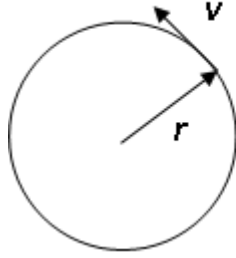
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] u = Eu$$

وهي متطابقة في الصيغة مع معادلة شرودنجر ذات البعد الواحد مع الاختلاف في تعريف الجهد المؤثر بالشكل:

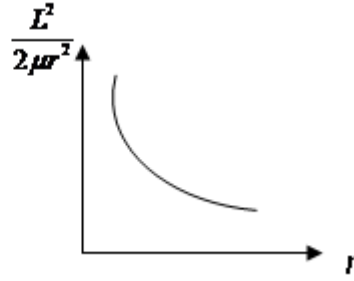
$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$$

الحد الإضافي بالجهد، $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ ، يسمى الجهد الطارد المركزي (Centrifugal potential). وظهر هذا الحد الإضافي بالجهد يمكن تفهمه من مبادئ الميكانيكا التقليدية كالتالي: لجسيم كتلته μ ، يتحرك في مدار دائري نصف قطره r ، تنشأ عليه قوة طرد مركزية F_r تتجه قطرياً للخارج (كما بالشكل 1). قيمة القوة تحسب من المعادلة:

$$F_r = \mu \frac{v^2}{r} = \frac{L^2}{\mu r^3},$$



ب- جسيم يتحرك في مدار دائري



شكل (1) أ- الجهد الطارد المركزي

حيث عرفنا $L = \mu v r$ بكمية الحركة الزاوية للمدار الدائري. ويعرف الجهد بالعلاقة $V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2}$ (نتيجة

لأن $F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}$). وتبعاً لفروض ميكانيكا الكم، يجب أن نستعيض عن L^2 بالقيمة المميزة لها وهي $\hbar^2 l(l+1)$.

على الرغم من تطابق المعادلة السابقة مع معادلة شرودنجر ذات البعد الواحد، فإن الشروط الحدودية المطلوبة للحل مختلفة تماماً، حيث r موجبة. ولتكون الدالة محددة في كل الأماكن فيجب أن نضع هنا الشرط الحدودي $u(0) = 0$ أي أنها تنعدم عند مركز القوى.

في حالة الموجة- s ، وتعني أن $l=0$ ، فإن المعادلة القطرية تؤول إلى:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [E - V(r)]u = 0$$

ب- حركة الجسيم الحر:

عندما نضع الجهد $V(r) = 0$ و $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ لنجد أن حركة الجسيم الحر تتحقق بالمعادلة:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] R_l(k, r) = 0$$

باستخدام المتغيرات $\rho = kr$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) \right] R_l(\rho) = 0$$

وهي معادلة بسل التفاضلية الكروية، وحلها العام هو:

$$R_l(\rho) = A j_l(\rho) + B n_l(\rho)$$

حيث A و B ثوابت اختيارية، j_l هي دالة بسل الكروية و n_l هي دالة نيومان الكروية.

والجدول التالي يوضح الدوال $j_l(x)$ ، n_l للمتغير x والدالة $P_l(\cos \theta)$ لقيم مختلفة للمتغير $\cos \theta$.

l	$P_l(\cos \theta)$	$j_l(x)$	n_l
0	1	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$
1	$\cos \theta$	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$
2	$\frac{1}{4}(1 + 3\cos 2\theta)$	$\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2}$	$-\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3\sin x}{x^2}$

وحيث إن الحل عند المركز يجب أن يكون منتظماً ومحدوداً القيمة (finite and regular) فيجب وضع $B = 0$. بالتالي فإن:

$$R_l(k, r) = C j_l(kr)$$

وحيث إن القيم المميزة k هي قيم موجبة، لذلك نجد أن الطاقة $E = \frac{\hbar^2}{2\mu} k^2$ تأخذ جميع القيم الموجبة في المدى $\{0, \infty\}$ ، وتُمثل

بطيف مستمر (continuous spectrum). وقد رأينا سابقاً أن الجسيم الحر، ذو كمية الحركة $p = \hbar k$ والطاقة $E = \frac{\hbar^2}{2\mu} k^2$ ،

يمكن تمثيله بواسطة موجة مستوية $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. وحيث إن الدالة الكروية

$$\psi_{E,l,m}(r, \theta, \varphi) = C j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

تكون دالة كاملة فإننا نستطيع أن نضع الموجة المستوية بدالاتها بالشكل:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}(k) j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

باختيارنا للمحور Z باتجاه المتجه \mathbf{k} ، فإن:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$$

ولا تعتمد على الزاوية φ . باستخدام التعويض $w = \cos \theta$ نجد:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{r})$$

$$\square \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(w)$$

$$\int u_{k'}^*(x) u_k(x) dx = \delta_{kk'} \quad \text{orthonormality}$$

$$\sum_k u_k^*(x') u_k(x) = \delta(x - x') \quad \text{completeness}$$

مثال: ادرس حركة جسيم، في الحالة ($l = 0$)، داخل بئر جهدي كروي التماثل، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{for } r < a \\ \infty, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: يتحرك الجسيم بحرية ضمن المدى $0 \leq r < a$ وتأخذ الدالة الصورة العامة:

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi) \\ = [A j_l(kr) + B n_l(kr)] Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

حيث A و B ثوابت اختيارية، ولكن الثابت B يؤول للصفر، حيث إن الدالة محددة عند المركز ($r = 0$). وحيث إن الجسيم لا يستطيع اختراق الحاجز عند الحد $r \geq a$ وهذا ناتج عن كون الحاجز لا حد لارتفاعه، بمعنى أن $V(a) = \infty$. لذلك فإن الدالة يجب أن تختفي (تؤول للصفر) عند الحد $r \geq a$ ، ومنه نستنتج أن:

$$j_l(ka) = 0$$

المعادلة الأخيرة تتحقق لقيم متعددة لجذور دالة بسل الكروية، ولنفترضها χ_{nl} ، انظر الجدول الآتي:

رقم الجذر	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	3.14	4.493	5.763	6.99
2	6.28	7.725	9.09	10.42
3	9.43	10.90	12.32	13.70

ومنها نجد أن الطاقة تتحقق بالمعادلة:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\chi_{nl}}{a} \right)^2$$

مثال: ادرس حركة جسيم داخل بئر جهدي كروي التماثل محدد العمق، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{for } r \leq a \\ 0, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: باستخدام المعادلة الموجية نجد أن:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - V_0(r)u = Eu, \quad r \leq a$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = Eu, \quad r > a$$

ومن دراستنا السابقة نجد أن الحل العام يمكن وضعه بالصورة:

$$u_{in}(r) = A \sin(k_{in} r) + B \cos(k_{in} r), \quad k_{in} = \sqrt{\frac{2\mu(V_0 - |E|)}{\hbar^2}} \quad r \leq a$$

$$u_{out}(r) = C e^{-k_{out} r}, \quad k_{out} = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} \quad r > a$$

حيث إن اهتمامنا يتجه نحو طاقة المدارات ذات المستويات المرتبطة (bound-state energy levels)، التي تتحقق من الشرط $E < 0$. والشرط الحدودي $u_{in}(0) = 0$ يتطلب $B = 0$.

وحيث إن الدالة ومشتقاتها يجب أن تكون متصلة خلال الحد $r = a$ فنجد أن الشرط الحدودي:

$$\left. \frac{\left(\frac{du_{in}(r)}{dr} \right)}{u_{in}(r)} \right|_{r=a} = \left. \frac{\left(\frac{du_{out}(r)}{dr} \right)}{u_{out}(r)} \right|_{r=a}$$

يعطينا المعادلة:

$$k_{in} \cot k_{in} = -k_{out}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بالمقدار a واستعمال العلاقتين:

$$\xi = ak_{in}, \quad \eta = ak_{out}$$

نصل إلى المعادلة:

$$\xi \cot \xi = -\eta, \quad \eta^2 + \xi^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} a^2$$

واجب منزلي: ارسم الدالة $\xi \cot \xi = -\eta$ ومن الرسم أثبت أنه لا يوجد مدارات إلا إذا تحقق الشرط $V_0 a^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}$ ، ويوجد

$$\text{مستوى واحد مرتبط في حالة } \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} < V_0 a^2 \leq \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8\mu}$$

مثال: ادرس حركة جسيم خارج بئر جهدي كروي التماثل، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{for } r < a \\ \infty, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: يتحرك الجسيم بحرية ضمن المدى $r > a$ وتأخذ المعادلة القطرية لشروندجر خارج الكرة، $V(r) = 0$ ، الصورة:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r)$$

وهي معادلة تفاضلية مكافئة لمعادلة بيسيل الكروية في الإحداثيات الكروية بالشكل:

$$\frac{d^2 R_\ell(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR_\ell(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R_\ell(\rho) = 0, \quad \rho = kr, \quad k^2 = 2\mu E / \hbar^2$$

وحلها العام هو:

$$R_\ell(\rho) = a_\ell j_\ell(\rho) + b_\ell n_\ell(\rho)$$

ومع الشرط الحدودي: $R_\ell(a) = 0$ نتيجة للجهد $V(a) = \infty$ ، فإننا نجد:

$$a_\ell j_\ell(ka) + b_\ell n_\ell(ka) = 0 \Rightarrow \tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)}$$

حيث استخدمنا $a_\ell = A_\ell \cos \delta_\ell$, $b_\ell = -A_\ell \sin \delta_\ell$ هنا تظهر حالتان للدراسة:

أ- احسب $\tan \delta_\ell$ عندما $ka \ll 1$

نستخدم التقريب التالي

$$j_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} (ka)^\ell, \quad n_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} -(ka)^{-\ell-1}$$

ومنه ينتج أن

$$\tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)} = -(ka)^{2\ell+1}$$

ونلاحظ أن δ_ℓ تقل بسرعة مع زيادة قيم ℓ ومن ثم فإن الموجة S المقابلة للقيمة $\ell = 0$ هي القيمة الدائمة

$$\tan \delta_0 = \frac{j_0(ka)}{n_0(ka)} = -ka$$

المقطع المستعرض الكلي للتشتت يحسب بالمعادلة:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi a^2$$

نجد هنا أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت أربعة أمثال القيمة الكلاسيكية πa^2 . هذا يرجع للخواص الموجية للجسيمات ومنها ظاهرة الحيود.

ب- التشتت عند الطاقات العالية $ka \gg 1$

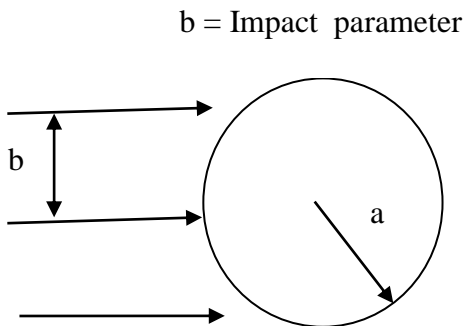
$$\tan \delta_l = -\frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} \approx -\frac{\sin(ka - l\pi/2)}{\cos(ka - l\pi/2)} = -\tan(ka - l\pi/2)$$

$$\Rightarrow \delta_l = -(ka - l\pi/2)$$

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l,$$

عند الطاقات العالية فإن التشتت لا يحدث للجسيمات البعيدة عن المركز، $b > a$ ، ولكن يحدث للجسيمات القريبة، $b < a$ ، انظر: الشكل المرافق، وحيث إن كمية الحركة الزاوية مكتمة، بمعنى أن

$$mvb = \ell \hbar \quad \text{فإن} \quad \ell_{\max} \approx ka, \quad \text{إذاً:}$$



$$\begin{aligned}
 \sigma_{total} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell+1) \frac{[1-2\cos(ka-\ell\pi/2)]}{2} \\
 &\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell+1) - \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell+1) \underbrace{\cos(ka-\ell\pi/2)}_{(-1)^{\ell}} \\
 &\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} (2\ell+1) \approx \frac{2\pi}{k^2} (\ell_{max}+1)^2 \approx \frac{2\pi}{k^2} \ell_{max}^2 \approx 2\pi a^2
 \end{aligned}$$

ملاحظات:

1- تم إهمال الجزء $\cos(ka-\ell\pi/2) = (-1)^{\ell}$ حيث إنه يتذبذب بين قيم موجبة وسالبة، ومن ثم فإن مجموعه النهائي يصبح كمية منعدمة.

2- استخدمنا العلاقة التجميعية $\sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \ell = \ell_{max}(\ell_{max}+1)/2$ بالخطوة الأخيرة.

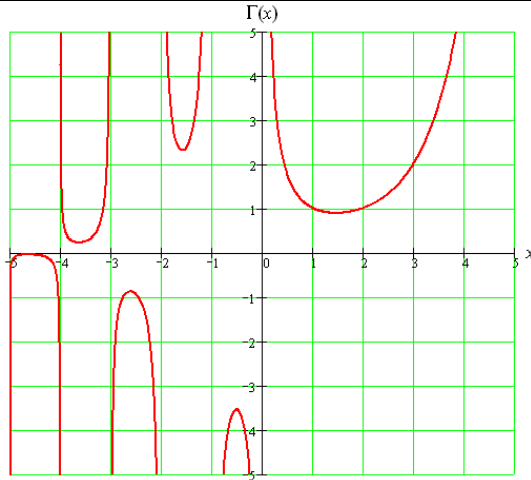
3- نجد هنا أيضاً أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت ضعف القيمة الكلاسيكية πa^2 .

Summary of the familiar special functions		
N	Contest	Page
1.	Gamma function.....	2
2.	Hypergeometric functions.....	8
3.	Laguerre polynomials.....	13
4.	Associate Laguerre polynomials.....	18
5.	Legendre polynomials.....	21
6.	Associate Legendre polynomials.....	27
7.	Bessel function.....	29
8.	Modified Bessel function.....	37
9.	Half-order Bessel function.....	40
10.	Chebyshev polynomials first kind(common)	43
11.	Hermite polynomial.....	46
12.	Simple Harmonic Oscillator	49
13.	Delta function.....	51
14.	Heaviside Unit Step Function.....	53

1. Gamma function

Definition:

$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad z=x+iy, x > 0, \text{ this integral is convergent for } z > 0$	(1.1)
---	-------



Gamma function plot

Gamma function of special values

$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{if } n=0,1,2,\dots$	(1.2)
---	-------

$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$	
--	--

In fact, many formulas involving $n!$ Can be extended to non-integer cases by replacing $n!$ With $\Gamma(n+1)$, and that is why the gamma function is also commonly referred to as the generalized factorial function.

Gamma function properties

1. Multiplication Formula

$\Gamma(2z) = \pi^{-\frac{1}{2}} 2^{2z-1} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$	(1.3)
---	-------

$\Gamma(3z) = (2\pi)^{-\frac{1}{3}} 3^{3z-\frac{1}{2}} \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$	(1.4)
--	-------

$\Gamma(nz) = (2\pi)^{\frac{(1-n)}{2}} n^{nz-\frac{1}{2}} \Gamma\left(z+\frac{j}{n}\right)$	(1.5)
2. Recursion formula	
$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad z > 0$	(1.6)
$\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)$	(1.7)
The relation $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$ can be used to extend the gamma function to the left half plane for all z except when z is a non-positive integer (i.e., $z \neq 0, -1, -2, \dots$)	
3. Reflection Formula: (sometime is called Euler's reflection formula)	
$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{1+t} dt \quad 0 < z < 1$	(1.8)
$\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos \pi z}$	(1.9)
$\Gamma(z-n) = (-1)^n \Gamma(z) \frac{\Gamma(1-z)}{\Gamma(n+1-z)} = \frac{(-1)^n \pi}{\sin \pi z \Gamma(n+1-z)}$	(1.10)
4. Additional identities:	
$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z}$	(1.11)
$ (iz)! ^2 = \frac{\pi z}{\sinh(\pi z)}$	(1.12)
$ (n+iz)! = \sqrt{\frac{\pi z}{\sinh(\pi z)}} \prod_{s=1}^n \sqrt{s^2+z^2}$	(1.13)
Some Fractional Values	
$\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^m 2^m}{1.3.5 \dots (2m-1)} \sqrt{\pi}, \quad m=1,2,3,\dots$	$\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3.5 \dots (2m-1)}{2^m} \sqrt{\pi}, \quad m=1,2,3,\dots$
$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 2.6789385347\dots$	$\Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right) = \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \dots (3n-2)}{3^n} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$
$\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 1.3541179394\dots$	$\Gamma\left(n+\frac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11 \dots (3n-1)}{3^n} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$

$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = 3.6256099082\dots$	$\Gamma\left(n + \frac{1}{4}\right) = \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4n - 3)}{4^n} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$
$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1.2254167024\dots$	$\Gamma\left(n + \frac{3}{4}\right) = \frac{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \dots (4n - 1)}{4^n} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$
Derivative at x=1	
$\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} \ln t e^{-t} dt = -\gamma$	(1.14)
Definition by products	
$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$	(1.16)
$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1+z}{n} \right) e^{-z/n} \right]$, γ is euler constant.	(1.17)
Other integrals	
$\Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} = \int_0^{\infty} t^{z-1} \cos t dt$, $0 < \text{Re } z < 1$	(1.18)
$\Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2} = \int_0^{\infty} t^{z-1} \sin t dt$, $-1 < \text{Re } z < 1$	(1.19)
Asymptotic expansion ($z \rightarrow \infty, \arg z < \pi$)	
$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z} \left[1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} + \dots \right]$	(1.20)
For $\ln \Gamma(z) \approx \ln \left(\sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n(2n-1)} \frac{1}{z^{2n-1}}$	(1.21)
$\approx \ln \left(\sqrt{\frac{2\pi}{z}} z^z e^{-z} \right) + \frac{1}{12z} - \frac{1}{360z^3} + \frac{1}{1260z^5} - \frac{1}{1680z^7} + \dots$	(1.22)
Where B_n are the Bernoulli numbers. if we let $z=n$ a large positive integer , then a useful approximation for $n!$ is given by Stirling's formula	
$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$, $n \rightarrow \infty$	(1.23)
Logarithmic derivative of the gamma function	
Definition: The psi or digamma function denoted $\Psi(x)$ is defined for any non null or negative integer by the logarithmic derivative of $\Gamma(x)$, that is	

$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = -\gamma + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{z+n} \right), z \neq 0, -1, -2$	(1.24)	
The above series is slowly converging for any non negative integer z		
Special values		
$\Psi(1) = -\gamma, \quad \Psi\left(\frac{1}{2}\right) = -\gamma - 2\ln 2, \quad \Psi\left(\frac{1}{3}\right) = -\gamma - \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi, \quad \Psi\left(\frac{1}{4}\right) = -\gamma - 3\ln 2 - \frac{\pi}{2}$		
Asymptotic expansion: ($z \rightarrow \infty, \arg z < \pi$)		
For: $\Psi(z) \approx \ln z - \frac{1}{2z} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{2n z^{2n}}$	(1.25)	
$\approx \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6} + \dots$	(1.26)	
Series expansion of gamma function		
$\ln \Gamma(1+z) = -\gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \zeta(k)}{k} x^k, x < 1,$	(1.27)	
$\ln \Gamma(1+z) = -\ln(1+z) - (\gamma-1)x + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (\zeta(k)-1)}{k} x^k, x < 1$	(1.28)	
The gamma function and the Riemann zeta function		
$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$	(1.29)	
An example for the last equation x=2	$\frac{\pi^2}{6} = \int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$	(1.30)
The gamma function and the beta function		
Let $R(x) > 0$ and $R(y) > 0$, then 0		
$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$	(1.33)	

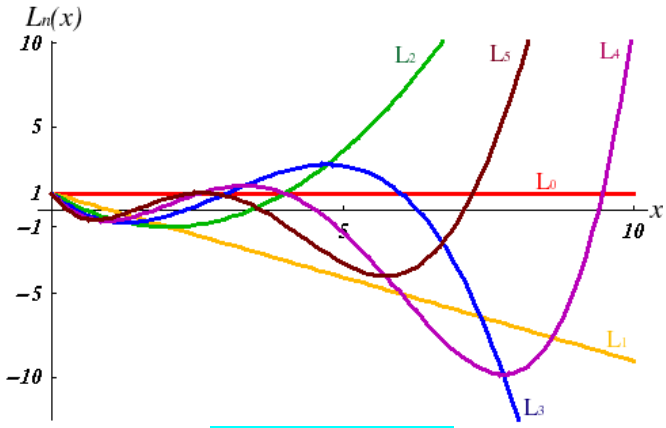
<h2>2. Hypergeometric functions</h2>	
Introduction:	
Recall the geometric series and binomial expansion ($ z < 1$)	
$(1-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n,$	(2.1)
$(1-z)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} z^n$	(2.2)

Definition:	
Let us start from the Gaussian Hypergeometric differential equation which is in the form of:	
$z(1-z)y'' + [c - (a+b+1)z]y' - aby = 0$	(2.3)
Where a,b,and c are constants. The indicial equation of the hypergeometric differential equation is: $r^2 - (1-c)r = 0$	
Which has the roots: $r_1 = 0$ and $r_2 = 1 - c$	
Using the Frobenius method ,the series solution for $r_1 = 0$ can be express as:	
Solution:	
$y_1(z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$	(2.4)
This series is called hypergeometric series. The sum of hypergeometric series denoted by $F(a,b;c;z)$ is called hypergeometric function which is:	
$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$	(2.5)

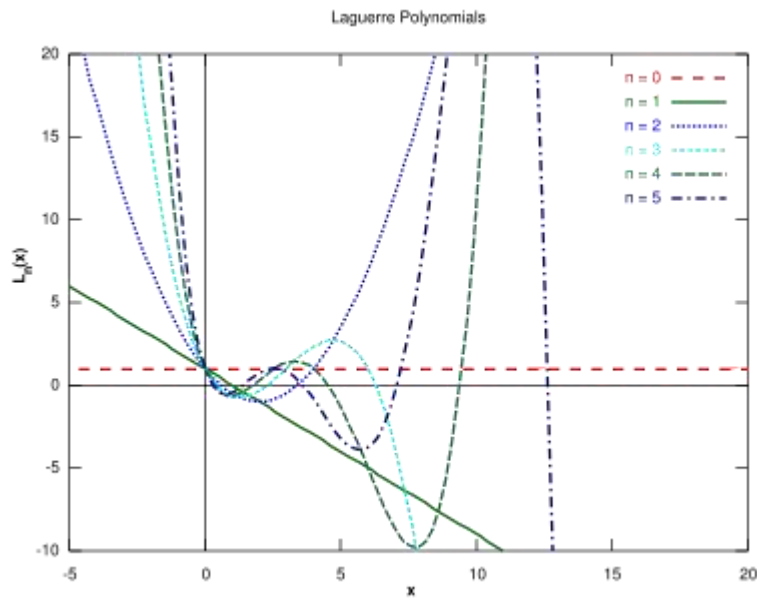
$F(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{z^3}{3!} + \dots$	(2.6)
<p>Also we can write : ${}_2F_1(a,b;c;z) = 1 + \frac{ab}{c} \frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots$</p>	(2.7)
${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}$	(2.8)
<p>The notation ${}_2F_1$ signifies that there are two numerator parameters a and b, and one denominator parameter c. Which has singularities at $z=0,1,\text{and } \infty$</p>	
<p>${}_2F_1$ Is not the general solution, but it is that solution which behaves like a constant near the singular point $z=0$</p>	
<p>We can use the power series to find the behaviour of the solution near each of the singular points</p>	
Special cases	
$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a}$	(2.9)
$F(1,1;2;z) = -\frac{\ln(1-z)}{z}$	(2.10)
$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z} \ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$	(2.11)
$F\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{\tan^{-1}(z)}{z}$	(2.12)
$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{\sin^{-1}(z)}{z}$	(2.13)
$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{\ln(z + \sqrt{1+z^2})}{z}$	(2.14)
$F\left(\frac{1}{2}, 1; 1; \sin^2 x\right) = \sec x$	(2.15)
$F\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \sin^2 x\right) = \cos x$	(2.16)
$F(-p, 1; 1; -z) = (1+z)^p$	(2.17)

Polynomial case:	
Polynomial case :for $m=0,1,2,3,\dots$	
$F(-m,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-m)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n} \frac{(b)_n}{(c)_n} z^n$	(2.18)
Properties:	
Derivatives	
$\frac{d}{dz} F(a,b;c;z) = \frac{ab}{c} F(a+1,b+1;c+1;z)$	(2.19)
$\frac{d^n}{dz^n} F(a,b;c;z) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n,b+n;c+n;z)$	(2.20)
Special values ;when $\text{Re}(c-a-b) > 0$:	
$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$	(2.21)
Integral ; when $\text{Re } c > \text{Re } b > 0$:	
$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-tz)^{-a} dt$	(2.22)
The last equation shows that a hypergeometric function can be written in term of gamma function	
For $z=1$: $F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$	(2.23)
Functional relationships:	
$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-a} F(a,c-b;c;\frac{z}{z-1})$	(2.24)

$F(a,b;c;z) = (1-z)^{-b} F(c-a,b;c;\frac{z}{z-1})$	(2.25)
$F(a,b;c;z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a,c-b;c;z)$	(2.26)
Differential equation:	
$z(1-z)F'' + [c-(a+b+1)z]F' - abF = 0$	(2.27)
singular points:	
It has a regular singular points $z=0,1,\infty$	
Recursion formulae	
F is $F(a,b;c;z); F(a+), F(a-)$ are $F(a+1,b;c;z), F(a-1,b;c;z)$, respectively, etc.	
$(c-a)F(-a) + (2a-c-az+bz)F + a(z-1)F(a+) = 0$	(2.28)
$c(c-1)(z-1)F(c-) + c[c-1-(2c-a-b-1)z]F + (c-a)(c-b)zF(c+) = 0$	(2.29)
$c[a+(b-c)z]F - ac(1-z)F(a+) + (c-a)(c-b)zF(c+) = 0$	(2.30)
$c(1-z)F - cF(a-) + (c-b)zF(c+) = 0$	(2.31)
$(b-a)F + aF(a+) - bF(b+) = 0$	(2.32)
$(c-a-b)F + a(1-z)F(a+) - (c-b)F(b-) = 0$	(2.33)
$(c-a-1)F + aF(a+) - (c-1)F(c-) = 0$	(2.34)
$(b-a)(1-z)F - (c-a)F(a-) + (c-b)F(b-) = 0$	(2.35)
$[a-1+(b+1-c)z]F + (c-a)F(a-) - (c-1)(1-z)F(c-) = 0$	(2.36)

<h3>3. Laguerre polynomials</h3>	
Symbol: $L_n(x)$	
Interval: $[0, \infty]$	
The Laguerre polynomials are orthogonal on the interval from 0 to ∞ with respect to the weight function $w(x) = e^{-x}$. Surprisingly, this is sufficient to determine the polynomials up to a multiplicative factor	
 <p style="text-align: center; color: cyan; font-weight: bold;">for the first kind</p>	
Physical Origins:	
Separation of variables solution to radial equation for quantum hydrogen atom.	
$\left[\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{e^2}{r} \right] \phi(r) = e\phi(r)$	(3.1)
Differential Equation:	
$x\phi_n''(x) + \phi_n'(x) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{x}{4}\right)\phi_n(x) = 0$	(3.2)
Solution:	

$\phi_n(x) = e^{-x/2} L_n(x)$	(3.3)
The standard differential equation:	
$xy''(x) + (1-x)y'(x) + ny(x) = 0$	(3.4)
Where n is a real number .when n is a non-negative integer, i.e, n=0,1,2,..., the solutions of Laguerre's differential equation are often referred to as :	
Laguerre polynomials $L_n(x)$:	
$xL_n''(x) + (1-x)L_n'(x) + nL_n(x) = 0$	(3.5)
Solution	
Regular: the first few Laguerre polynomials are	
$L_0(x) = 1$	
$L_1(x) = 1 - x$	
$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$	
$L_3(x) = \frac{1}{6}(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6)$	
$L_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n! x^m}{(n-m)! m! m!}$	(3.6)
When ordered from smallest to largest powers and with the denominators factored out, the triangle of nonzero coefficients is 1; -1, 1; 2, -4, 1; -6, 18, -9 1; 24, -96, The leading denominators are 1, -1, 2, -6, 24, -120, 720, -5040, 40320, -362880, 3628800,	
<i>The first 6 Laguerre polynomials</i>	



Asymptotic expansion

At $x=0$, $L_n(x) = 1 - nx + ..$

(3.7)

At $x=\infty$, $L_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} (x^n - n^2 x^{n-1} + ..)$

(3.8)

Generating function

$$\frac{e^{-xz}/1-z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)z^n = 1 + (-x+1)z + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x+1\right)z^2 + \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x+1\right)z^3 \dots$$

(3.9)

Recurrence Relations

A Laguerre Polynomial at one point can be expressed in terms of neighbouring Laguerre Polynomials at the same point

Differential: $xL'_n(x) = nL_n(x) - nL_{n-1}(x)$

(3.10)

$L'_n(x) = L'_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)$

(3.11)

Polynomial: $(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)$	(3.12)
Orthogonality and Normalization	
Laguerre Polynomials $L_n(x), n=0,1,2,\dots$, form a <i>complete orthogonal set</i> on the interval $0 < x < \infty$ with respect to the weighting function , $w(x) = e^{-x}$. It can be shown that:	
$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$	(3.13)
$L_n(0) = 1$	(3.14)
$\int_0^{\infty} e^{-x} L_m(x) L_n(x) dx = \delta_{nm}$	(3.15)
By using this orthogonality, a piecewise continuous function $f(x)$ can be expressed in terms of Laguerre Polynomials:	
$\sum_{n=0}^{\infty} C_n L_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{where } f(x) \text{ is continuous} \\ \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & \text{at discontinuous points} \end{cases}$	(3.16)
$C_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(x) dx$	(3.17)
This orthogonal series expansion is also known as a Fourier-Laguerre Series expansion or a Generalized Fourier Series expansion.	
Rodrigues Formula	
The Laguerre Polynomials $L_n(x)$ can be expressed by Rodrigues' formula:	
$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^n e^{-x} \quad \text{where } n = 0,1,2,\dots$	(3.18)
Special results	
$\int_0^x L_n(t) dt = L_n(x) - L_{n+1}(x)$	(3.19)

$\int_0^{\infty} x^p e^{-x} L_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } p < n \\ (-1)^n (n!)^2 & \text{if } p=n \end{cases}$	(3.20)
$L_n(x) = (-1)^n \left\{ \frac{x^n}{n!} - \frac{nx^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{2!(n-2)!} - \dots + (-1)^n \right\}$	(3.21)
Schlaefli-type Integral Representations	
$L_n(x) = \frac{e^x}{2\pi i} \int_{c(x)} \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz$	(3.22)
<p>The Laguerre polynomial $L_n(x)$ can be defined by the contour integral</p>	
$L_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(0)} \frac{e^{-xz}/1-z}{(1-z)z^{n+1}} dz$	(3.23)

4. Associated Laguerre

Physical Origins

Separation of variables solution to radial equation for quantum hydrogen atom. The normalized wave function for a hydrogenic atom with charge Z is,

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n(n+l)!}} e^{-\frac{Zr}{na_0}} \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^l L_{n-l-1}^{2l+1}\left(\frac{2Zr}{na_0}\right) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (4.1)$$

With the Bohr radius defined by $a_0 = \hbar^2 / (Me^2)$ and M being the mass of the Electron. The radial function is the Associated Laguerre polynomial $L_n^k(x)$

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \Psi_{nlm} - \frac{Ze^2}{r} \Psi_{nlm} = E_n \Psi_{nlm} \quad (4.2)$$

And
$$E_n = -\frac{Z^2 M e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (4.3)$$

Differential Equation

With $\Psi \equiv R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ and $\rho \equiv \alpha r, \alpha^2 \equiv -8ME/\hbar^2$ and $\lambda \equiv (2MZe^2)/(\alpha\hbar^2)$

Then defining $\chi(\rho) \equiv R(\rho/\alpha)$

the radial differential equation becomes

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d\chi(\rho)}{d\rho} \right) + \left(\frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} \right) \chi(\rho) = 0 \quad (4.4)$$

Standard form

$$xy''(x) + (k+1-x)y'(x) + (n+k)y(x) = 0 \quad (4.5)$$

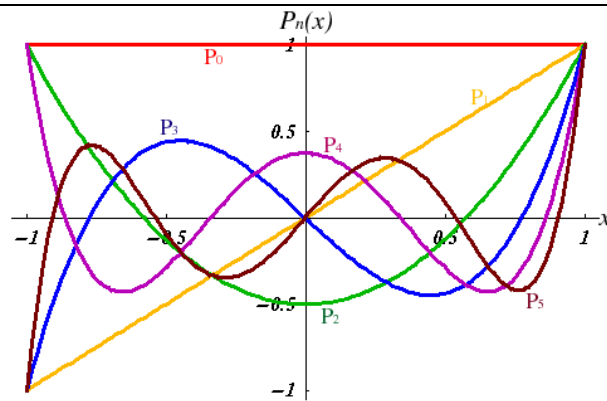
$xL_n^{k''}(x) + (k+1-x)L_n^{k'}(x) + (n+k)L_n^k(x) = 0$	(4.6)
Self-Adjoint Form	
With $p_0(x) = x^{k+1}e^{-x}$, $p_1(x) = (k+1-x)x^k e^{-x}$, $p_2(x) = 0$, $\lambda = n+k$, $w(x) = x^k e^{-x}$	
$\frac{d}{dx} \left(x^{k+1} e^{-x} \frac{d}{dx} L_n^k(x) \right) + (n+k)x^k e^{-x} L_n^k(x) = 0$	(4.7)
Interval: $x \in (0, \infty)$. regular singular point at $x=0$. Irregular singular point at $x \rightarrow \infty$.	
Solution	
Regular	
$L_0^k(x) = 1$	(4.8)
$L_1^k(x) = -x + k + 1$	(4.9)
$L_2^k(x) = \frac{x^2}{2} - (k+2)x + \frac{(k+2)(k+1)}{2}, \dots$	(4.10)
$L_n^k(x) = (-1)^k \left(\frac{d}{dx} \right)^k L_{n+k}(x)$	(4.11)
$L_n^k(x) = \sum_{m=0}^n (-1)^m \frac{(n+k)! x^m}{(n-m)!(m+k)!m!}$	(4.12)
Asymptotic expansion	
At $x=0$. $L_n^k(x) = \frac{(n+k)!}{n!k!} \left(1 - \frac{n}{k+1}x + \dots \right)$	(4.13)
At $x \rightarrow \infty$ $L_n^k(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(x^n - (n+k)(n-1)x^{n-1} + \dots \right)$	(4.14)
Irregular solution diverges at the origin physically irrelevant.	

Generating function	
$\frac{e^{-xz/(1-z)}}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x) z^n$	(4.15)
Recurrence relations	
Differential : $xL_n^{k'}(x) = nL_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$	(4.16)
Polynomial: $(n+1)L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)L_n^k(x) - (n+k)L_{n-1}^k(x)$	(4.17)
Orthogonality and normalization	
$L_n^k(0) = \frac{(n+k)!}{n!k!}$	(4.18)
$\int_0^{\infty} x^k e^{-x} L_m^k(x) L_n^k(x) dx = \delta_{nm} \frac{(n+k)!}{n!}$	(4.19)
Rodrigue's formula	
$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^{k+n} e^{-x} = \frac{d^k}{d^k x} L_n(x)$	(4.20)
Schlaefli-type integral representations	
$L_n^k(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(0)} \frac{e^{-xz/1-z}}{(1-z)^{k+1} z^{n+1}} dz$	(4.21)
$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{2\pi i} \int_{c(x)} \frac{z^{n+k} e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz$	(4.22)

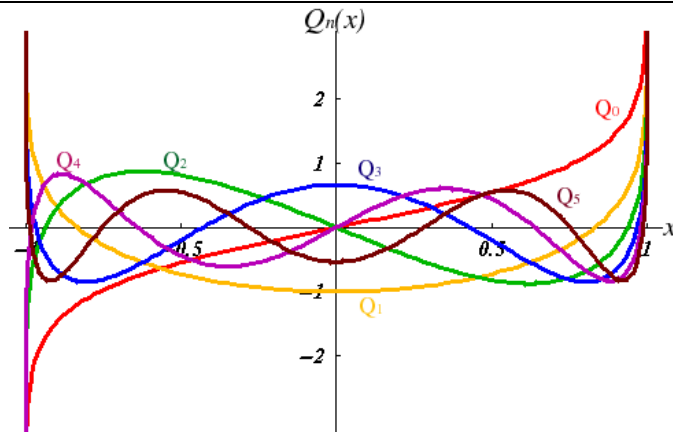
5. Legendre function

Physical Origins

Separation of variables of Laplace, Schrödinger, Helmholtz and Diffusion equations in spherical coordinates with azimuthal symmetry



for the first kind



for the second kind

Differential Equation	
$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_l(\cos \theta)}{d\theta} \right) + l(l+1)P_l(\cos \theta) = 0$	(5.1)
Standard and Self-Adjoint Form	
With $P_0(x) = 1 - x^2$, $P_1(x) = -2x$, $P_2(x) = 0$, $\lambda = l(l+1)$, $w(x) = 1$	
$(1-x)^2 P_l''(x) - 2x P_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0$	(5.2)
$\frac{d}{dx} \left((1-x)^2 \frac{dP_l(x)}{dx} \right) + l(l+1)P_l(x) = 0$	(5.3)
Differential equation : Legendre function	
$(1-z^2)w'' - 2zw' + \nu(\nu+1)w = 0$	(5.4)
The solution $P_\nu(z), Q_\nu(z)$ can be given in terms of Gaussian hypergeometric functions	
Definition	
$P_\nu(z) = F\left(-\nu, \nu+1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}z\right)$	(5.5)
$Q_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})(2z)^{\nu+1}} F\left(\frac{1}{2}\nu+1, \frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}; \nu+\frac{3}{2}; z^{-2}\right)$	(5.6)
Singular points	
$P_\nu(z)$ has a singular point at $z = -1$ and is analytic in the remaining part of the complex plane with a branch cut along $(-\infty, -1)$. $Q_\nu(z)$ has a singular points at $z = \pm 1$ and analytic in the remaining part of the complex z -plane, with a branch cut along $(-\infty, +1)$	
Relationships	
$P_{-\nu-1}(z) = P_\nu(z)$	(5.7)

$P_{-\nu-1}(z) = Q_\nu(z) - \pi \cot \nu\pi P_\nu(z)$	(5.8)
Recursion relationship	
$(\nu+1)P_{\nu+1}(z) = (2\nu+1)zP_\nu(z) - \nu P_{\nu-1}(z)$	(5.9)
$(2\nu+1)P_\nu(z) = P'_{\nu+1}(z) - P'_{\nu-1}(z)$	(5.10)
$(\nu+1)P_\nu(z) = P'_{\nu+1}(z) - zP'_\nu(z)$	(5.11)
$\nu P_\nu(z) = zP'_\nu(z) - P'_{\nu-1}(z)$	(5.12)
$(1-z^2)P'_\nu(z) = \nu P_{\nu-1}(z) - \nu z P_\nu(z)$	(5.13)
The function $Q_\nu(z)$ satisfies the same relations	

Integrals	
$P_\nu(\cosh \alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\cosh(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \cosh \alpha - 2 \cosh \theta}} d\theta$	(5.14)
$= \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha}^\alpha \frac{e^{-(\nu+1/2)\theta}}{\sqrt{2 \cosh \alpha - 2 \cosh \theta}} d\theta$	(5.15)
$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(\cosh \alpha + \sinh \alpha \cos \psi)^{\nu+1}}$	(5.16)
$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cosh \alpha + \sinh \alpha \cos \psi)^\nu d\psi$	(5.17)
$P_\nu(\cosh \beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\beta \frac{\cos(\nu + \frac{1}{2})\theta}{\sqrt{2 \cos \theta - 2 \cos \beta}} d\theta$	(5.18)
$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\psi}{(\cos \beta + i \sin \beta \cos \psi)^{\nu+1}}$	(5.19)

$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos \beta + i \sin \beta \cos \psi)^\nu d\psi$	(5.20)
$Q_\nu(z) = 2^{-\nu-1} \int_{-1}^1 \frac{(1-t^2)^\nu}{(z-t)^{\nu+1}} dt \quad \operatorname{Re} \nu > -1, \arg z < \pi, z \notin [-1,1]$	(5.21)
$= \int_0^\infty \left[z + \sqrt{z^2 - 1} \cosh \phi \right]^{-\nu-1} d\phi$	(5.22)
$= \int_\alpha^\beta \frac{e^{-(\nu+1/2)\theta}}{\sqrt{2 \cosh \theta - 2 \cosh \alpha}} d\theta, \quad z = \cosh \alpha$	(5.23)

Polynomial case	
Legendre polynomials are special cases when	
$P_n(x) = F_{21}(-n, n+1; \frac{1}{2}; -\frac{x}{2})$ $\sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k}, \quad m = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{if } n \text{ even} \\ \frac{1}{2}(n-1) & \text{if } n \text{ odd} \end{cases}$	(5.24)
Legendre polynomials satisfy (norm)	
$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2m+1} \delta_{nm}$	(5.25)
Legendre series representation is	
$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n P_n(x), \quad A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$	(5.26)
For integer order, we distinguish two cases : $Q_n(x)$ (defined for $x \in (-1,1)$) and $Q_n(z)$ defined for $\operatorname{Re} z \notin [-1,1]$	
$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	(5.27)
$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$	(5.28)

$Q_0(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$	(5.29)
$Q_1(z) = \frac{1}{2} z \ln \frac{z+1}{z-1} - 1$	(5.30)
In both cases $Q_n(y) = P_n(y)Q_0(y) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2k+1)[1-(-1)^{n+k}]}{(n+k+1)(n-k)} P_k(y)$	(5.31)

Legendre polynomials $P_n(x)$ and functions $Q_n(x)$, $x \in (-1,1)$	
---	--

N	$P_n(x)$	$Q_n(x)$
0	1	$\frac{1}{2} \ln[(1+x)/(1-x)]$
1	x	$P_1(x)Q_0(x) - 1$
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$	$P_2(x)Q_0(x) - \frac{3}{2}x$
3	$\frac{1}{2}x(5x^2 - 3)$	$P_3(x)Q_0(x) - \frac{5}{2}x^2 + \frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$	$P_4(x)Q_0(x) - \frac{35}{8}x^3 + \frac{55}{24}x$
5	$\frac{1}{8}x(63x^4 - 70x^2 + 15)$	$P_5(x)Q_0(x) - \frac{63}{8}x^4 + \frac{49}{8}x^2 - \frac{8}{15}$

Generating function	
----------------------------	--

$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)z^n = \frac{1}{\sqrt{(1-2xz+z^2)}}$	(5.32)
--	--------

Rodrigues' formula	
---------------------------	--

$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^n]$	(5.33)
---	--------

Explicit expression	
----------------------------	--

$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \binom{n}{m} \binom{2n-2m}{n} x^{n-2m}$	(5.34)
---	--------

Schlaefli integral representation	
--	--

$P_l(z) = \frac{1}{2^l 2\pi i} \int_{C(z)} \frac{(t^2 - 1)^l}{(t - z)^{l+1}} dt ,$	(5.35)
<p>C(z) is any closed counter clockwise around z</p>	

<h2>6. Associated Legendre function</h2>	
--	--

differential equation	
$(1-z^2)y'' - 2zy' + \left[\nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1-z^2} \right] y = 0$	(6.1)
<p>The solution $Q_\nu^\mu(z), P_\nu^\mu(z)$, the associated Legendre functions can be given in terms of Gauss hypergeometric functions. We only consider integer values of μ, ν and replace them with m, n respectively. Then, the associated differential equation follows from the Legendre differential equation after it has been differentiated m times</p>	
Relationships between the associated and ordinary legendre functions	
The following relationships are for $z \in [-1, 1]$	
$P_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z)$	(6.2)
$P_n^m(z) = \frac{(-1)^m}{2^n n!} (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^{n+m}}{dz^{n+m}} (z^2 - 1)^n$	(6.3)
$P_n^{-m}(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(z)$	6.4
$Q_n^m(z) = (z^2 - 1)^{\frac{1}{2}m} \frac{d^m}{dz^m} Q_n(z)$	(6.5)
$Q_n^{-m}(z) = \frac{(n-m)!}{(n+m)!} Q_n^m(z)$	(6.6)
$P_n^{-m}(z) = (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}m} \int_1^z \dots \int_1^z P_n(z) (dz)^m$	(6.7)
$Q_n^{-m}(z) = (-1)^m (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}m} \int_z^\infty \dots \int_z^\infty Q_n(z) (dz)^m$	(6.8)
$P_{-n-1}^m(z) = P_n^m(z)$	(6.9)
Orthogonality relationships	

$\int_{-1}^1 P_n^m(x) P_k^m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq n \\ \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} & \text{if } k = n \end{cases}$	(6.10)
Recursion relationships	
$P_n^{m+1}(z) + \frac{2mz}{\sqrt{z^2-1}} P_n^m(z) = (n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(z)$	(6.11)
$(z^2-1) \frac{dP_n^m(z)}{dz} = mz P_n^m(z) + \sqrt{z^2-1} P_n^{m+1}(z)$	(6.12)
$(2n+1)z P_n^m(z) = (n-m+1) P_{n+1}^m(z) + (n+m) P_{n-1}^m(z)$	(6.13)
$(z^2-1) \frac{dP_n^m(z)}{dz} = (n-m+1) P_{n+1}^m(z) - (n+1)z P_n^m(z)$	6.14)
$P_{n-1}^m(z) - P_{n+1}^m(z) = -(2n+1) \sqrt{z^2-1} P_n^{m-1}(z)$	(6.15)
The functions $Q_n^m(z)$ satisfy the same relations	
Rodrigues formula	
$P_n^m(z) = \frac{(1-z^2)^{\frac{m}{2}}}{2^l l!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{l+m} (z^2-1)^l$	(6.16)
Schlaefli integral representation:	
$P_l^m(z) = \frac{(1-z^2)^{m/2}}{2^{l+m} 2\pi i} \int_{C(z)} \frac{(t^2-1)^l}{(t-z)^{l+m+1}} dt$	6.17)
C(z) is any closed counter clockwise around z	

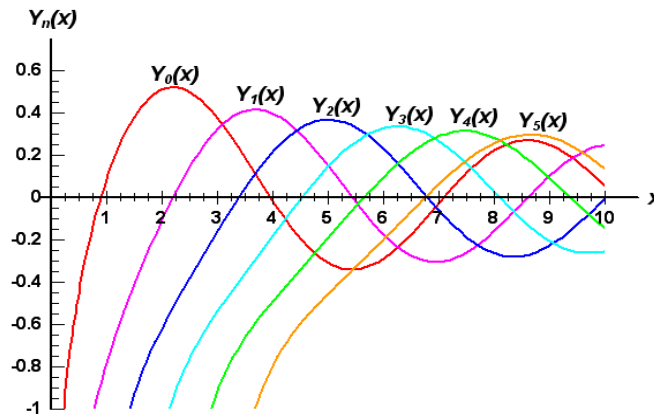
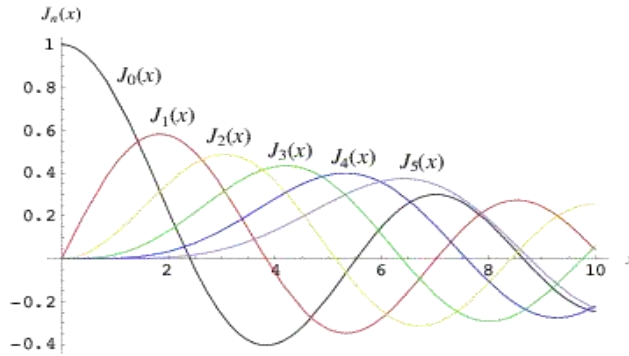
7. Bessel function

Physical Origins

Separation of variables in polar and cylindrical coordinates for Laplace, Helmholtz and similar equations of the form

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) + k^2 \Phi(\vec{r}) = 0$$

(7.1)



Differential equation	
$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} J_\nu(\kappa\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} J_\nu(\kappa\rho) + (\kappa^2 \rho^2 - \nu^2) J_\nu(\kappa\rho) = 0$	(7.2)
Self-adjoint form	
With $p_0(\rho) = \rho$, $p_1(\rho) = 1$, $p_2(\rho) = -\nu^2 / \rho$, $\lambda = \kappa^2$, $w(\rho) = \rho$.	
$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} J_\nu(\kappa\rho) \right) + \left(\kappa^2 \rho - \frac{\nu^2}{\rho} \right) J_\nu(\kappa\rho) = 0$	(7.3)
Differential equation	
$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0$	(7.4)
where n is a non-negative real number. The solutions of this equation are called Bessel Functions of order n . Although the order n can be any real number. The solutions are denoted with $J_\nu(z)$ and $Y_\nu(z)$ (the ordinary Bessel functions)	
Since Bessel's differential equation is a second order ordinary differential equation, two sets of functions, the Bessel function of the first kind $J_n(x)$ and the Bessel function of the second kind (also known as the Weber Function) $Y_n(x)$, are needed to form the general solution:	
And $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ (THE Hankel functions)	(7.5)
Further solutions are	
$J_{-\nu}(z), Y_{-\nu}(z), H_{-\nu}^{(1)}(z), H_{-\nu}^{(2)}(z)$	(7.6)
When ν is an integer, $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), n = 0, 1, 2, \dots$	(7.7)
Singular points	
The Bessel differential equation has a regular singularity at $z = 0$ and irregular singularity at $z \rightarrow \infty$	

Relationships	
$H_{\nu}^{(1)}(z) = J_{\nu}(z) + iY_{\nu}(z)$	(7.8)
$H_{\nu}^{(2)}(z) = J_{\nu}(z) - iY_{\nu}(z)$	(7.9)
Newmann function: if $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $Y_{\nu}(z) = \frac{\cos \nu\pi J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu\pi}$	(7.10)
When $\nu = n$ (integer) then the limit $\nu \rightarrow n$ should be taken in the right-hand side of this equation. complete solutions to Bessel's equation may be written as :	
$c_1 J_{\nu}(z) + c_2 J_{-\nu}(z)$ if ν is not an integer	(7.11)
$c_1 J_{\nu}(z) + c_2 Y_{\nu}(z)$ for any value of ν	(7.12)
$c_1 H_{\nu}^{(1)}(z) + c_2 H_{\nu}^{(2)}(z)$ for any value of ν	(7.13)

Series expansion:	
For any complex z	
$J_{\nu}(z) = \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}}{\Gamma(n+\nu+1)n!}$	(7.14)
$J_0(z) = 1 - \left(\frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2!2!} \left(\frac{1}{2}z\right)^4 - \frac{1}{3!3!} \left(\frac{1}{2}z\right)^6 + \dots$	(7.15)
$J_1(z) = \frac{1}{2}z \left[1 - \frac{1}{1!2!} \left(\frac{1}{2}z\right)^2 + \frac{1}{2!3!} \left(\frac{1}{2}z\right)^4 - \frac{1}{3!4!} \left(\frac{1}{2}z\right)^6 + \dots \right]$	(7.16)
$Y_n(z) = \frac{2}{\pi} J_n(z) \ln\left(\frac{1}{2}z\right) - \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{-n}}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k} - \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^n}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(k+1) + \varphi(n+k+1)] \frac{(-1)^k \left(\frac{1}{2}z\right)^{2k}}{k!(n+k)!}$	(7.17)

Recurrence relationships	
Bessel functions of higher order can be expressed by Bessel functions of lower orders	
$C_{\nu-1}(z) + C_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} C_{\nu}(z)$	(7.18)
$C_{\nu-1}(z) - C_{\nu+1}(z) = 2C'_{\nu}(z)$	(7.19)
$C'_{\nu}(z) = C_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} C_{\nu}(z)$	(7.20)
$C'_{\nu}(z) = -C_{\nu+1}(z) + \frac{\nu}{z} C_{\nu}(z)$	(7.21)
Where $C_{\nu}(z)$ denoted one of the functions $J_{\nu}(z), y_{\nu}(z), H_{\nu}^{(1)}(z), H_{\nu}^{(2)}(z)$	

Behaviour as $z \rightarrow 0$	
Let $\nu > 0$, then	
$J_{\nu}(z) \approx \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$	(7.22)
$Y_{\nu}(z) \approx -\frac{1}{\pi}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}$	(7.23)
$H_{\nu}^{(1)}(z) \approx \frac{1}{\pi i}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}$	(7.24)
$H_{\nu}^{(2)}(z) \approx -\frac{1}{\pi i}\Gamma(\nu)\left(\frac{2}{z}\right)^{\nu}$	(7.25)
The same relations hold as $\nu \rightarrow \infty$	

Fourier expansion	
For any complex z	
$e^{-iz \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-int} J_n(z)$	(7.26)
With parseval relation	
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(z) = 1$	(7.27)
Auxiliary functions	
Let $\chi = z - (\frac{1}{2}\nu + \frac{1}{4})\pi$ and define	(7.28)
$P(\nu, z) = \sqrt{\pi z/2} [J_\nu(z) \cos \chi + Y_\nu(z) \sin \chi]$	(7.29)
$Q(\nu, z) = \sqrt{\pi z/2} [-J_\nu(z) \sin \chi + Y_\nu(z) \cos \chi]$	(7.30)
Inverse relationships	
$J_\nu(z) = \sqrt{2/\pi z} [P(\nu, z) \cos \chi - Q(\nu, z) \sin \chi]$	(7.31)
$Y_\nu(z) = \sqrt{2/\pi z} [P(\nu, z) \sin \chi + Q(\nu, z) \cos \chi]$	(7.32)
For Hankel functions:	
$Y_\nu^{(1)}(z) = \sqrt{2/\pi z} [P(\nu, z) + iQ(\nu, z)] e^{i\chi}$	(7.33)
$Y_\nu^{(2)}(z) = \sqrt{2/\pi z} [P(\nu, z) - iQ(\nu, z)] e^{-i\chi}$	(7.34)
The functions $P(\nu, z), Q(\nu, z)$ are the slowly varying components in the asymptotic expansions of the oscillatory Bessel and Hankel functions	

Asymptotic expansions	
Let (α, n) be defined by	
$(\alpha, n) = \frac{2^{-2n}}{n!} \left\{ (4\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 3^2) \dots (4\alpha^2 - (2n-1)^2) \right\}$	(7.35)
$(\alpha, n) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha + n)}{2} \frac{1}{n! \Gamma(\frac{1}{2} + \alpha - n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$	(7.36)
$(\alpha, n) = \frac{(-1)^n \cos(\pi\alpha)}{\pi n!} \Gamma(\frac{1}{2} + \alpha + n) \Gamma(\frac{1}{2} - \alpha + n)$	(7.37)
With recursion:	
$(\alpha, n+1) = -\frac{(n + \frac{1}{2})^2 - \alpha^2}{n+1} (\alpha, n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\alpha, 0) = 1$	(7.38)
Then for $z \rightarrow \infty$	
$P(\nu, z) \square \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\nu, 2n)}{(2z)^{2n}}$	(7.39)
$Q(\nu, z) \square \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\nu, 2n+1)}{(2z)^{2n+1}}$	(7.40)
With $\mu = 4\nu^2$	
$P(\nu, z) \square 1 - \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)(\mu-49)}{4!(8z)^4} - \dots$	(7.41)
$Q(\nu, z) \square \frac{\mu-1}{8z} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots$	(7.42)
For large positive values of x	
$J_\nu(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \left[\cos\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O(x^{-1}) \right]$	(7.43)

$Y_\nu(x) = \sqrt{2/(\pi x)} \left[\sin\left(x - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) + O(x^{-1}) \right]$	(7.44)
<h2 style="text-align: left; margin-left: 10px;">Integrals</h2>	
<p>Let $\operatorname{Re} z > 0$ and ν be any complex number</p>	
$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu\theta - z \sin \theta) d\theta - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu t - z \sinh t} dt$	(7.45)
$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})^{-1}} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zt dt, \quad \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, z \text{ complex}, z \neq 0$	(7.46)
$J_\nu(z) = \frac{2(x/2)^{-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)^{-1}} \int_1^\infty \frac{\sin xt}{(t^2 - 1)^{\nu+\frac{1}{2}}} dt, \quad x > 0, \operatorname{Re} \nu < -\frac{1}{2}$	(7.47)
$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(z \sin \theta - \nu\theta) d\theta - \int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t} \cos \nu\pi) e^{-z \sinh t} dt$	(7.48)
$Y_\nu(z) = -\frac{2(\frac{x}{2})^{-\nu}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2} - \nu)^{-1}} \int_1^\infty \frac{\cos xt}{(t^2 - 1)^{\nu+\frac{1}{2}}} dt, \quad x > 0, \operatorname{Re} \nu < -\frac{1}{2}$	(7.49)
<p>When $\nu = n$ (an integer), the second integral in the first relation disappears</p>	
<h2 style="text-align: left; margin-left: 10px;">Generating Function</h2>	
$g(x, t) = e^{(x/2)(t-1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$	(7.50)
<h2 style="text-align: left; margin-left: 10px;">Orthogonality and Normalization</h2>	
$J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1$	(7.51)
$\int_0^\infty \kappa \rho J_m(\kappa \rho) J_m(\kappa' \rho) d\rho = \delta(\kappa - \kappa')$	(7.52)

$\int_0^L J_m(\kappa_{ml}\rho)J_m(\kappa_{mn}\rho)\rho d\rho = \frac{L^2}{2} J_{m+1}^2(\kappa_{ml}L)\delta_{nl}$	(7.53)
<p>Rodrigues-type Formula</p>	
$J_m(x) = (-1)^m x^m \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^m J_0(x)$	(7.54)
<p>Schlaefli-type Integral Representation</p>	
$J_m(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c(0)} \frac{e^{(x/2)(z-1/z)}}{z^{m+1}} dz$	(7.55)

<h2>8.Modified Bessel</h2>	
Physical Origins	
Separation of variables in cylindrical coordinates for Laplace, diffusion and similar equations of the form	
$\nabla^2\Phi(\vec{r}) - k^2\Phi(\vec{r}) = 0$	8.1
It differs from the usual Bessel function in the choice of separation constants.	
Differential Equation	
$\rho^2 \frac{d^2}{d\rho^2} I_\nu(\kappa\rho) + \rho \frac{d}{d\rho} I_\nu(\kappa\rho) - (\kappa^2\rho^2 + \nu^2) I_\nu(\kappa\rho) = 0$	8.2
Self-Adjoint Form	
With $p_0(\rho) = \rho$, $p_1(\rho) = 1$, $p_2(\rho) = -\nu^2/\rho$, $\lambda = -\kappa^2$, $w(\rho) = \rho$.	
$\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{d}{d\rho} I_\nu(\kappa\rho) \right) - \left(\kappa^2\rho + \frac{\nu^2}{\rho} \right) I_\nu(\kappa\rho) = 0$	8.3
Standard:	
$x^2 \frac{d^2}{dx^2} I_\nu(x) + x \frac{d}{dx} I_\nu(x) - (x^2 + \nu^2) I_\nu(x) = 0$	8.4
Differential equation:	
$z^2 y'' + zy' - (z^2 + \nu^2)y = 0$	8.5
Solutions $I_\nu(z)$ and $K_\nu(z)$,	
$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2n}}{\Gamma(n+\nu+1)n!}$	8.6

$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin \nu\pi}$	8.7
$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \ln \frac{z}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{z}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{z^2}{4}\right)^k + \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} [\varphi(k+1) + \varphi(n+k+1)] \frac{(z/2)^{2k}}{k!(n+k)!}$	8.8
Relations with the ordinary Bessel functions	
$I_\nu(z) = e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad , -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$	8.9
$I_\nu(z) = e^{\frac{3}{2}\nu\pi i} J_\nu(ze^{-\frac{3}{2}\pi i}) \quad , \frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$	8.10
$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2} i e^{\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(1)}(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) \quad , -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$	8.11
$K_\nu(z) = -\frac{\pi}{2} i e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} H_\nu^{(2)}(ze^{-\frac{1}{2}\pi i}) \quad , -\frac{\pi}{2} < \arg z \leq \pi$	8.12
$Y_\nu(ze^{\frac{1}{2}\pi i}) = e^{\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} I_\nu(z) - \frac{2}{\pi} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} K_\nu(z) \quad , -\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{2}$	8.13
For n=0,1,2,..	
$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz)$	8.14
$Y_n(iz) = i^{n+1} I_n(z) - \frac{2}{\pi} i^{-n} K_n(z)$	8.15
$I_{-n}(z) = I_n(z)$	8.16
$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$	8.17
for any ν	
Recursion relationships	
$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z)$	8.18
$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z)$	8.19

$K_{\nu+1}(z) - K_{\nu-1}(z) = \frac{2\nu}{z} K_{\nu}(z)$	8.20
$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_{\nu}(z)$	8.21
INTEGRALS	
$I_{\nu}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{z \cos \theta} \cos(\nu \theta) d\theta - \frac{\sin \nu \pi}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-\nu t - z \cosh t} dt$	8.22
$I_{\nu}(z) = \frac{(2z)^{\nu} e^z}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^1 e^{-2zt} [t(1-t)]^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, z \text{ complex}, z \neq 0$	8.23
$K_{\nu}(z) = \int_0^{\infty} e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt$	8.24
$K_{\nu}(z) = \frac{\sqrt{\pi} (\frac{z}{2})^{\nu} e^{-z}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^{\infty} e^{-2zt} t^{\nu - \frac{1}{2}} (t+1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, \operatorname{Re} z > 0$	8.25
$K_{\nu}(xz) = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) (2z)^{\nu}}{\sqrt{\pi} x^{\nu}} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt dt}{(t^2 + z^2)^{\nu + 1/2}}, \operatorname{Re} \nu > -\frac{1}{2}, x > 0, \arg z < \frac{1}{2} \pi$	8.26
When $\nu = n$ (an integer), the second integral in the first relation disappears	
Generating Function	
$g(x, t) = e^{(x/2)(t+1/t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$	8.27
Orthogonality and Normalization	
$I_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_{2n}(x) = 1$	8.28
$\int_0^{\infty} \kappa \rho J_m(\kappa \rho) J_m(\kappa' \rho) d\rho = \delta(\kappa - \kappa')$	8.29
$\int_0^L J_m(\kappa_{ml} \rho) J_m(\kappa_{mn} \rho) \rho d\rho = \frac{L^2}{2} J_{m+1}^2(\kappa_{ml} L) \delta_{nl}$	8.30

9. Half order Bessel functions (Spherical Bessel).	
Physical Origins	
Radial equation solution of separation of variables of Helmholtz equation,	
$(\nabla^2 + k^2)\Phi = 0$	9.1
in spherical coordinates	
Differential Equation	
Self-Adjoint Form	
With $p_0(r) = r^2$, $p_1(r) = 2r$, $p_2(r) = -n(n+1)$, $\lambda = \kappa^2$, $w(r) = r^2$	
$\frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR(r)}{dr}\right) + (\kappa^2 r^2 - n(n+1))R(r) = 0$	9.2
Standard	
$\frac{d}{dx}\left(x^2 \frac{dy_n(x)}{dx}\right) + (x^2 - n(n+1))y_n(x) = 0$	9.3
Or:	
$z^2 f'' + 2zf' + [z^2 - n(n+1)]f = 0$	9.4
Physical interval	
$0 \leq x \leq \infty$ (Sometime finite interval $0 \leq x \leq L$). regular singular point, $x = 0$. irregular singular point, $x \rightarrow \infty$	

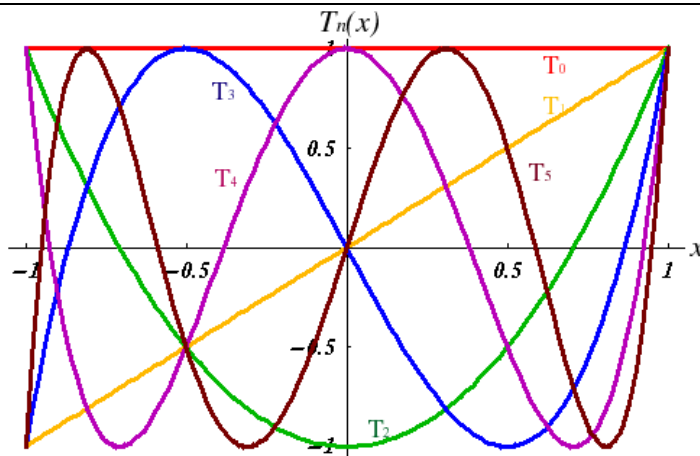
Solutions	
For integer values of n, let:	
$j_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)} J_{n+\frac{1}{2}}(z),$	9.5
$y_n(z) = \sqrt{\pi/(2z)} Y_{n+\frac{1}{2}}(z)$	9.6
Then:	
$j_0(z) = \frac{\sin z}{z},$	9.7
$y_0(z) = -\frac{\cos z}{z}$	9.8
And for $n = 0, 1, 2, \dots$	
$j_n(z) = (-z)^n \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right]^n \frac{\sin z}{z},$	9.9
$y_n(z) = -(-z)^n \left[\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right]^n \frac{\cos z}{z}$	9.10
Regular $j_n(z)$	
$j_n(z) = 2^n z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k+n)!}{k!(2k+2n+1)!} z^{2k}$	9.11
Small argument expansion about $z = 0$	
$j_n(z) \rightarrow \frac{z^n}{(2n+1)!!}$	9.12
Large argument expansion about $z \rightarrow \infty$	
$j_n(z) \rightarrow \frac{\sin(z - n\pi/2)}{z}$	9.13

Irregular solution or second solution : $n_n(z)$	
$n_n(z) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n z^{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-n)!}{k!(2k-2n)!} z^{2k}$	9.14
Small argument expansion.	
$n_n(z) \rightarrow -\frac{(2n-1)!!}{z^{n+1}}$	9.15
Large argument expansion	
$n_n(z) \rightarrow -\frac{\cos(z - n\pi/2)}{z}$	9.16
Generating function: not available	
Recurrence Relations: Regular and irregular solutions have same recurrence	
Relations	
$(2n+1)f'_n(z) = nf_{n-1}(z) - (n+1)f_{n+1}(z)$	9.17
$(2n+1)f_n(z) = z[f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z)]$	9.18
Orthogonality and Normalization	
$\int_{-\infty}^{\infty} j_n(x)j_m(x)dx = \frac{\delta_{nm}\pi}{2n+1}$	9.19
$\int_0^L j_m(\kappa_{ml}\rho)j_n(\kappa_{nn}\rho)\rho^2 d\rho = \frac{L^3}{2} j_{m+1}^2(\kappa_{ml}L)\delta_{nl}$	9.20
Rodrigues-type Formula	
$j_n(x) = (-x)^n \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \frac{\sin x}{x}$	9.21

10. Chebyshev polynomials first kind (common)

Physical Origins

Type I Chebyshev polynomials are encountered frequently in numerical analysis and approximation theory.



Differential equation

$$(1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2T_n(x) = 0$$

10.1

Self-Adjoint Form

With $p_0(x) = \sqrt{1-x^2}$, $p_1(x) = 2x/\sqrt{1-x^2}$, $p_2(x) = 0$, $\lambda = n^2$, $w(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$

$$\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{dT_n(x)}{dx} \right) + \frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) = 0$$

10.2

Interval

$-1 \leq x \leq 1$. singular points $x = -1, 1$

Solutions	
$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$	10.3
$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^m \frac{(n-m-1)!}{m!(n-2m)!} (2x)^{n-2m} = T_n(x) = \cos(n \cos^{-1}(x))$	10.4
Small argument expansion about $x = 0$	
$T_{2n} = (-1)^n (1 - 2n^2x + \dots)$	10.5
$T_{2n+1} = (-1)^n (nx + \dots)$	10.6
Large argument expansion, $x \approx \pm 1$	
$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$	10.7
Weight: $p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10.8
Generating Function	
$\frac{1-t^2}{1-2xt+t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)t^n$	10.9
Recurrence Relations (Samples)	
$(1-x^2)T'_n(x) = -n x T_n(x) + n T_{n-1}(x)$	10.10
$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$	10.11
Orthogonality and Normalization	
$T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$	10.12

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \delta_{nm} & \text{for } n \neq 0 \\ \pi & \text{for } n = m = 0 \end{cases} \quad 10.13$$

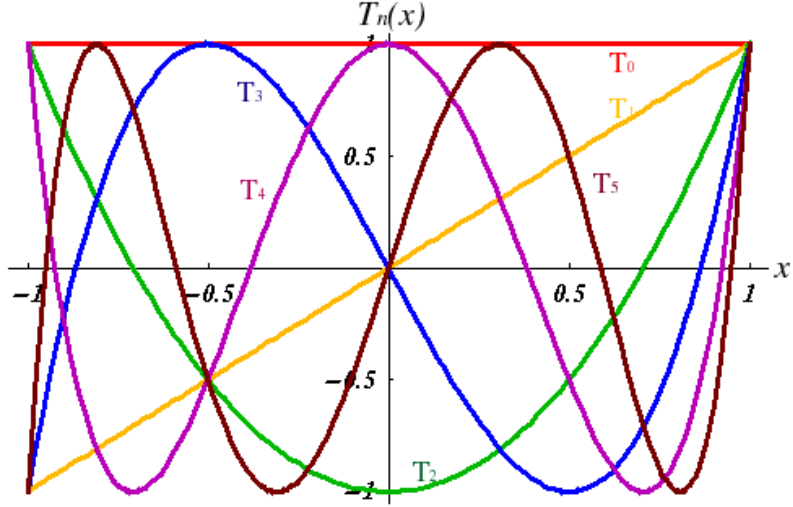
Rodrigues-type Formula

$$T_n(x) = (-1)^n \frac{\sqrt{\pi} \sqrt{1-x^2}}{2^n (n-\frac{1}{2})!} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{1-x^2}} \quad 10.14$$

Schlaefli-type Integral Representation

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c(0)} \frac{(1-z^2)}{(1-2xz-z^2)z^{n+1}} dz = 2T_n(x), \quad (n > 0) \quad 10.15$$

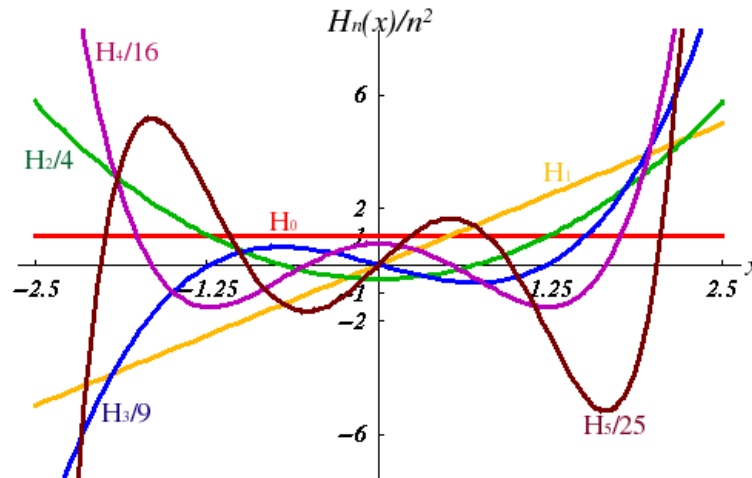
Chebyshev Polynomial of the Second Kind



11.Hermite

Physical Origins

Solution of the quantum harmonic oscillator in one dimension.



Differential Equation

$$y''(x) - 2xy'(x) + 2\alpha y(x) = 0$$

11.1

Standard and Self-Adjoint Form

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH(x) = 0$$

11.2

With $p_0(x) = e^{-x^2}$, $p_1(x) = -2xe^{-x^2}$, $p_2(x) = 0$, $w(x) = e^{-x^2}$, $\lambda = 2n$

11.3

$$\frac{d}{dx} \left(e^{-x^2} \frac{d}{dx} y(x) \right) + 2ne^{-x^2} y(x) = 0$$

11.4

Interval

Physical interval: $-\infty \leq x \leq \infty$, no regular singular points. irregular singular point, $x = \pm\infty$

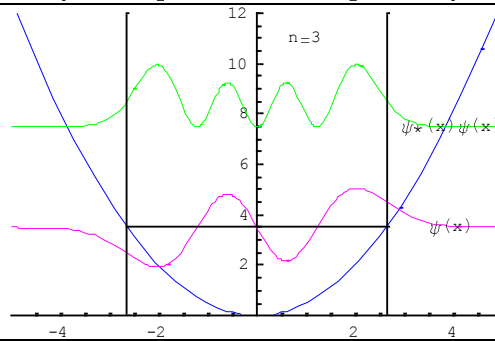
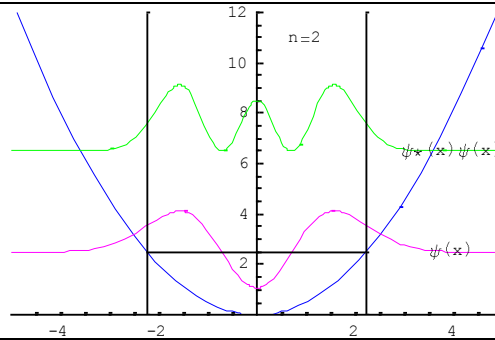
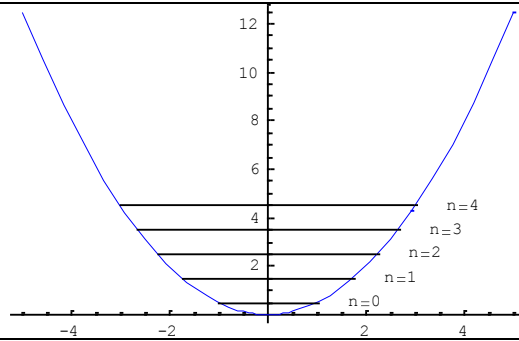
Solutions	
$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x$	11.5
$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n!}{(n-2k)!k!} (2x)^{n-2k}$	11.6
Small argument expansion about $x = 0$	
$H_{2n}(x) \approx (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} (1 - 2nx^2 + \dots)$	11.7
$H_{2n+1}(x) \approx (-1)^n \frac{(2n)!}{n!} \left(2x - \frac{n(2x^3)}{3!} + \dots \right)$	11.8
Large argument expansion, $x \rightarrow \infty$	
$H_n(x) \approx (2x)^n$	11.9
Generating Function	
$g(x, t) = e^{-t^2 + 2tx} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$	11.10
Recurrence Relations	
$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$	11.11
$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$	11.12
Orthogonality and Normalization	
$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$	11.13
Rodrigues-type Formula	

$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}$	11.14
<p>Schlaefli-type Integral Representation</p>	
$H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{c(z=0)} \frac{e^{-z^2+2zx}}{z^{n+1}} dz$	11.15

12. Simple Harmonic Oscillator

Physical Origins

Ubiquitous



Differential Equation

Standard and Self-Adjoint Form

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + k^2 y(x) = 0$$

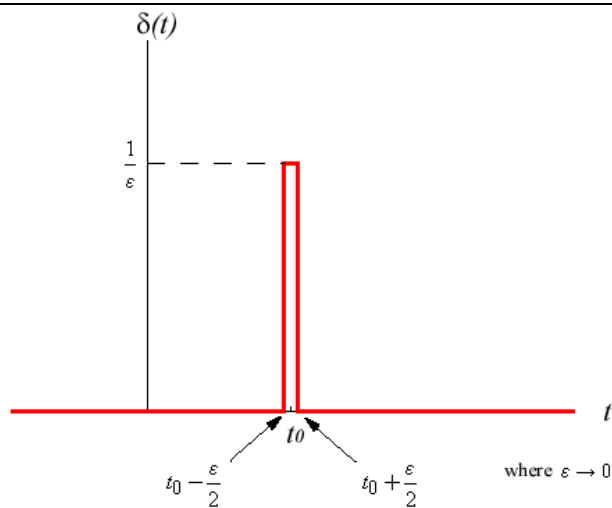
12.1

Interval:	
Infinite $x \in (-\infty, \infty)$ or finite $x \in (0, L)$	
Singular points: No Regular Singular Points. Irregular Singular Points, $x = \pm\infty$	
Solutions:	
$\sin kx$ and $\cos kx$ or e^{ikx} with $k_n = \frac{2n\pi x}{L}$	12.2
With periodic boundary conditions.	
Small argument expansion about $x = 0$	
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$ and $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$	12.3
Orthogonality and Normalization	
$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')} = \delta(k-k')$	12.4
$\frac{1}{L} \int_0^L e^{i(k_n-k_m)} = \delta_{nm}$	12.5

13. Dirac delta function

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

13.1



Properties of Dirac delta function

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

13.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a)$$

13.3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

13.4

$$\int f(x) \delta'(x-a) = -f'(a)$$

13.5

$$\int f(x) \delta^n(x-a) = (-1)^n f^n(a)$$

13.6

$\delta'(x) = -\frac{1}{x} \delta(x)$	13.7
$\delta^k(x) = (-1)^k \frac{k!}{x^k} \delta(x)$	13.8
$\delta(kx) = \frac{1}{ k } \delta(x)$	13.9
$\delta(x) = \delta(-x)$	13.10
$\delta'(x) = -\delta'(-x)$	13.11
$\delta(x-a) = \delta(a-x)$	13.12
$\delta[f(x)] = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{\left \frac{df}{dx} \right _{x_i}}$ $x_i = \text{zero, of } f(x)$	13.13
$\int \delta(x-a)\delta(x-b)dx = \delta(a-b)$	13.14
Delta in spherical coordinates :	
$\delta^3(x-x') = \frac{1}{r^2} \delta(r-r')\delta(\cos-\cos\theta')\delta(\phi-\phi')$	13.15
Delta in cylindrical coordinates :	
$\delta^3(x-x') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho-\rho')\delta(\phi-\phi')\delta(z-z')$	13.16
Relation with step function:	
$\frac{d\theta}{dx}(x-x') = \delta(x-x')$	13.17
$\frac{d\theta}{dx}(x'-x) = -\delta(x'-x)$	13.18

14.Heaviside Unit Step Function

$$U(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

14.1

