

Chapter 5

دوال "بيسيل"

(Bessel Functions)

دوال "بيسيل" من النوع الأول والثاني (Bessel functions of the First and second kind $J_\ell(x)$, $N_\ell(x)$)
 المعادلة التفاضلية Differential equation
 معادلة بيسيل التفاضلية من الدرجة الثانية:

$$\left[x^2 \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + (x^2 - \ell^2) \right] y(x) = 0, \quad \ell \geq 0 \quad (1)$$

حلها العام من الدرجة ℓ هو:

$$y(x) = A J_\ell(x) + B N_\ell(x)$$

حيث A و B ثوابت. الحل الأول $J_\ell(x)$ يسمى دالة بيسيل من النوع الأول، وهي دالة منتظمة في المدى $\{0, \infty\}$. الحل الثاني $N_\ell(x)$ هو دالة بيسيل من النوع الثاني وتسمى دالة نيومان، وهي دالة شاذة (Singular) لها القيمة $-\infty$ عند نقطة الأصل $x = 0$. ينصب اهتمامنا دائما على الدوال المنتظمة في المدى المطلوب.

تعريف النوع الأول Definition of the first kind

$$J_\ell(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\ell+2k};$$

$$J_{-\ell}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\ell+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\ell+2k}$$

$$J_{-\ell}(x) = (-1)^\ell J_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

إذا كانت $\ell \neq 0, 1, 2, \dots$ نجد أن الدوال $J_\ell(x)$ و $J_{-\ell}(x)$ هي دوال مستقلة، وتكون الدوال $J_\ell(x)$ محدودة عند نقطة الأصل، بينما تكون الدوال $J_{-\ell}(x)$ غير محدودة.

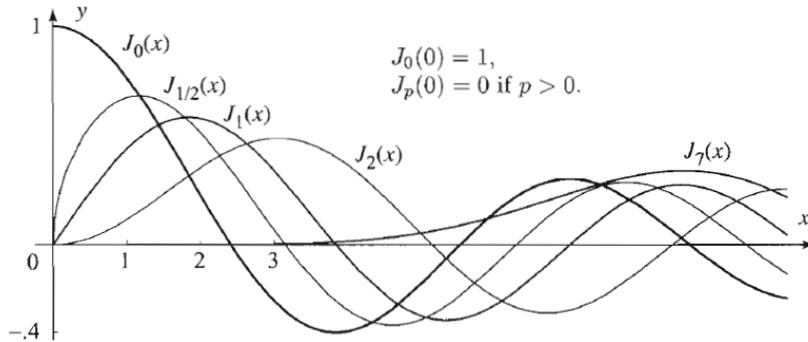


Figure 1 Graphs of $J_p(x)$ for $p = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, 7$.

أمثلة: تحقق من القيم التالية:

$$1- J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots$$

$$2- J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^4} + \frac{x^5}{2^7 \cdot 3} + \dots$$

3-

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{1! \Gamma(\frac{5}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2! \Gamma(\frac{7}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{9}{2}} + \dots \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x) \end{aligned}$$

تحقق من الحلول التالية من النوع الأول فقط:

$$1- \text{the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \left\{ x^2 - \frac{1}{9} \right\} y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_{1/3}(x) + c_2 J_{-1/3}(x)$$

$$2- \text{the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + x^2 y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_0(x)$$

$$3- \text{the solution of the equation } x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + \{x^2 - 1\} y = 0 \text{ is}$$

$$y = c_1 J_1(x)$$

دالة مولدة Generating function

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t^{\ell} J_{\ell}(x)$$

بعض من العلاقات التكرارية Recurrence relations

$$J_{\ell+1}(x) = \frac{2n}{x} J_{\ell}(x) - J_{\ell-1}(x);$$

$$\frac{d}{dx} J_{\ell}(x) = \frac{1}{2} \{ J_{\ell-1}(x) - J_{\ell+1}(x) \}$$

ℓ	$J_\ell(x)$	$J_{-\ell}(x)$
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$
$\frac{3}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\sin x}{x} - \cos x \right]$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\frac{\cos x}{x} + \sin x \right]$
$\frac{5}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \sin x - \frac{3}{x} \cos x \right\}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \left(\frac{3}{x^2} - 1 \right) \cos x + \frac{3}{x} \sin x \right\}$

تعريف النوع الثاني من الدرجة ℓ تسمى دوال نيومان، والتي تعرف كالتالي:

$$N_\ell(x) = Y_\ell(x) = \frac{1}{\sin(\ell\pi)} [J_\ell(x) \cos(\ell\pi) - J_{-\ell}(x)]$$

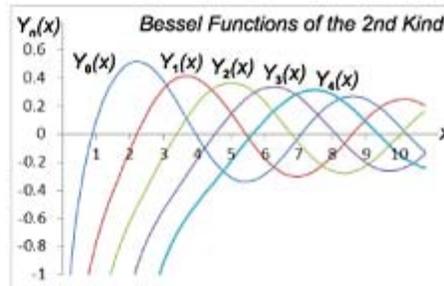
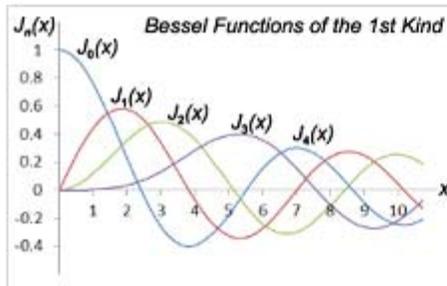
$$= \frac{1}{\pi} \left[2 \ln \frac{x}{2} + 2\gamma - \sum_{k=1}^{\ell} \frac{1}{k} \right] J_\ell(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\ell-1} \frac{(\ell-k+1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right)^{-\ell+2k}$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+\ell)!k!} \left\{ \sum_{r=1}^k \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+\ell} \right) \right\} \left(\frac{x}{2} \right)^{\ell+2k}$$

$$N_{-\ell}(x) = (-1)^\ell N_\ell(x); \quad \ell = 0, 1, 2, \dots$$

ولها القيمة $-\infty$ عند نقطة الأصل. الرمز γ هو ثابت "أويلر" ويعطى بالقيمة:

$$\gamma = 0.5772156649 = -\psi(1); \quad \psi(z) = \frac{d \ln \Gamma(z)}{dz}$$



1- $x^2 y'' + xy' + (3x^2 - 2)y = 0$. Ans: $y(x) = C_1 J_{\sqrt{2}}(\sqrt{3}x) + C_2 Y_{\sqrt{2}}(\sqrt{3}x)$.

2- The Airy differential equation known in astronomy and physics has the form:

$$y'' - xy = 0$$

It can be also reduced to the Bessel equation. Its solution is given by the Bessel functions of the fractional order $\pm \frac{1}{3}$:

$$y(x) = C_1 \sqrt{x} J_{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} ix^{\frac{3}{2}} \right) + C_2 \sqrt{x} J_{-\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3} ix^{\frac{3}{2}} \right).$$

التجميعات التالية:

$$H_{\ell}^{(1)} = J_{\ell}(x) + iN_{\ell}(x)$$

$$H_{\ell}^{(2)} = J_{\ell}(x) - iN_{\ell}(x)$$

تسمى دوال "هنكل" من النوع الأول والثاني بالترتيب.

دوال "بيسيل" الكروية (Spherical Bessel Functions $j_{\ell}(x)$, $n_{\ell}(x)$)

بمعادلة بيسيل وللقيم $n = \ell + \frac{1}{2}$ ($\ell = 0, 1, 2, \dots$) لو استخدمنا التعويض $f(x) = y(x) / \sqrt{x}$ سنحصل على المعادلة التفاضلية:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{df}{dx} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \right] f(x) = 0$$

وتسمى معادلة بيسيل الكروية والحل العام لها هو:

$$f(x) = A_{\ell} j_{\ell}(x) + B_{\ell} n_{\ell}(x),$$

حيث A_{ℓ} و B_{ℓ} ثوابت اختيارية. معادلة بيسيل الكروية شبيهة بمعادلة شرودنجر في حالة انعدام الجهد، و $x = kr$ ، حيث k هو العدد الموجي.

تعرف دوال بيسيل الكروية كالتالي:

$$j_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = (-x)^{\ell} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

وتعرف دوال نيومان الكروية كالتالي:

$$n_{\ell}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{\ell+\frac{1}{2}}(x) = -(-x)^{\ell} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^{\ell} \left(\frac{\cos x}{x} \right)$$

جدول لبعض القيم

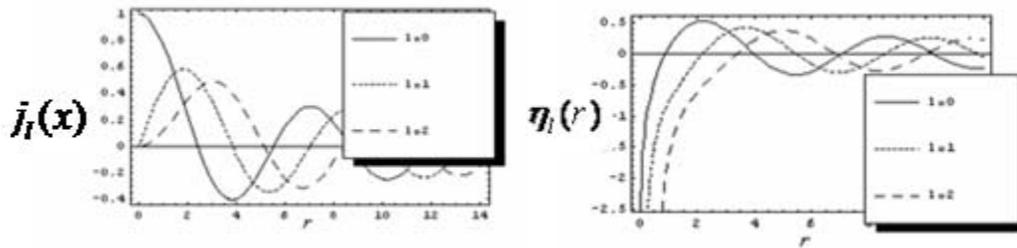
ℓ	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
0	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$
1	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$
2	$\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3}{x^2}\cos x$	$-\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3}{x^2}\sin x$

السلوك التقاربي عندما $x \rightarrow 0$ و $x \rightarrow \infty$ هو

الشرط	$j_\ell(x)$	$n_\ell(x)$
$x \rightarrow 0$	$\frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}$	$\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}$
$x \rightarrow \infty$	$\frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$	$-\frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\ell\right)$

حيث $(2\ell+1)!! = (2\ell+1)(2\ell-1)(2\ell-3)\dots 4 \cdot 3 \cdot 1$

الشكل التالي يوضح الدالتين $j_\ell(r)$ و $n_\ell(r)$ لقيم مختلفة للمسافة r .



و تعرف أيضاً دوال هنكل الكروية كالتالي:

$$h_\ell^{(1)} = j_\ell(x) + in_\ell(x)$$

$$h_\ell^{(2)} = j_\ell(x) - in_\ell(x)$$

الجهود المتماثلة كروياً

يقال عن طاقة الجهد $V(r)$ بأنها متماثلة كروياً (Spherically symmetric) إذا كانت $V(r)$ لا تتغير بالدوران (Rotationally invariant)، ولهذا فإن $V(r)$ تعتمد فقط على المسافة $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ من مركز القوة، والتي ستختار كنقطة أصل للإحداثيات. من ثم فإن الأسطح المتساوية في الجهد تتكون من سطوح كرات مركزية (قشرة Shell) تبعد عن المركز بالمسافة الثابتة $|r| = \text{constant}$. ومميزات الجهد المركزي هي:

- 1- إن كمية الحركة المدارية L له تكون محفوظة (ثابتة)،
- 2- منه نستطيع تعريف القوة المركزية بالمعادلة:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -\frac{\mathbf{r}}{r} \frac{\partial V}{\partial r}$$

أ- اختزال (تبسيط) مسألة القوى المركزية:
لجسيم كتلته μ يتحرك في مجال قوة مركزية نجد أن الهملتونيان يعرف له كالتالي:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = \frac{\hat{P}^2}{2\mu} + V(r)$$

وله صفة التبادل مع مؤثرات كمية الحركة المدارية، على سبيل المثال:

$$[\hat{H}, \hat{L}] = [\hat{H}, \hat{L}^2] = [\hat{H}, \hat{L}_z] = 0$$

وحيث إن:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0$$

لذلك فإن المؤثرات \hat{H} و \hat{L}_z ، \hat{L}^2 يصبح لهن دالة مميزة مشتركة. دعونا نعرف الدالة في الإحداثيات الكروية بالشكل التالي:

$$\Psi(\mathbf{r}) = R(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi)$$

ومنها نجد أن معادلة شرودنجر (راجع ذرة الهيدروجين) تصبح:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hat{L}^2}{2\mu r^2} + V(r) \right] \Psi = E \Psi$$

وتأخذ المعادلة القطرية الشكل:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r)$$

وهي معادلة تفاضلية مبنية على فصل المتغيرات للمؤثر ∇^2 (ويُدعى لابلاسيان) في الإحداثيات الكروية. من الملائم أيضاً أن نستخدم التعويض التالي:

$$u(r) = rR(r)$$

لنجد أن $u(r)$ تحقق المعادلة القطرية:

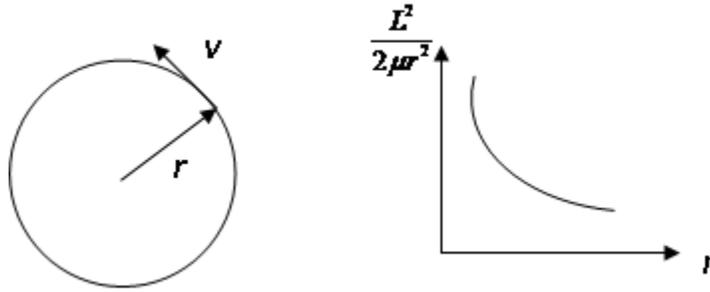
$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] u = Eu$$

وهي متطابقة في الصيغة مع معادلة شرودنجر ذات البعد الواحد مع الاختلاف في تعريف الجهد المؤثر بالشكل:

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$$

الحد الإضافي بالجهد، $\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}$ ، يسمى الجهد الطارد المركزي (Centrifugal potential). وظهور هذا الحد الإضافي بالجهد يمكن تفهمه من مبادئ الميكانيكا التقليدية كالتالي: لجسيم كتلته μ ، يتحرك في مدار دائري نصف قطره r ، تنشأ عليه قوة طرد مركزية F_r تتجه قطعياً للخارج (كما بالشكل 1). قيمة القوة تحسب من المعادلة:

$$F_r = \mu \frac{v^2}{r} = \frac{L^2}{\mu r^3},$$



شكل (1) أ- الجهد الطارد المركزي ب- جسيم يتحرك في مدار دائري

حيث عرفنا $L = \mu v r$ بكمية الحركة الزاوية للمدار الدائري. ويعرف الجهد بالعلاقة $V(r) = \frac{L^2}{2\mu r^2}$ (نتيجةً لأن

$$F_r = -\frac{\partial V}{\partial r}).$$

وتبعاً لفروض ميكانيكا الكم، يجب أن نستعيض عن L^2 بالقيمة المميزة لها وهي $l(l+1)\hbar^2$.

على الرغم من تطابق المعادلة السابقة مع معادلة شرودنجر ذات البعد الواحد، فإن الشروط الحدودية المطلوبة للحل مختلفة تماماً، حيث r موجبة. ولتكون الدالة محددة في كل الأماكن فيجب أن نضع هنا الشرط الحدودي $u(0) = 0$ أي أنها تنعدم عند مركز القوى.

في حالة الموجة- s ، وتعني أن $l = 0$ ، فإن المعادلة القطرية تؤول إلى:

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + [E - V(r)]u = 0$$

ب- حركة الجسيم الحر:

عندما نضع الجهد $V(r) = 0$ و $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ لنجد أن حركة الجسيم الحر تتحقق بالمعادلة:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2 \right] R_l(k, r) = 0$$

باستخدام المتغيرات $\rho = kr$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \left(1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right) \right] R_l(\rho) = 0$$

وهي معادلة بسل التفاضلية الكروية، وحلها العام هو:

$$R_l(\rho) = A j_l(\rho) + B n_l(\rho)$$

حيث A و B ثوابت اختيارية، j_l هي دالة بسل الكروية و n_l هي دالة نيومان الكروية.

والجدول التالي يوضح الدوال $j_l(x)$ ، n_l للمتغير x والدالة $P_l(\cos \theta)$ لقيم مختلفة للمتغير $\cos \theta$.

l	$P_l(\cos \theta)$	$J_l(x)$	n_l
0	1	$\frac{\sin x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x}$
1	$\cos \theta$	$\frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}$	$-\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}$
2	$\frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)$	$\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\sin x - \frac{3\cos x}{x^2}$	$-\left(\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x}\right)\cos x - \frac{3\sin x}{x^2}$

وحيث إن الحل عند المركز يجب أن يكون منتظماً ومحدوداً القيمة (finite and regular) فيجب وضع $B = 0$. بالتالي فإن:

$$R_l(k, r) = Cj_l(kr)$$

وحيث إن القيم المميزة k هي قيم موجبة، لذلك نجد أن الطاقة $E = \frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$ تأخذ جميع القيم الموجبة في المدى $\{0, \infty\}$ ، وتُمثَّل

بطيف مستمر (continuous spectrum). وقد رأينا سابقاً أن الجسيم الحر، ذو كمية الحركة $p = \hbar k$ والطاقة $E = \frac{\hbar^2}{2\mu}k^2$ ،

يمكن تمثيله بواسطة موجة مستوية $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$. وحيث إن الدالة الكروية

$$\psi_{E,l,m}(r, \theta, \varphi) = Cj_l(kr)Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

تكون دالة كاملة فإننا نستطيع أن نضع الموجة المستوية $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ بدالاتها بالشكل:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm}(k) j_l(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

باختيارنا للمحور Z باتجاه المتجه \mathbf{k} ، فإن:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikz} = e^{ikr \cos \theta}$$

ولا تعتمد على الزاوية φ . باستخدام التعويض $w = \cos \theta$ نجد:

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kr) P_l(w) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l j_l(kr) Y_{lm}^*(\hat{k}) Y_{lm}(\hat{r})$$

$$\square_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(w)$$

$$\int u_{k'}^*(x) u_k(x) dx = \delta_{kk'} \quad \text{orthonormality}$$

$$\sum_k u_k^*(x') u_k(x) = \delta(x - x') \quad \text{completeness}$$

مثال: ادرس حركة جسيم، في الحالة ($l = 0$)، داخل بئر جهدي كروي التماثل، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{for } r < a \\ \infty, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: يتحرك الجسيم بحرية ضمن المدى $0 \leq r < a$ وتأخذ الدالة الصورة العامة:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) &= R(r)Y_{l,m}(\theta, \varphi) \\ &= [A j_l(kr) + B n_l(kr)] Y_{l,m}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

حيث A و B ثوابت اختيارية، ولكن الثابت B يؤول للصفر، حيث إن الدالة محددة عند المركز ($r = 0$). وحيث إن الجسيم لا يستطيع اختراق الحاجز عند الحد $r \geq a$ وهذا ناتج عن كون الحاجز لا حد لارتفاعه، بمعنى أن $V(a) = \infty$. لذلك فإن الدالة يجب أن تختفي (تؤول للصفر) عند الحد $r \geq a$ ، ومنه نستنتج أن:

$$j_l(ka) = 0$$

المعادلة الأخيرة تتحقق لقيم متعددة لجذور دالة بسل الكروية، ولنفترضها χ_{nl} ، انظر الجدول الآتي:

رقم الجذر	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$
1	3.14	4.493	5.763	6.99
2	6.28	7.725	9.09	10.42
3	9.43	10.90	12.32	13.70

ومنها نجد أن الطاقة تتحقق بالمعادلة:

$$E_{nl} = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\chi_{nl}}{a} \right)^2$$

مثال: ادرس حركة جسيم داخل بئر جهدي كروي التماثل محدد العمق، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & \text{for } r \leq a \\ 0, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: باستخدام المعادلة الموجية نجد أن:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - V_0(r)u = Eu, \quad r \leq a$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = Eu, \quad r > a$$

ومن دراستنا السابقة نجد أن الحل العام يمكن وضعه بالصورة:

$$u_{in}(r) = A \sin(k_{in} r) + B \cos(k_{in} r), \quad k_{in} = \sqrt{\frac{2\mu(V_0 - |E|)}{\hbar^2}} \quad r \leq a$$

$$u_{out}(r) = C e^{-k_{out} r}, \quad k_{out} = \sqrt{\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}} \quad r > a$$

حيث إن اهتمامنا يتجه نحو طاقة المدارات ذات المستويات المرتبطة (bound-state energy levels)، التي تتحقق من الشرط $E < 0$. والشرط الحدودي $u_{in}(0) = 0$ يتطلب $B = 0$.

وحيث إن الدالة ومشتقاتها يجب أن تكون متصلة خلال الحد $r = a$ فنجد أن الشرط الحدودي:

$$\left. \frac{\left(\frac{du_{in}(r)}{dr} \right)}{u_{in}(r)} \right|_{r=a} = \left. \frac{\left(\frac{du_{out}(r)}{dr} \right)}{u_{out}(r)} \right|_{r=a}$$

يعطينا المعادلة:

$$k_{in} \cot k_{in} = -k_{out}$$

وبضرب المعادلة الأخيرة بالمقدار a واستعمال العلاقتين:

$$\xi = ak_{in}, \quad \eta = ak_{out}$$

نصل إلى المعادلة:

$$\xi \cot \xi = -\eta, \quad \eta^2 + \xi^2 = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} a^2$$

واجب منزلي: ارسم الدالة $\xi \cot \xi = -\eta$ ومن الرسم أثبت أنه لا يوجد مدارات إلا إذا تحقق الشرط $V_0 a^2 > \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}$ ، ويوجد

$$\text{مستوى واحد مرتبط في حالة } \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu} < V_0 a^2 \leq \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8\mu}$$

مثال: ادرس حركة جسيم خارج بئر جهدي كروي التماثل، ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{for } r < a \\ \infty, & \text{for } r > a \end{cases}$$

الحل: يتحرك الجسيم بحرية ضمن المدى $r > a$ وتأخذ المعادلة القطرية لشروندجر خارج الكرة، $V(r) = 0$ ، الصورة:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r)$$

وهي معادلة تفاضلية مكافئة لمعادلة بيسيل الكروية في الإحداثيات الكروية بالشكل:

$$\frac{d^2 R_\ell(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR_\ell(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right] R_\ell(\rho) = 0, \quad \rho = kr, \quad k^2 = 2\mu E / \hbar^2$$

وحلها العام هو:

$$R_\ell(\rho) = a_\ell j_\ell(\rho) + b_\ell n_\ell(\rho)$$

ومع الشرط الحدودي: $R_\ell(a) = 0$ ، نتيجة للجهد $V(a) = \infty$ ، فإننا نجد:

$$a_\ell j_\ell(ka) + b_\ell n_\ell(ka) = 0 \Rightarrow \tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)}$$

حيث استخدمنا $a_\ell = A_\ell \cos \delta_\ell$, $b_\ell = -A_\ell \sin \delta_\ell$ هنا تظهر حالتان للدراسة:

أ- احسب $\tan \delta_\ell$ عندما $ka \ll 1$

نستخدم التقريب التالي

$$j_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} (ka)^\ell, \quad n_\ell(ka) \underset{k \rightarrow 0}{\square} -(ka)^{-\ell-1}$$

ومنه ينتج أن

$$\tan \delta_\ell = \frac{j_\ell(ka)}{n_\ell(ka)} = -(ka)^{2\ell+1}$$

ونلاحظ أن δ_ℓ تقل بسرعة مع زيادة قيم ℓ ومن ثم فإن الموجة S المقابلة للقيمة $\ell = 0$ هي القيمة الدائمة

$$\tan \delta_0 = \frac{j_0(ka)}{n_0(ka)} = -ka$$

المقطع المستعرض الكلي للتشتت يحسب بالمعادلة:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0 = 4\pi a^2$$

نجد هنا أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت أربعة أمثال القيمة الكلاسيكية πa^2 . هذا يرجع للخواص الموجية للجسيمات ومنها ظاهرة الحيود.

ب- التشتت عند الطاقات العالية $ka \gg 1$

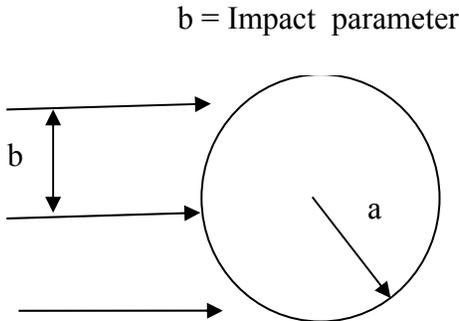
$$\tan \delta_l = -\frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} \approx -\frac{\sin(ka - l\pi/2)}{\cos(ka - l\pi/2)} = -\tan(ka - l\pi/2)$$

$$\Rightarrow \delta_l = -(ka - l\pi/2)$$

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l,$$

عند الطاقات العالية فإن التشتت لا يحدث للجسيمات البعيدة عن المركز، $b > a$ ، ولكن يحدث للجسيمات القريبة، $b < a$ ، انظر: الشكل المرافق، وحيث إن كمية الحركة الزاوية مكتمة، بمعنى أن

$$\underbrace{mvb}_{\hbar k} = \ell \hbar \quad \text{إذاً: } \ell_{\max} \approx ka$$



$$\begin{aligned}
\sigma_{total} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \frac{[1-2\cos(ka-\ell\pi/2)]}{2} \\
&\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) - \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \underbrace{\cos(ka-\ell\pi/2)}_{(-1)^{\ell}} \\
&\approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} (2\ell+1) \approx \frac{2\pi}{k^2} (\ell_{\max}+1)^2 \approx \frac{2\pi}{k^2} \ell_{\max}^2 \approx 2\pi a^2
\end{aligned}$$

ملاحظات:

1- تم إهمال الجزء $\cos(ka-\ell\pi/2) = (-1)^{\ell}$ حيث إنه يتذبذب بين قيم موجبة وسالبة، ومن ثم فإن مجموعه النهائي يصبح كمية منعدمة.

2- استخدمنا العلاقة التجميعية $\sum_{\ell=0}^{\ell_{\max}} \ell = \ell_{\max}(\ell_{\max}+1)/2$ بالخطوة الأخيرة.

3- نجد هنا أيضاً أن قيمة المقطع المستعرض الكلي للتشتت ضعف القيمة الكلاسيكية πa^2 .