

البرهان

حتى نبرهن أن إضافة w لكل ضلع أمامي وطرحها من كل ضلع عكسي سيعطي تدفقا x^* فإن علينا أن نبرهن أن x^* تحافظ على قانون حفظ الطاقة، بمعنى أنه لأي رأس $j \neq 1, n$ فإن

$$\sum_{i=1}^n x_{ij}^* - \sum_{k=1}^n x_{jk}^* = 0$$

نناقش الآن الحالتين الآتيتين.

الحالة الأولى: إذا لم يكن الرأس j واحدا من رؤوس المسار P فمن الواضح في هذه الحالة أن قانون حفظ الطاقة سيكون محققا وذلك لأن التدفق الجديد x_{ij}^* يكون مساويا بالتعريف للتدفق السابق x_{ij} والذي بطبيعة الحال سيكون محققا لقانون حفظ الطاقة.

الحالة الثانية: إذا كان الرأس j أحد رؤوس المسار P . في هذه الحالة فإن x_{ij}^* ستأخذ إما القيمة $x_{ij} + w$ أو القيمة $x_{ij} - w$. وبما أن x_{ij} هو أساسا تدفق فكل مانحتاجه هو أن نوضح بأن الـ w 's ستلغي بعضها البعض. الآن لأي رأس j في المسار P فإن التغير في التدفق سيحدث فقط في الضلعين $(i, j), (j, k)$ الملاصقين لذلك الرأس. لذا فإن علينا أن نوضح أن الـ w 's ستلغي بعضها البعض في هذين الضلعين فقط. فيما يلي نوضح ذلك بمناقشة الأوضاع المختلفة لهذين الضلعين:

- كلاهما أمامي أو كلاهما عكسي: في هذه الحالة فإن واحدة من الـ w 's ستقع في المجموع الأيسر في المعادلة السابقة والأخرى ستقع في المجموع الأيمن وبالتالي فإنهما سيلغيان بعضهما البعض.
- أحدهما أمامي والآخر خلفي: في هذه الحالة فإن الـ w 's الأولى والثانية ستقعان في نفس المجموع ولكن بإشاراتين مختلفتين، وبالتالي فإنهما سيلغيان بعضهما البعض كذلك.

من المناقشة السابقة يتضح لنا أن x_{ij}^* سيكون محققا لقانون حفظ الطاقة، وبالتالي فإن x_{ij}^* تمثل تدفقا جديدا. بقي علينا أن نبرهن أن قيمة التدفق x_{ij}^* تزيد

عن قيمة التدفق x_{ij} بالمقدار ω . من اجل هذا سنفرض أن قيمة التدفق x هي v . الآن من تعريف قيمة التدفق فإن

$$z^* = \sum_k x_{1k}^*$$

بما أن واحد من الرؤوس سيقع ضمن المسار P ، ليكن الرأس r مثلاً، لذا فإن

$$\begin{aligned} z^* &= \sum_{\substack{k \\ k \neq r}} x_{1k}^* + x_{1r}^* \\ &= \sum_{\substack{k \\ k \neq r}} x_{1k} + (x_{1r} + \omega) \\ &= \sum_k x_{1k} + \omega \\ &= v + \omega \end{aligned}$$

وهذا ينهي برهان النظرية.

□

٦-٤-٦ خوارزمية العنونة The Labeling Algorithm

يمكننا الآن الاعتماد على النظرية السابقة في بناء خوارزمية ذات كفاية عالية لإيجاد التدفق الأعظمي في الشبكات. كل ما نحتاجه هو أن نبدأ بتدفق ما وليكن التدفق الصفري مثلاً، ثم نحاول إيجاد مسار لتحسين ذلك التدفق، إن كان ذلك ممكناً. سنبرهن فيما بعد أنه في حالة عدم وجود مثل هذه المسارات والتي تحقق شروط النظرية السابقة فإن التدفق سيكون أمثلًا وبهذا نتوقف.

تتلخص هذه الخوارزمية بما يلي:

١. نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون كل ضلع بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij}) ثم

نجري الخطوات الآتية:

٢. عنون الرأس ١ أي المنبع بالعنوان "منبع" واجعل ١ أول عنصر في القائمة L .

٣. بافتراض أن i هو أول عنصر في L ولكل رأس z غير معنون بحيث أن $(i, z) \in E$:

• إذا كان (i, z) ضلعا اماميا وكانت $c_{iz} > x_{iz}$ فعنون الرأس z

بالزوج المرتب (i, z) ثم ضع z في آخر القائمة L .

• إذا كان (i, z) ضلعا عكسيا أي $(z, i) \in E$ وكانت $x_{iz} > 0$

فعنون الرأس z بالزوج المرتب (z, i) ثم ضع z في آخر القائمة L .

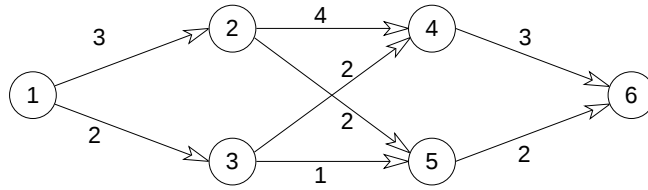
٤. إحدف i من القائمة L .

٥. كرر الخطوتين ٣، ٤ أعلاه حتى تصبح القائمة L فارغة.

٦. احسب التدفق الجديد باستخدام العلاقات (6.3.5).

مثال ١٢-٤-٦

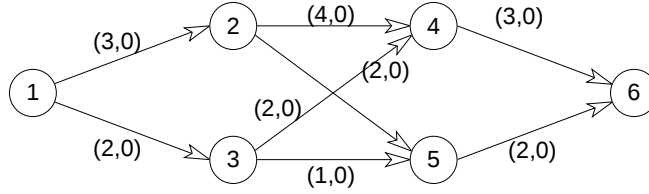
أحسب قيمة التدفق الأعظم في الشكل ٦-٤-٦:



الشكل ٦-٤-٦

الدورة الأولى

١. في البداية نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون كل ضلع من أضلاع الشبكة بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij}) كما هو مبين في الشكل ٧-٤-٦:



الشكل ٦-٤-٧

٢. نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,2)2(2,4)4(4,6)6$$

٣. نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن

$$\omega = \min(3,4,3) = 3$$

ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{24} = x_{46} = 3 \\ x_{ij} = 0 \text{ others } i, j \end{cases}$$

الدورة الثانية:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

• نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,3)3(3,5)5(5,6)6$$

• نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن

$$\omega = \min(2,1,2) = 1$$

ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{24} = x_{46} = 3 \\ x_{13} = x_{35} = x_{56} = 1 \\ x_{ij} = 0 \text{ others } i, j \end{cases}$$

الدورة الثالثة:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,3)3(3,4)4(4,2)2(2,5)5(5,6)6$$

- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن $\omega = \min(1,2,3,2,1) = 1$

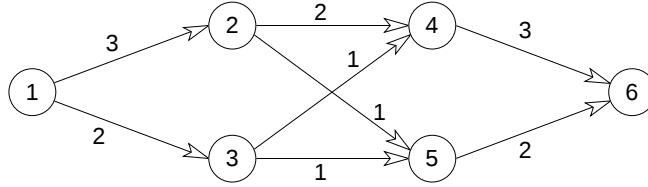
ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{46} = 3 \\ x_{56} = x_{24} = x_{13} = 2 \\ x_{25} = x_{35} = x_{34} = 1 \end{cases}$$

الدورة الرابعة:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

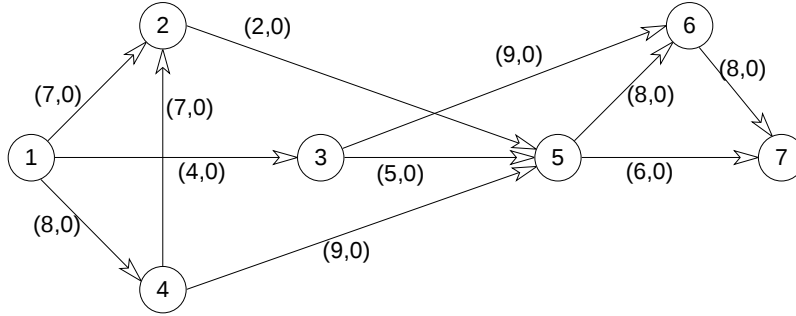
نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنعنون الرأس 1 ثم لا نستطيع عنونة أي رأس آخر وبالتالي نكون قد حصلنا على التدفق الأعظمي ذو القيمة 5 الموضح في الشكل ٦-٤-٨:



الشكل ٦-٤-٨

مثال ٦-٤-١٣

أحسب قيمة التدفق الأعظم في الشبكة الآتية:



الشكل ٦-٤-٩

الدورة الأولى

١. في البداية نبدأ بالتدفق الصفري ونعنون لكل ضلع بالزوج المرتب (c_{ij}, x_{ij}) كما هو مبين في الشكل السابق.
٢. نتبع الخطوات من ٥-٢ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,2)2(2,5)5(5,7)7$$

٣. نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن

$$\omega = \min(6, 2, 7) = 2$$

ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{25} = x_{57} = 2 \\ x_{ij} = 0 \text{ others } i, j \end{cases}$$

الدورة الثانية:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٥-٢ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,3)3(3,5)5(5,7)7$$

- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن

$$\omega = \min(4, 5, 4) = 4$$

ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{25} = 2 \\ x_{13} = x_{35} = 4 \\ x_{57} = 6 \\ x_{ij} = 0 \text{ others } i, j \end{cases}$$

الدورة الثالثة:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنحصل على المسار التالي:

$$P:1(1,4)4(4,5)5(5,6)6((6,7)7$$

- نتبع الخطوات من ٥-٦ في خوارزمية العنونة لحساب ω فنجد أن

$$\omega = \min(8,8,9,8) = 8$$

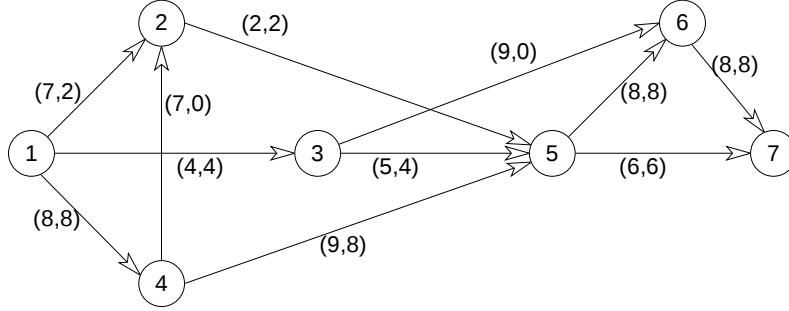
ثم نحسب x_{ij}^* فنجد

$$x_{ij}^* = \begin{cases} x_{12} = x_{25} = 2 \\ x_{13} = x_{35} = 4 \\ x_{57} = 6 \\ x_{67} = x_{56} = x_{45} = x_{14} = 8 \\ x_{ij} = 0 \text{ others } i, j \end{cases}$$

الدورة الرابعة:

نبدأ بالتدفق الجديد ونعيد الخطوات السابقة:

- نتبع الخطوات من ٢-٥ في خوارزمية العنونة فنعلنون الرأس 1 ثم نعلنون الرأس 2 خلال الضلع (1,2) ثم لا نستطيع عنونة أي رأس أخرى وبالتالي نكون قد حصلنا على التدفق الأعظم ذو القيمة 14 الموضح في الشكل ٦-٤-١٠:



الشكل ١٠-٤-٦

٦-٤-٧ نظرية التدفق الأعظمي-القاطع الأصغر

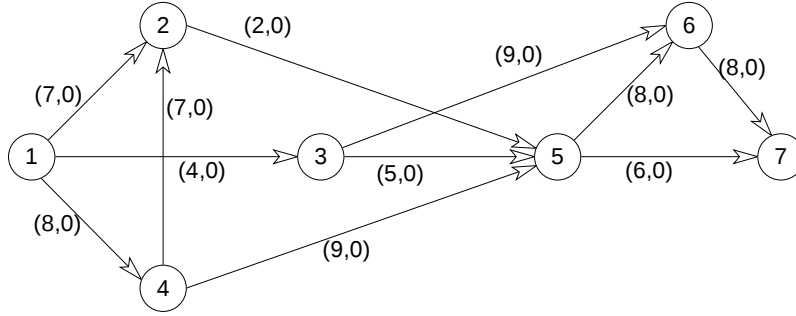
The Max-Flow, Min-Cut Theorem

نقدم فيما يلي بعض الأمور الرئيسية المتعلقة بمفهوم القاطع وعلاقته بمسألة التدفق الأعظم.

تعريف ١٤-٤-٦

باعتبار الشبكة $N = (V, E)$ ، يعرف القاطع بأنه أي تجزئه لمجموع الرؤوس V إلى مجموعتين منفصلتين بحيث يقع المنبع في أحدها وتسمى مجموعة المنبع وبحيث يقع المصب في الأخرى وتسمى مجموعة المصب.

أي أن القاطع $\{S, T\}$ في الشبكة N يتكون من مجموعة الرؤوس S ومكملتها T بحيث أن الرأس $1 \in S$ والرأس $n \in T$. فعلى سبيل المثال في الشبكة الشكل ١١-٤-٦:



الشكل ١١-٤-٦

التجزئة

$$S = \{1,2,5\}$$

و

$$T = \{4,3,6,7\}$$

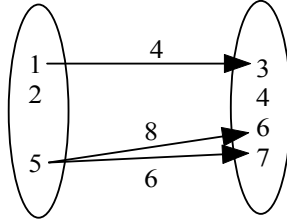
تعرف القاطع

$$C = \{S, T\}$$

تعريف ١٥-٤-٦

تعرف سعة القاطع $C = \{S, T\}$ ، والتي يرمز لها بالرمز C_{ST} ، بأنها سعة الأضلاع الواصلة من الرأس في مجموعة المنبع S إلى رأس في مجموعة المصب T . فعلى سبيل المثال سعة القاطع المعروف أعلاه للشبكة السابقة هي:

$$C_{ST} = C_{13} + C_{56} + C_{57} = 4 + 8 + 6 = 18$$



نظرية ١٦-٤-٦

باعتبار القاطع $C = \{S, T\}$ ، إذا كانت z هي قيمة تدفق ما x في شبكة ما، فإن

$$z = \sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} x_{ji}$$

أي أن قيمة أي تدفق تساوي قيمة التدفق عبر الأضلاع الواصلة من الرأس في مجموعة المنبع إلى رأس في مجموعة المصب مطروحا منها التدفق عبر الأضلاع الواصلة بالاتجاه المعاكس.

البرهان

نكون شبكة جديده كما يلي، نستبدل جميع عناصر المجموعة T بالرأس $n+1$ ، ثم نصل عناصر المجموعة S بهذا الرأس الجديد وذلك باستبدال كل ضلع من الشكل (i, j) حيث $i \in S, j \in T$ بضلع من الشكل $(i, n+1)$ وكل ضلع من الشكل (j, i) حيث $j \in T, i \in S$ بضلع من الشكل $(n+1, j)$. فنكون بذلك قد حصلنا على شبكة جديدة منبعها 1 ومصبها $n+1$ بما أن قيمة التدفق الخارج من المنبع لم يتغير ويساوي z ، وحيث أنه التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل إلى المصب لذا فإن $\sum x_{i, n+1} = z$. ولكن التدفق الداخل إلى المصب $n+1$ هو الفرق بين قيم تدفقات الأضلاع الواصلة من S إلى T وقيم تدفقات الأضلاع الواصلة من T إلى S

$$\sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} x_{ij} - \sum_{\substack{i \in S \\ j \in T}} x_{ji}$$

لذا فإن

$$\sum x_{ij} - \sum x_{ji} = z$$

وهذا ينهي برهان النظرية.

□

نظرية ١٧-٤-٦

باعتبار القاطع $C = \{S, T\}$ ، إذا كانت z هي قيمة تدفق ما x في شبكة ما، فإن

$$z \leq C_{ST}$$

أي أن قيمة أي تدفق هي دوماً أقل من أو تساوي سعة أي قاطع مأخوذ في الشبكة.

البرهان

بما أن $x_{ij} \leq c_{ij}$ لأي ضلع (i, j) حيث $i \in S, j \in T$ بالتالي فإن المجموع الأول في النظرية السابقة لن يزيد عن C_{ST} كذلك فإن طرح الكميات الموجبة في المجموع الثاني سيؤدي إلى قيمة أقل من السابقة بالتالي فإن

$$z \leq C_{ST}$$

تتحقق المساواة فقط عندما يكون C_{ST} هو القاطع الأصغر أي القاطع ذو السعة الأصغر.

□

يلعب القاطع الأصغر دوراً هاماً في دراسة التدفق الأعظمي توضحه النظرية التالية:

نظرية ٦-٤-١٨ القاطع الأصغر - التدفق الأعظمي Min-Max Theorem
سعة القاطع الأصغر تساوي قيمة التدفق الأعظمي.

تمارين الباب السادس

- برهن أن مصفوفة النقل هي مصفوفة مثلثية علوية.
- أعتبر مسألة النقل الآتية:

$$c = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 12 \\ 10 & 10 & 12 \\ 8 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

a

	4	14		18
			24	24
	2		4	6
b	6	14	28	

- ١- اثبت أن الحل أمثلًا .
- ٢- اكتب مسألة النقل بشكل الصريح.
- ٣- اكتب الثنائية لهذه المسألة على فرض أن جميع المتغيرات في المسألة الأصلية حرة.
- ٤- اوجد حلا أمثلًا لثنائية.

- باعتبار مسألة النقل حيث

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 12 & 13 & 8 & 14 & 19 \\ 15 & 18 & 12 & 16 & 19 & 20 \\ 17 & 16 & 13 & 14 & 10 & 18 \\ 19 & 18 & 20 & 21 & 12 & 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 18 \\ 22 \\ 39 \\ 14 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = [10 \quad 11 \quad 13 \quad 20 \quad 24 \quad 15]$$

أوجد $\mathbf{r}^{(2)}$.

- أعتبر مسألة النقل الآتية:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} = (5, 10) \quad \mathbf{b} = (8, 5, 2)$$

- ١- اكتب الصيغة الرياضية لهذه المسألة.
- ٢- اكتب المصفوفة $\mathbf{A}$ بشكل الصريح.
- ٣- اوجد حلا أمثلًا لهذه المسألة باستخدام خوارزمية النقل.

- باعتبار مسألة النقل حيث

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 & 9 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 3 & 4 & 8 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 90 \\ 70 \\ 110 \\ 150 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = [100 \quad 40 \quad 100 \quad 60 \quad 120]$$

إكتب الصياغة الرياضية لمسألة النقل ثم إكتب الصياغة الرياضية للبرنامج المقابل ثم حله.

- باعتبار مسألة النقل التالية أوجد الحل الأمثل لها:

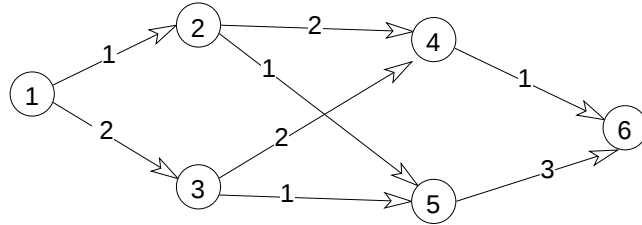
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 & 7 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- حل مسألة التوظيف التالية بواسطة طريقة النقل:

2	1	0	1
1	3	4	1
1	2	6	1
1	1	1	

حل المسألة المذكورة بواسطة طريقة التوظيف.

- أوجد لتدفق الأعظم من المنبع (1) إلى المصب (6) في الشبكة الآتية:



- أوجد التدفق الأعظم لمسألة الشبكة الآتية:

