الباب السادس

حل بعض البرامج الخطية الخاصة

Solutions of Some Special Linear Programming Problems

٦-١ مقدمة Introduction

نقدم في هذا الباب دراسة لبعض البرامج الخطية العملية والتي سيتضح من خلال الدراسة الوافية أن حل مثل هذه المسائل بطريقة السمبلكس العادية لن يكون ذا جدوى. بل إن كل واحدة من هذه المسائل العلمية تحتاج الى تطوير خوارزمية خاصة بها وذلك بالاستفادة من طبيعة المسألة التي تحت الدراسة.

سنبدأ الدراسة بمعالجة مشكلة النقل ثم ننتقل الى مشكلة التوظيف فمشكلة تحليل الشبكات.

٦-٢ مسألة النقل The Transportation Problem

لو فرضنا أن لدينا m مركز إنتاج $1,\ldots,m$، المركز i ينتج a_i وحدة من المنتج. توزع هذه المنتجات على n مركز توزيع $1,\ldots,n$. يحتاج مركز التوزيع j إلى b_j وحدة من المنتج. نستعرض فيما يلي بعض الفرضيات المتعلقة بمسألة النقل:

- الكميات $a_i, b_j > 0$ دائما موجبة.
- لكل مركز إنتاج i ومركز توزيع j نرمز لتكلفة نقل الوحدة من المركز i إلى المركز j بالرمز c_{ij}.
- المسألة المطلوب حلها هي تحديد الحل المسموح به الذي من خلاله نحصل على أقل تكلفة لنقل البضائع بين مراكز الانتاج ومراكز التوزيع.
- ليكن x_{ij} عدد الوحدات التي سوف يتم نقلها بين المركزين (i, j).
- لنفرض أن النظام في مشكلة النقل هو نظام متوازن، أي أن جميع الكميات المنتجة تستهلك أي أن

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

البرنامج الخطي الذي يمثل مسألة النقل يأخذ الشكل التالي:

$$\min \; c_{11}x_{11} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

s. t.

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11}+\cdots+x_{1n} & & & & = a_1 \\
 & x_{21}+\cdots+x_{2n} & & & = a_2 \\
 & & \ddots & & = \vdots \\
 & & & x_{m1}+\cdots+x_{mn} & = a_m \\
x_{11} & +x_{21} & \cdots+x_{m1} & & = b_1 \\
\ddots & \ddots & \ddots & & = \vdots \\
x_{1n} & +x_{2n} & \cdots+x_{mn} & & = b_n \\
\multicolumn{4}{l}{x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{2n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn}} & \geq 0
\end{array}
$$

من الممكن كتابة مسألة النقل على شكل مصفوفي إذا جعلنا

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \left(x_{11},\ldots,x_{1n},x_{21},\ldots,x_{2n},\ldots,x_{m1},\ldots,x_{mn}\right)^T \\
\mathbf{c} &= \left(c_{11},\ldots,c_{1n},c_{21},\ldots,c_{2n},\ldots,c_{m1},\ldots,c_{mn}\right)^T \\
\mathbf{b} &= \left(a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_n\right)^T \\
\mathbf{A} &= \left(\mathbf{a}_{11},\ldots,\mathbf{a}_{1n},\mathbf{a}_{21},\ldots,\mathbf{a}_{2n},\ldots,\mathbf{a}_{m1},\ldots,\mathbf{a}_{mn}\right)
\end{aligned}
$$

بحيث أن $\mathbf{a}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_j \end{bmatrix}$ ، $\mathbf{e}_i$ متجه الوحدة في $\Re^m$ ، أي واحد في الموقع i وأصفار في باقي المواقع و $\mathbf{e}_j$ متجه الوحدة في $\Re^n$ ،أي واحد في الموقع j وأصفار في باقي المواقع. وبذا تأخذ مسألة النقل الشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
\text{s. t.} \quad & \\
& \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
& \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

حيث المصفوفة $\mathbf{A}$ ذات البعد $(m+n)\times mn$ لها الشكل التالي:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

حيث $\mathbf{1}$ هو متجه صفي ذو بعد n مكّون من وحدان و $\mathbf{I}$ عبارة عن مصفوفة الوحدة ذات البعد $n \times n$. إن البنية الخاصة لمصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$ هي التي أعطت مسألة النقل هذا الاهتمام الخاص.

٦-٢-١ خصائص المصفوفة Properties of the matrix A

سنوضح في هذا البند الخصائص المميزة لمصفوفة مشكلة النقل وسنوضح بنيتها الخاصة وسنبين كيفية الاستفادة من هذه البنية لتكوين خوارزمية خاصة بمشكلة النقل.

نظرية (الخاصة الأولى) ٦-٢-١

رتبة Rank مصفوفة النقل هي $\text{Rank}\,(A) = m + n - 1$.

البرهان

بما أن $\mathbf{A}$ هي مصفوفة من النوع $(m+n) \times mn$ وحيث أن $m + n \le mn$ لذا فإن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) \le m + n$ من الواضح أن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) \ne m + n$ إذ أن:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (6.1)$$

وكذلك

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (6.2)$$

وحيث أن النظام متزن ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) لذا فإن الطرفين الآخرين من المعادلتين (6.1) و(6.2) متساويان أي أن أي أن هناك $m+n$ صفا مرتبطة خطيا.

لاثبات أن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) = m+n-1$ علينا إيجاد مصفوفة جزئيه من $\mathbf{A}$ غير شاذة من النوع $(m+n-1)\times(m+n-1)$ بإهمال الصف الأخير من المصفوفة $\mathbf{A}$.

نحصل على مصفوفة من الشكل:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-1} \end{bmatrix}$$

وهذه المصفوفة غير شاذة لأنها مثلثية علوية عناصرها القطرية تساوي الواحد بالتالي محددتها تساوي الواحد.

□

تعريف ٦-٢-٢

تدعى المصفوفة $\mathbf{A}$ مصفوفة ذات معيارية أحادية كليه Total Unimodularity إذا كانت قيمة محددة أي مصفوفة مربعة جزئية من $\mathbf{A}$ هي إما ± 1 أو 0.

نظرية (الخاصة الثانية) ٦-٢-٣

$\mathbf{A}$ مصفوفة ذات معيارية أحادية كليه.

البرهان:

من الواضح أن كل مصفوفة جزئية من $\mathbf{A}$ من النوع 1×1 ذات محددة إما 1 أو 0. بالإضافة إلى هذا فإن أي مصفوفة جزئية من النوع $(m+n)\times(m+n)$ محددتها تساوي الصفر وذلك لأن $\text{Rank}\,(\mathbf{A}) = m+n-1$ ، لذا يبقى علينا إثبات أن أي مصفوفة جزئية من النوع $k\times k$ حيث $1<k<m+n$ تحقق الخاصة المطلوبة. نقدم برهانا يرتكز على مبدأ الاستقراء الرياضي، بافتراض أن $\mathbf{A}_k$ هي أي مصفوفة مربعة جزئية من النوع $k\times k$ ونود إثبات أن $\text{Det}\,\mathbf{A}_k = 0 \;\; or \;\; \pm 1$ ، سنفرض أن الخاصة محققه من أجل المصفوفة $\mathbf{A}_{k-1}$ وسنبرهن صحتها من أجل المصفوفة $\mathbf{A}_k$. إن كل عمود من

أعمدة $\mathbf{A}_k$ إما أن يحوي عنصر واحد قيمته 1 أو أنه لا يحوي عناصر غير صفرية أو أن يكون هناك عنصران غير صفريين قيمة كل منهما 1. إذا لم يكن هناك عناصر غير صفرية في كل عمود من أعمدة $\mathbf{A}_k$ عندئذ يكون $\text{Det } \mathbf{A}_k = 0$. أما إذا أحتوى كل عمود على عنصرين غير صفريين فإن أحد العناصر غير الصفرية سيكون ضمن عمود من أعمدة المصادر (مراكز الإنتاج) بينما العنصر الآخر سيكون ضمن عمود من أعمدة مراكز التوزيع، وحيث أن مجموعة أعمدة المصادر مساوية لمجموعة أعمدة مراكز التوزيع لذا فإن أعمدة $\mathbf{A}_k$ غير مستقلة خطيا ونتيجة لذلك فإن $\text{Det } \mathbf{A}_k = 0$. أما إذا كان هناك عنصر واحد غير صفري في بعض أعمدة $\mathbf{A}_k$ فإنه في هذه الحالة يمكننا فك المحدد بناء على ذلك العمود أي

$$\text{Det } \mathbf{A}_k = \pm \text{Det } \mathbf{A}_{k-1}$$

ولكن من الاستقراء الرياضي $\text{Det } \mathbf{A}_{k-1} = \pm 1$ أو 0 ، وهذا يعني أن هذه الخاصة أيضا صحيحه لـ $\mathbf{A}_k$.

□

نظرية (الخاصة الثالثة) ٦-٢-٤

جميع المصفوفات الأساسية لمشكلة النقل هي مصفوفات مثلثية علوية.

البرهان:

بما أن $\mathbf{A}$ هي مصفوفة ذات معيارية أحادية كليه Total Unimodularity لذا فإن مصفوفة الأساس $\mathbf{B}$ لابد وأن يكون أحد أعمدتها على الأقل يحوي عنصراً غير صفري وحيد ذات قيمة 1، وإلا فإن $\text{Det } \mathbf{B} = 0$. بتبديل صفوف وأعمدة المصفوفة $\mathbf{B}$ نجد إنه بالإمكان اعادة كتابتها على الشكل:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

بإجراء نفس المناقشة على المصفوفة $\mathbf{B}_{m+n-2}$ نجد إنه بالإمكان كذلك اعادة كتابتها على الشكل:

$$\mathbf{B}_{m+n-2} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

بوضع $\mathbf{q} = (q_1, \mathbf{q}_2)$ حينئذ تصبح المصفوفة $\mathbf{B}$ على الشكل:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & \mathbf{q}_2 \\ 0 & 1 & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{B}_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

وبتكرار هذه الخطوات نجد أن المصفوفة $\mathbf{B}$ هي مصفوفة مثلثية علوية.

□

ملاحظة:

إن أهمية هذه النظرية تكمن في صلتها بفكرة التعويض الخلفي Back substitution، ولهذا فإن استخدام طريقة السمبلكس دون إجراء تعديلات ملائمة لهذا الوضع الخاص سيكون مضيعة كبيرة للجهد والوقت، ومن هنا ظهرت ضرورة استخدام خوارزمية خاصة لهذه المشكلة.

تعريف ٦-٢-٥

نقول بان مسألة البرمجة الخطية جيدة التعريف Well defined إذا كان لها حل مسموح به دوما.

نظرية ٦-٢-٦

مشكلة النقل جيدة التعريف.

البرهان:

بافتراض شرط الاتزان $\left(\sum_i a_i = \sum_j b_j\right)$ فمن الواضح أن

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$$

حيث $d = \sum_i a_i = \sum_j b_j$ يمثل حلا مسموحا به.

□

نظرية ٦-٢-٧

إذا كانت المصفوفة $\mathbf{B}$ مصفوفة أساسيه، وكان $\mathbf{a}_i$ عموداً غير أساسي من أعمدة مصفوفة النقل فإن مركبات المتجه $\mathbf{a}_i^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_i$ هي إما 0 أو -1 أو $+1$.

البرهان

المتجه $\mathbf{a}_i^*$ هو حل للمعادلة $\mathbf{B}\,\mathbf{a}_i^* = \mathbf{a}_i$. وبالتالي فإنه باستخدام قاعدة كرامر Cramer's rule نحصل على:

$$a_{ik}^* = \frac{\text{Det } \mathbf{B}_k}{\text{Det } \mathbf{B}}$$

حيث $\mathbf{B}_k$ هي الناتجة عن استبدال العمود k من المصفوفة $\mathbf{B}$ بالمتجه $\mathbf{a}_i$.
بما أن $\mathbf{B}$ هي مصفوفة أساسيه لذا فإن $\text{Det } \mathbf{B} = \pm 1$. كذلك فإن المصفوفات $\mathbf{B}_k$ هي مصفوفات ذات معيارية أحادية كليه أي أن $\pm 1 = \text{Det } \mathbf{B}_k$ أو 0، لذا فإن $a_{ik}^* = 0,\text{m}1$.

□

٦-٢-٢ شرط الحل الصحيح Integrality condition

بما أن المصفوفة الأساسية $\mathbf{B}$ تتكون من أعداد صحيحه وبما أنها مصفوفة مثلثية علوية عناصرها القطرية $+1$ (انظر الخاصة الثالثة من خصائص مصفوفة المعاملات) لذا فإن كل المتغيرات الأساسية ستكون أعداد صحيحه Integers طالما أن جميع الكميات المطلوبة والكميات المعروضة أعداد صحيحه. في هذه الحالة فإن الحل الأمثل سيكون عددا صحيحا أيضا.

ملاحظة:

إن معرفة مثل هذه الشروط التي توضح متى يكون الحل الأمثل صحيحا أمر في غاية الأهمية، إذ أن هناك العديد من المسائل العملية التي تتطلب أن يكون الحل عددا صحيحا. فإذا كانت الشروط متوفرة، كما هو الحال في الوضع المبين أعلاه، فإن المسألة لن تحتاج إلى الخوارزميات الخاصة بالبرمجة الصحيحة Integer Programming.

٦-٢-٣ ثنائية مشكلة النقل Duality for Transportation problems

مشكلة النقل هي مشكلة برمجة خطية بالشكل القياسي Standard form وبالتالي باستخدام الشكل القياسي للثنائية نستطيع كتابة مشكلة الثنائية لمشكلة النقل. يوجد هناك متغير ثنائي لكل قيد من قيود المشكلة الأصلية، وبستخدام المتغيرات

$$\mu_i \qquad i = 1, \ldots, m,$$
$$v_j \qquad j = 1, \ldots, n,$$

وبالتالي فإن ثنائية مشكلة النقل تأخذ الشكل التالي:

$$\max \quad \sum_{i=1}^{m} a_i \mu_i + \sum_{j=1}^{n} b_j v_j$$

$$\text{s. t.}$$

$$\mu_i + v_j \le c_{ij}$$

$\mu_i, v_j,$ بدون قيود

٦-١-٤ طريقة السمبلكس لمشكلات النقل

Simplex Method for Transportation problems

بعد هذه الدراسة لخصائص بنية مشكلة النقل يمكننا الآن البدء في دراسة تفاصيل طريقة السمبلكس لحل هذه المسألة. سنركز اهتمامنا على الاستفادة الكاملة من خاصية الصيغة المثلثية العلوية لمشكلة النقل وذلك من أجل تطوير خوارزمية خاصة بهذه المسألة سنطلق عليها اسم خوارزمية النقل Transportation Algorithm.

سنلاحظ أن هذه الخوارزمية والتي نحن بصدد تطويرها ماهي إلا نسخة معدلة من خوارزمية السمبلكس المحسنة Revised Simplex method والتي تتكون كما نعلم سابقا من الخطوات الرئيسية التالية:

- إيجاد حل أساسي مسموح به .

- حساب مضاريب السمبلكس وحساب معاملات التكلفة النسبية للمتغيرات غير الأساسية.
- إجراء التعديلات على المتجه الداخل للمصفوفة.

في ما يلي سنوضح كيفية إجراء الخطوات أعلاه في حالة مشكلة النقل وذلك بالاستفادة الكاملة من خصائص ونظريات مصفوفة المعاملات وستكون محصلة عملنا هذا هو خوارزمية النقل .

أولا: خوارزمية إيجاد حل أساسي مسموح به

سنعرض فيما يلي شرح خوارزمية الركن الشمالي-الغربي Northwest corner rule لإيجاد حل أساسي مسموح به لمشكلة النقل، والتي تؤكد النظرية ٦-٢-٦ على وجود هذا الحل دوما.

خوارزمية الركن الشمالي-الغربي Northwest Corner Rule

١. ابدأ بالخلية الواقعة في الركن الأيسر العلوي وأملأها بأكبر كمية متوافقة مع صف وعمود تلك الخلية.

٢. كرر مايلي:

اذا كان هناك مزيد من متطلبات الصف

- انتقل خلية واحدة نحو اليمين واملأها بأكبر كمية متوافقة مع صفها وعمودها.

أو

- انتقل خلية واحدة نحو الأسفل واملأها بأكبركمية متوافقة مع صفها وعمودها.

حتى تتحقق جميع المتطلبات.

مثال ٦-٢-٨

اعتبر مسألة النقل بأربعة مصادر وخمسة مراكز توزيع والمعرفة كما يلي:

$$\mathbf{a} = (30,80,10,60)$$
$$\mathbf{b} = (10,50,20,80,20)$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}3&4&6&8&9\\2&2&4&5&5\\2&2&2&3&2\\3&3&2&4&2\end{bmatrix}$$

باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي نجد حلاً أساسياً مسموحاً به كما هو موضح بالجدول الآتي:

						a_i
	10	20				30
		30	20	30		80
				10		10
				40	20	60
b_j	10	50	20	80	20	

ملاحظة:

قد يحصل أحيانا في بعض المسائل أن متطلبات كل من الصف والعمود تكون محققة عند خلية ما، وبالتالي فإننا نضع القيمة صفر في الخلية التالية (والتي نصل إليها بالانتقال خلية واحدة نحو اليمين أو نحو الأسفل) إن وجود الصفر سيجعل الحل غير منتظم Degenerate.

مثال ٦-٢-٩

اعتبر مسألة النقل بأربعة مصادر وأربعة مراكز. إن الحل المسموح لها يعطى بالجدول التالي:

				a_i
30				30
20	20			40
	0	20		20

			20	40	60
b_j	50	20	40	40	

ثانيا: حساب مضاريب السمبلكس ومعاملات التكلفة النسبية

بوضع $\mathbf{d}^T = [\mathbf{u}^T \quad \mathbf{v}^T]$ حيث u_i تمثل المضروب المرافق للقيد

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

و v_j تمثل المضروب المرافق للقيد

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j.$$

وبما أن أحد هذه القيود هو قيد إضافي Redundant، فإنه يمكننا وضع قيمة اختيارية لواحد من هذه المضاريب، ولقد جرت العادة على وضع $v_n = 0$. بافتراض أن $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية، فإن مضاريب السمبلكس توجد بحل النظام $\mathbf{d}_{\mathbf{N}}^T\mathbf{B} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T$. فيما يلي سنوضح كيفية حل مجموعة المعادلات هذه بشكل بسيط.

ليكن x_{ij} متغيراً أساسيا. إن العمود المقابل في المصفوفة $\mathbf{A}$ سيكون ضمن الأساس $\mathbf{B}$، وسيحوي هذا العمود على عنصرين قيمتهما 1+ وباقي عناصره أصفار، حيث سيكون هناك عنصر غير صفري ذو قيمة 1+ في الوضع i من الجزء العلوي وسيكون هناك عنصر غير
صفري آخر ذو قيمة 1+ في الوضع j من الجزء السفلي. بالتالي فإن

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

والتي تمثل مجموعة المعادلات التي يمكن استخدامها لإيجاد مضاريب السمبلكس $\mathbf{d}$.

ملاحظة:

إذا كانت c_{ij} جميعها أعداداً صحيحه وإذا كانت القيمة الاختيارية لأحد مضاريب السمبلكس أيضا عددا صحيحا، فإن مضاريب السمبلكس ستكون اعدادا صحيحه.

سنبين الآن كيفية حساب معاملات التكلفة النسبية. بعد تحديد مضاريب السمبلكس يمكننا حساب معاملات التكلفة النسبية Relative Cost Coefficients للمتغيرات غير الأساسية وذلك باستخدام العلاقة

$$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T} - \mathbf{d}^{T}\mathbf{N}$$

بتعويض عن قيمة $\mathbf{N}$ و $\mathbf{d}$ نجد أن المعادلة السابقة مكافئة للمعادلات

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j \qquad i = 1,2,\ldots,m \qquad j = 1,2,\ldots,n$$

يمكننا تلخيص خوارزمية حساب مضاريب السمبلكس بالخطوات التالية:

١. ابدأ بقيمة اختيارية لأحد مضاريب السمبلكس (جرت العادة بوضع $v_n = 0$).

٢. كرر الآتي:

- إبحث عن العنصر c_{ij} (عادة محاط بقوسين) المقابل لمتغير أساسي بحيث أن احدى القيمتين إما u_i أو v_j قد حسبت لهذا العنصر.
- إحسب القيمة غير المحددة باستخدام المعادلة

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

حتى يتم تحديد جميع قيم المضاريب.

مثال ٦-٢-١٠

باعتبار مصفوفة التكلفة للمثال ٦-٢-٨، أوجدنا حلاً مسموحاً به باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي، إن العنصر c_{ij} المقابلة للمتغيرات الأساسية أحطناها بقوسين كما هو موضح بالجدول التالي:

u_i					
5	9	8	6	(4)	(3)
3	5	(5)	(4)	(2)	2

	2	2	2	(3)	2	1
	3	3	2	(4)	(2)	2
v_j	-2	-1	1	2	0	

بوضع $v_5 = 0$ وباستخدام

$$u_4 = 2 \quad \Leftarrow \quad c_{45} = u_4 + v_5$$

وهكذا يمكننا إيجاد جميع القيم u_i و v_j كما هو موضح في الجدول. ألآن باستخدام العلاقات

$$r_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$$

يمكننا حساب معاملات التكلفة النسبة وهي:

$$\begin{array}{|ccccc|} 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$r_{ij}$$

حيث أن المتغير x_{43} ذو معامل تكلفة سالب، لذا فهو المتغير الداخل للأساس.

ثالثا: خوارزمية إجراء التعديلات على المتجه الداخل للأساس

إذا كان معامل التكلفة النسبي المقابل لمتغير غير أساسي سالبا فهذا يعني أن ذلك المتغير يمكن إدخاله إلى الأساس. سنوضح فيما يلي التغيرات التي يجب إجراؤها على المتغيرات الأخرى.

نظرية ٦-٢-١١

إذا كانت قيمة المتغير الداخل هي θ فإن التغير الذي سيحصل على متغيرات الأساس هي صفر أو $\pm\theta$.

البرهان

مباشرة باستخدام نظرية الخاصة الثانية.

□

باستخدام هذه النظرية فإننا نتبع الخطوات التالية لإجراء التغيرات المطلوبة على المتجه الداخل للأساس.

١. في مكان المتغير الداخل نضع إشارة + (أي سيضاف مقدار θ، في ذلك المكان) ثم نحدد إشارة متغيرات دورة تبدأ من المتغير الداخل وتنتهي به وذلك بوضع إما إشارة + أو − أو صفر وذلك بناء على شرط الاتزان إي إذا أضيف مقدار فلابد من طرح ذلك المقدار في الصف والعمود الواقع فيه ذلك المقدار.

٢. نحدد قيمة θ بحيث تكون مساوية لأقل قيمة مطلقة لتلك المتغيرات الأساسية ذات الإشارة السالبة.

مثال ٦-٢-١٢

باعتبار المثال التالي حيث x_{53} هو المتغير الداخل:

						a_i
			10^0			10
			20^-		10^+	30
	20^+	10^0			30^-	60
	10^0					10
	10^-		$+$	40^0		50
b_j	40	10	30	40	40	

حيث تم وضع الإشارات حسب الترتيب الآتي:

$$x_{13}, x_{23}, x_{25}, x_{35}, x_{32}, x_{31}, x_{41}, x_{51}, x_{45}$$

واضح أن اقل قيمة لمتغير ذو إشارة سالبه هي $x_{51} = 10$ أي أن $\theta = 10$ وبالتالي بإضافة هذا المقدار إلى الكميات الموجودة في الأماكن ذات الإشارة الموجبة وطرحها من الكميات الموجودة في الأماكن ذات الإشارة السالبة نحصل على حل أساسي مسموح به جديد.

بعد هذه الدراسة يمكننا الآن تلخيص خوارزمية النقل كما يلي:

خوارزمية ٦-٢-١٣ (خوارزمية النقل)

تتلخص هذه الخوارزمية بالخطوات الآتية:

١. جد حلا أساسيا مسموحا به باستخدام قاعدة الركن الشمالي الغربي.

٢. كرر مايلي:

- حدّد مضاريب السمبلكس ومعاملات التكلفة النسبية.
- إختر متغير بمعامل تكلفة سالب.
- إحسب إشارات التغير.
- إحسب قيمة التغير θ.
- اجر التغييرات.

حتى تصبح جميع معاملات التكلفة غير سالبة.

مثال ٦-٢-١٤

باعتبار المثال ٦-٢-١٠ حيث سبق أن أوجدنا معاملات النكلفة النسبية، ووجدنا أن المتغير x_{43} هو ذو معامل تكلفة سالب، لذا فهو المتغير الداخل للأساس. نضع إشارة + في مكان المتغير الداخل، وذلك في الجدول الذي يحوي قيم المتغيرات الأساسية وهو الذي أوجدناه بواسطة قاعدة الركن الشمالي الغربي. كما هو موضح في الجدول التالي:

						a_i
	10	20				30
		30	20^-	30^+		80
				10^0		10
			+	40^-	20^0	60
b_j	10	50	20	80	20	

وبتحديد إشارات المتغيرات الأخرى في الأساس نجد أن أقل قيمة بإشارة سالبه هي 20 في المكان (2,3) انظر الجدول السابق. وبالتالي فإن $\theta = 20$ بإجراء التعديلات نحصل على الأساس الجديد:

					a_i
10	20				30
	30		50		80
			10		10

			20	20	20	60
b_j	10	50	20	80	20	

وبحساب مضاريب السمبلكس للأساس الجديد نحصل على:

						u_i
	(3)	(4)	6	8	9	5
	2	(2)	4	(5)	5	3
	2	2	2	(3)	2	1
	3	3	(2)	(4)	(2)	2
v_j	-2	-1	0	2	0	

وبحساب معاملات التكلفة النسبية نجد أن جميع القيم موجبة، كما هو موضح في الجدول التالي:

$$\begin{array}{|ccccc|} 0 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

r_{ij}

بالتالي فإن قيمة دالة الهدف هي:

$$z = 10\times 3 + 20\times 4 + 30\times 2 + 50\times 5 + 10\times 3$$
$$+ 20\times 2 + 20\times 4 + 20\times 2 = 610$$

وحدة. والممثل بالرسم البياني التالي: