$$\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 y_{1j} + \mathbf{a}_2 y_{2j} + \cdots + \mathbf{a}_m y_{mj} \tag{4.15}$$

لنفترض أننا نود استبدال المتجه $\mathbf{a}_s$ حيث $1 \le s \le m$ بالمتجه $\mathbf{a}_t$, إن:

$$\mathbf{a}_t = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{m} \mathbf{a}_i y_{it} + \mathbf{a}_s y_{st}$$

وبالتالي فإن:

$$\mathbf{a}_s = \frac{1}{y_{st}} \mathbf{a}_t - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{m} \frac{y_{it}}{y_{st}} \mathbf{a}_i$$

بتعويض هذه العلاقة في (4.15) نحصل على:

$$\mathbf{a}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq s}}^{m} \left(y_{ij} - \frac{y_{it}}{y_{st}} y_{sj} \right) \mathbf{a}_i + \frac{y_{sj}}{y_{st}} \mathbf{a}_t \tag{4.16}$$

وبالتالي فإن نظام المعادلات الجديد يمكن الحصول عليه من العلاقات التالية:

$$\begin{cases} y'_{ij} = y_{ij} - \dfrac{y_{it}}{y_{st}} y_{sj} & i \neq s \\ y'_{sj} = \dfrac{y_{sj}}{y_{st}} & i = s \end{cases} \tag{4.17}$$

حيث $j = m+1, \ldots, n$. إن العنصر y_{st} يسمى بالعنصر المحوري. العلاقات (4.17) تسمى العلاقات المحورية، وهي تعني انه لاخراج $\mathbf{a}_s$ من الأساس وإدخال $\mathbf{a}_t$ بدلا منه علينا استبدال الجدول السابق بجدول جديد بناء على الخطوتين التاليتين:

استبدال جميع العناصر الموجودة في صف العنصر المحوري وذلك بقسمتها على العنصر المحوري y_{st}. أما العمود المحوري فتصبح جميع عناصره (ماعدا العنصر المحوري) أصفارا.

استبدال جميع العناصر الأخرى بناء على قاعدة المستطيل الآتي:

العمودالمحوري

$$
\begin{array}{ccc}
a & \cdots & b \\
\vdots & & \vdots \\
c & \cdots & d
\end{array}
$$

الصف المحوري

فيكون العنصر a هو العنصر المحوري ويستبدل مثلاً العدد d ليصبح:

$$d - \frac{bc}{a}$$

الآن نعطي ملخصا عن كيفية حل مسألة البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس

خوارزمية ٤-٣-٤ (ملخص خوارزمية السمبلكس) Simplex Algorithm

نتبع الخطوات التالية:

أولا: نبدأ بصياغة مسألة البرنامج الخطي بالشكل القياسي.

ثانيا: نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في جدول، ونجعل في السطر الأخير المعلومات الناشئة عن دالة الهدف آخذين في الاعتبار z كمتغير إضافي مرتبط بالمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بالمعادلة الآتية:

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n = z$$

نرمز لأعداد الصف الأخير بالرمز r_j ونسميها بمعملات التكلفة النسبية.

ثالثا:نكرر الآتي: نعين المتغير الداخل إلى الأساس وذلك بفحص الأعداد الموجودة في السطر الأخير، الممثلة لـ $\mathbf{r}$ فان كانت جميعها (ماعدا الرقم الأيمن) موجبة أو أصفارا حينئذ يعتبر هذا الجدول نهائيا ونحصل منه على الحل الأمثل. وإذا لم يكن الأمر كذلك فإننا نأخذ أصغر هذه الأعداد في الاعتبار ونسمي عموده العمود المحوري (وذلك إذا كانت دالة الهدف في البرنامج الخطي دالة تخفيض).

- نعين المتغير الخارج من الأساس حسب الصيغة (4.13). ذلك أن اصغر النسب الناشئة عن قسمة أعداد العمود الأيمن على الأعداد الموجبة المقابلة

لها في العمود المحوري، يعين الصف المحوري وهو يقابل المتغير المغادر. أما العمود المحوري فيقابل المتغير الداخل، ويكون العنصر المحوري عند تقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري. فإن لم نجد في العمود المحوري عددا موجبا فذلك يعني أن المسألة غير محدودة.

- نجري العمليات المحورية وفقا للصياغة (4.17) كالتالي:

١- نقسم كل عدد من أعداد الصف المحوري على العنصر المحوري.

٢- نطرح مضاعفات مناسبة للصف المحوري الجديد من أعداد الصفوف الأخرى كي يصبح كل عنصر من العمود المحوري (ما عدا العنصر المحوري) مساويا للصفر.

مثال ٤-٣-٥

استبدل المتجه $\mathbf{a}_2$ بالمتجه $\mathbf{a}_5$ في المثال التالي واستنتج حلا أساسيا جديدا.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

بإجراء العمليات المحوريه على المصفوفة $[\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ كما هو مبين في الخورزمية ٤-٣-٤.

ومع ملاحظة أن العنصر المحوري هو $a_{22}=2$ نحصل على

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 8 & 0 & 3 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1.5 & 1 & -1 & 0 & 0.5 & 0 & 2 \\ -1.5 & 0 & -2 & 0 & 0.5 & 1 & 7 \end{array}\right]$$

أي أن الحل الناتج هو $x_4=1,\ \ x_2=2, x_6=7,$.

مثال ٤-٣-٦

ليكن لدينا نظام المعادلات الآتي، استبدل المتغيرات غير الأساسية x_1, x_2, x_3 لتصبح أساسية، واستنتج حلا أساسيا جديدا.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \quad +x_5 \qquad &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad\quad +x_6 &= -1 \end{aligned}$$

أولا: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_4 الخارج و المتغير x_1 الداخل فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ x_5 & 0 & -5 & 3 & -2 & 1 & 0 & -7 \\ x_6 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

أي أن الحل الحالي هو $x_5 = -7,\ \ x_6 = 4, x_1 = 5,$.

ثانيا: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_5 الخارج و المتغير x_2 الداخل فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & 1 & 0 & -0.4 & 0.6 & 0.2 & 0 & 3.6 \\ x_2 & 0 & 1 & -0.6 & 0.4 & -0.2 & 0 & 1.4 \\ x_6 & 0 & 0 & -0.2 & -0.2 & 0.6 & 1 & -0.2 \end{array}$$

أي أن الحل الحالي هو $x_2 = 1.4,\ \ x_6 = -0.2, x_1 = 3.6,$.

ثالثاً: نجري العمليات المحورية فيكون المتغير x_6 الخارج و المتغير x_3 الداخل فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 4 \\ x_2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & -5 & 1 \end{array} \tag{4.18}$$

أي أن الحل الحالي هو $x_2 = 4,\ \ x_3 = 1, x_1 = 2,$.

فنجد حلا أساسيا لنظام المعادلات المذكور متغيراته الأساسية **هي** $x_1, x_2, x_3,$.

إن حل البرنامج الخطي بجداول السمبلكس تعطينا طريقة ملائمة لعمل خطوات السمبلكس، ولنرى ذلك نتبع حل المثال التالي:

مثال ٤-٣-٧

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$\min \quad z=-3x_1-2x_2 \qquad (4.19)$$
$$\text{s. t.}$$
$$2x_1-x_2\le 1$$
$$-3x_1+4x_2\le 13$$
$$x_1+x_2\le 5$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي (4.19) بالشكل القياسي فندخل المتغيرات المكملة فنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\min \quad z=-3x_1-2x_2$$
$$\text{s. t.}$$
$$2x_1-x_2+x_3 \quad =1$$
$$-3x_1+4x_2+ \quad x_4 \quad =13$$
$$x_1+x_2+ \quad x_5=5$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\ge 0$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن البرنامج في جدول حيث نضع في العمود الأيسر المتغيرات الأساسية المقابلة لكل معادلة من معادلات القيود وفي الصف الأخير معاملات التكلفة من معادلة الهدف وفي العمود الأيمن نضع العمود **b** ونضع أسفل هذا العمود في الصف الأخير سالب قيمة دالة الهدف $-z$ حيث يكون في الصف الأخير من الجدول المعادلة التالية:

$$-3x_1-2x_2+0x_3+0x_4+0x_5-z=0$$

وفي باقي الجدول معاملات معادلات القيود فنحصل على الجدول التالي:

x_3	(2)	-1	1	0	0	1
x_4	-3	4	0	1	0	13
x_5	1	1	0	0	1	5
	-3	-2	0	0	0	0

ثالثا و رابعا: نعين المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير المقابل لأصغر الأعداد السالبة الموجدة في السطر الأخير وبذلك يكون x_1، ويقال للعمود المقابل لهذا المتغير العمود المحوري، ثم نقسم كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري فنحصل على المجموعة $\{1/2, 5/1\}$ ويكون الصف المقابل لأصغر هذه الأعداد هو الصف المحوري وحيث أن $1/2$ هو أصغر هذه الأعداد فيكون الصف الأول هو الصف المحوري. وتقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يعطينا العنصر المحوري والذي هو (2). والمتغير الأساسي المقابل للصف المحوري هو المتغير الخارج من الأساس، وهو x_3.

خامسا : نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & 1 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ x_4 & 0 & 2.5 & 1.5 & 1 & 0 & 14.5 \\ x_5 & 0 & (1.5) & -0.5 & 0 & 1 & 4.5 \\ & 0 & -3.5 & 1.5 & 0 & 0 & 1.5 \end{array}$$

وحيث أنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته سالبه فإننا نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 2 \\ x_4 & 0 & 0 & 7/3 & 1 & -5/3 & 7 \\ x_2 & 0 & 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 3 \\ & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 7/3 & 12 \end{array}$$

أي أن الحل الأمثل هو $z=-12,\ x_1=2,\ x_4=7,\ x_2=3,$.

مثال ٤-٣-٨

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$\min \quad -3x_1+3x_2+5x_3 \tag{4.20}$$

s. t.

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 1$$
$$x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي (4.20) بالشكل القياسي ثم ندخل المتغيرات الإضافية التالية فنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 \qquad = 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 + \qquad x_5 = 1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{aligned}$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في الجدول التالي:

x_4	(2)	−2	3	1	0	1
x_5	1	−1	−2	0	1	1
	−3	3	5	0	0	0

ثالثا و رابعا: x_1 هو المتغير الداخل إلى الأساس. وبقسمة كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري نحصل على المجموعة $\{1/2\}$ وبالتالي فإن x_4 هو المتغير الخارج من الأساس، و (2) هو العنصر المحوري.

خامسا : نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

x_1	1	−1	1.5	0.5	0	0.5
x_5	0	0	−3.5	−0.5	1	0.5
	0	0	9.5	1.5	0	1.5

أي أن الحل الأمثل هو $x_5 = 0.5, \quad x_1 = 0.5, \quad z = -1.5$.

مثال ٤-٣-٩

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس:

$$
\begin{aligned}
\max\ & -10x_1+32x_2+48x_3+54x_4 \\
\text{s. t.}\ & \\
& 2x_1+3x_2+5x_3+x_4\le 24 \\
& 5x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 32 \\
& 8x_1+5x_2+6x_3+10x_4\le 64 \\
& 3x_1+6x_2+9x_3+12x_4\le 81 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0
\end{aligned}
$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي فندخل المتغيرات الإضافية لنحصل على البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\max\ & -10x_1+32x_2+48x_3+54x_4 \\
\text{s. t.}\ & \\
& 2x_1+3x_2+5x_3+x_4+x_5=24 \\
& 5x_1+2x_2+x_3+3x_4+x_6=32 \\
& 8x_1+5x_2+6x_3+10x_4+x_7=64 \\
& 3x_1+6x_2+9x_3+12x_4+x_8=81 \\
& x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8\ge 0
\end{aligned}
$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في الجدول التالي:

x_5	2	3	5	1	1	0	0	0	24
x_6	5	2	1	3	0	1	0	0	32
x_7	8	5	6	(10)	0	0	1	0	64
x_8	3	6	9	12	0	0	0	1	81
	−10	32	48	54	0	0	0	0	0

ثالثا و رابعا: حيث أن دالة الهدف ف ي البرنامج الخطي هي دالة تعظيم Maximization problem فإن المتغير الداخل إلى الأساس وهو المتغير المقابل

لأكبر الأعداد الموجبة الموجودة في الصف الأخير (أي صف دالة الهدف) وبذلك يكون x_4، وبعد ذلك نتبع نفس الخطوات المذكورة في الخوارزمية ٤-٣-٤ والمثالين السابقين. وبقسمة كل عنصر من عناصر العمود الأيمن على كل عنصر موجب مقابل له في العمود المحوري نحصل على المجموعة $\{24/1,\ 32/3,\ 64/10,\ 81/12\}$ أو $\{24,\ 10.67,\ 6.4,\ 6.75\}$ ويكون الصف المقابل لأصغر هذه الأعداد هو الصف المحوري وحيث أن 6.4 هو أصغر هذه الأعداد لذا فإن الصف الثالث هو الصف المحوري. وتقاطع الصف المحوري مع العمود المحوري يعطينا العنصر المحوري والذي هو (10). والمتغير الأساسي المقابل للصف المحوري هو المتغير الخارج من الأساس، وهو x_7. لاحظ أن الحل يكون أمثليا عندما تكون جميع الأعداد في صف دالة الهدف (الصف الأخير) غير موجبة وذلك لأن دالة الهدف هنا دالة تعظيم.

خامسا: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

x_5	1.2	2.5	4.4	0	1	0	−0.1	0	17.6
x_6	2.6	0.5	−0.8	0	0	1	−0.3	0	12.8
x_4	0.8	0.5	0.6	1	0	0	0.1	0	6.4
x_8	−6.6	0.0	(1.8)	0	0	0	−1.2	1	4.2
	−53.2	5.0	15.6	0	0	0	−5.4	0	−345.6

فيكون الحل الناتج هو $z = 345.6,\ x_5 = 17.6,\ x_6 = 12.8,\ x_4 = 6.4,\ x_8 = 4.2,$ وحيث أنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته موجبة فإننا نعاود الخطوات السابقة فيكون العنصر المحوري هو (1.8). ثم بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

x_5	17.33	(2.5)	0	0	1	0	2.83	−2.44	7.33
x_6	−0.33	0.5	0	0	0	1	−0.83	0.44	14.67
x_4	3.0	0.5	0	1	0	0	0.5	−0.33	5.0
x_3	−3.67	0.0	1	0	0	0	−0.67	0.56	2.33
	4.0	5.0	0	0	0	0	5.0	−8.67	−382.0

فيكون الحل الناتج هو $x_3 = 2.33,\ x_4 = 5,\ x_6 = 14.67,\ x_5 = 7.33,\ z = 382.0$ وحيث أنه لا يزال هناك عنصر في الصف الأخير قيمته موجبة فإننا نعاود الخطوات السابقة. لاحظ أن هناك عمودين في كل منهما قيمة معامل التكلفة $r_i = 5.0$ ولنختار العمود الأول المقابل للمتغير x_2، أي أن x_9 هو المتغير الداخل إلى الأساس، ويكون العنصر المحوري هو (2.5) وذلك لأن $5.0/0.5 = 10.0,\ 14.67/0.5 = 29.3,\ 7.33/2.5 = 2.9$. ثم بعد إجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

x_2	6.933	1	0	0	0.4	0	1.133	−0.978	2.933
x_6	−3.8	0	0	0	−0.2	1	−1.4	0.93	13.2
x_4	−0.467	0	0	1	−0.2	0	−0.067	0.156	3.533
x_3	−3.67	0	1	0	0.0	0	−0.67	0.56	2.33
	−30.67	0	0	0	−0.2	0	−0.67	−3.78	−396.67

وبما أن جميع الأعداد في الصف الأخير غير موجبة فيكون الحل أمثليا هو كما يلي:

$x_3 = 2.33,\ x_4 = 3.533,\ x_6 = 13.2,\ x_2 = 2.933,\ z = -396.67$.

٤-٤ حالات خاصة Special Cases

٤-٤-١ عدم وحدانية الحل Multiple Optimal Solutions

مثال ٤-٤-١

إذا كانت جميع الأعداد في الصف الأخير غير سالبه وكان هناك قيمة صفرية مقابله لمتغير غير أساسي فإن ذلك يعني أن هناك أكثر من حل أمثلي أي أن الحل غير وحيد كما يبين ذلك المثال الآتي :

$$\min \quad -100x_1 - 100x_2$$

s. t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\le 8 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\min \quad -100x_1 - 100x_2 \tag{4.21}$$

s. t.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 \qquad + x_4 &= 15 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0 \end{aligned}$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.21) في الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 8 \\ x_4 & (5) & 3 & 0 & 1 & 15 \\ & -100 & -100 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ثالثا و رابعا: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس وذلك بتحديد العمود المحوري وفقا لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (5).

خامسا : نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 0 & (0.8) & 1 & -0.4 & 2.0 \\ x_1 & 1 & 0.6 & 0 & 0.2 & 3.0 \\ & 0 & -40 & 0 & 20.0 & 300.0 \end{array}$$

ثم نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

x_2	0	1	1.25	−0.5	2.5
x_1	1	0	−0.75	0.5	1.5
	0	0	50.0	0.0	400.0

وبما أن جميع القيم في صف دالة الهدف غير سالبة فيكون الحل أمثليا وهو كالتالي : $z = -400.0,\ x_1 = 1.5,\ x_2 = 2.5,$. مع ملاحظة أن الحل غير وحيد، حيث من الممكن إيجاد حل آخر وذلك بعمل العمليات المحورية حول أي عنصر موجب في العمود الذي يقابل قيمة صفرية في صف دالة الهدف. فنقوم بالعمليات المحورية على الجدول السابق:

x_2	0	1	1.25	−0.5	2.5
x_1	1	0	−0.75	(0.5)	1.5
	0	0	50.0	0.0	400.0

فنحصل على الجدول التالي:

x_2	1	1	0.5	0	4
x_4	2	0	−1.5	1	3
	0	0	50.0	0.0	400.0

وبذا نحصل على حل آخر أمثلي وهو التالي : $z = -400.0,\ x_2 = 4,\ x_4 = 3,$.

ملاحظة:

إذا كان كل من x, y حلاً أمثلياً لبرنامج خطي فإن $z = (1-t)x + ty$ هو حل أمثلي آخر وذلك لكل $0 \le t \le 1$.

٤-٤-٢ دالة الهدف غير محدودة Unbounded Linear Programming

مثال ٤-٣-٢

إذا كانت جميع الأعداد في العمود المحوري غير موجبة فإن دالة الهدف غير محدودة كما يبين ذلك المثال الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 \le 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \quad = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \quad + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.23) في الجدول التالي:

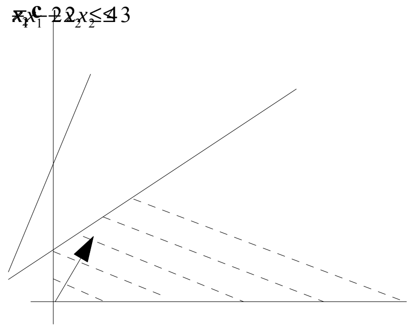
$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 1 & -2 & 1 & 0 & 4 \\ x_4 & -1 & (2) & 0 & 1 & 3 \\ & -1 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ثالثا و رابعا: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس وذلك بتحديد العمود المحوري وفقا لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (2).

خامسا: نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.23) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 7 \\ x_2 & -0.5 & 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ & -2.5 & 0 & 0 & 1.5 & 4.5 \end{array}$$

وحيث أن العمود الأول هو العمود المحوري وجميع الأعداد فيه غير موجبة فإننا نحصل على حل غير محدود. ونرى ذلك جليا من الشكل الممثل للبرنامج الخطي (4.22) في الصفحة التالية. إن المنطقة التي فيها الخطوط متقطعة هي منطقة الحل المسموح به، كما تمثل هذه الخطوط دالة الهدف. يتضح من الشكل السابق أن دالة الهدف غير محدودة في منطقة الحل المسموح به وذلك لأن قيمة دالة الهدف تنقص كلما زدنا من قيمة x_1 و x_2 في المنطقة المسموح بها.



مثال ٤-٣-٣

وهذا مثال آخر على برنامج خطي حله غير محدود:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \le 9 \\ & 3x_1 + x_2 - 4x_3 \le 3 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أولا : نبدأ بصياغة البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \quad &= 9 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \quad + x_5 &= 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0 \end{aligned}$$

ثانيا : نضع المعلومات الناشئة عن المسألة (4.24) في الجدول التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 9 \\ x_5 & 3 & (1) & -4 & 0 & 1 & 3 \\ & 3 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ثالثا و رابعا: نعين المتغير الداخل إلى الأساس و المتغير الخارج من الأساس وذلك بتحديد العمود المحوري وفقا لأصغر الأعداد السالبة الموجودة في السطر الأخير ونعين العنصر المحوري (1).

خامسا : نجري العمليات المحورية وفقا للصيغة (4.17) فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & 7 & 0 & -7 & 1 & 2 & 15 \\ x_2 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & 3 \\ & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

وبذا نحصل على حل غير محدود حيث أن جميع الأعداد في العمود المحوري سالبة.

٤-٤-٣ حالة الحل غير المنتظم Degenerate Solution

أن طريقة السمبلكس تتقارب من الحل الأمثل وذلك عندما تقل قيمة دالة الهدف في كل دوره. ولكن قد يحدث خلال إجراء حسابات خوارزمية السمبلكس أن تكون القيمة الصغرى للنسب المذكورة في الصيغة (4.13) مساويه للصفر. هذا يعني أن متغيرا ذا قيمه صفرية سيترك الأساس ليحل محله متغير ذو قيمه صفرية. بطبيعة الحال لن يؤدي مثل هذا الوضع إلى تغير في قيمة دالة الهدف. إن أحد المتغيرات الأساسية يساوي صفرا، وهذه هي الحالة التي يقال فيها أن الحل غير منتظم وان الانتقال من حل غير

منتظم إلى حل آخر غير منتظم قد يعيدنا إلى حل غير منتظم سبق أن ابتدأنا به.

مثال ٤ـ٤ـ٤

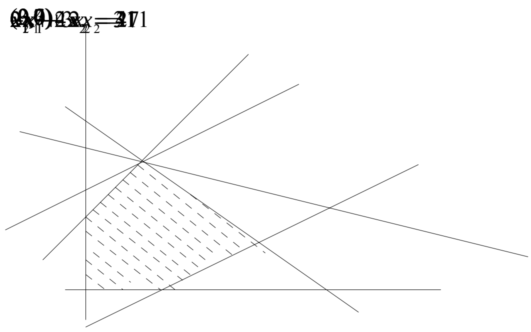
اعتبر البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & x_1 + 4x_2 \le 31 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 27 \\ & x_1 - 2x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

إذا أدخلنا المتغيرات الإضافية فإنه سيعطينا البرنامج الخطي بالشكل القياسي التالي حيث المتغيرات الأساسية هي x_3, x_4, x_5, x_6, x_7

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 - 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \\ & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 11 \\ & x_1 + 4x_2 + x_5 = 31 \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_6 = 27 \\ & x_1 - 2x_2 + x_7 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.25}$$

الشكل التالي يوضح منطقة الحل المسموح به:



لاحظ أن تقاطع أي اثنين من المستقيمات التالية:

$$-x_1 + x_2 = 4$$
$$-x_1 + 2x_2 = 11$$
$$x_1 + 4x_2 = 31$$
$$2x_1 + 3x_2 = 27$$

يحدد النقطة الحدية $(3,7)$. وإذا طبقنا طريقة السمبلكس على البرنامج (4.25) فإننا نحصل على الجدول التالي والذي نقطة البداية هي نقطة الأصل $(0,0)$ وهي النقطة الحدية الناتجة من تقاطع المستقيمين $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$:

x_3	-1	(1)	1	0	0	0	0	4
x_4	-1	2	0	1	0	0	0	11
x_5	1	4	0	0	1	0	0	31
x_6	2	3	0	0	0	1	0	27
x_7	1	-2	0	0	0	0	1	3
	-3	-4	0	0	0	0	0	0

الجدول التالي يمثل هندسيا التحرك من نقطة الأصل إلى النقطة الحدية $(0,4)$ وهي النقطة الحدية الناتجة من تقاطع المستقيمين $x_1 = 0$ و $-x_1 + x_2 = 4$.

x_2	-1	1	1	0	0	0	0	4
x_4	(1)	0	-2	1	0	0	0	3
x_5	5	0	-4	0	1	0	0	15
x_6	5	0	-3	0	0	1	0	15
x_7	-1	0	2	0	0	0	1	11
	-7	0	4	0	0	0	0	16

لاحظ في هذا الجدول أن المتغير الداخل إلى الأساس هو x_1 وأما المتغير الخارج من الأساس إما أن يكون x_4, x_5 أو x_6 وذلك لأن δ في الصيغة (4.14) متساوية لعدد من المتغيرات إذ أن $\{3\} = \{3/1, 15/5, 15/5\}$. فإذا أخترنا x_4 كمتغير خارج من الأساس فإننا نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	-1	1	0	0	0	7
x_1	1	0	-2	1	0	0	0	3
x_5	0	0	6	-5	1	0	0	0
x_6	0	0	(7)	-5	0	1	0	0
x_7	0	0	0	1	0	0	1	14
	0	0	-10	7	0	0	0	37

هذا يمثل هندسيا التحرك من النقطة الحدية $(0,4)$ إلى النقطة الحدية $(3,7)$. بما أنه في هذه الدورة $x_3 = 0$ و $x_4 = 0$ فإن تقاطع المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 11$ و $-x_1 + x_2 = 4$ يحدد النقطة الحدية $(3,7)$. إن المتغير الداخل إلى الأساس هو x_3 وأما المتغير الخارج من الأساس فإما أن يكون x_5 أو x_6 وذلك لأن δ في الصيغة (4.14) متساوية لعدد من المتغيرات حيث $\{0\} = \{0/6, 0/7\}$. فإذا اخترنا x_6 كمتغير خارج من الأساس فإننا نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	2/7	0	1/7	0	7
x_1	1	0	0	−3/7	0	2/7	0	3
x_5	0	0	0	−5/7	1	−6/7	0	0
x_3	0	0	1	−5/7	0	1/7	0	0
x_7	0	0	0	(1)	0	0	1	14
	0	0	0	−1/7	0	10/7	0	37

هذا يعني هندسيا أننا بقينا عند نفس النقطة الحدية $(3,7)$. مع ملاحظة أن تقاطع المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 11$ و $2x_1 + 3x_2 = 27$ يحددا النقطة الحدية $(3,7)$ في هذه الدورة، وذلك لأن $x_6 = 0$ و $x_4 = 0$.

هنا تواجهنا مشكلة الحل غير المنتظم، حيث أن قيمة دالة الهدف لم تتحسن. وهذا يعطينا احساسا بوجود دوران في طريقة السمبلكس. هندسيا نحن لم ننتقل من نقطة حدية إلى نقطة حدية أخرى، ولكننا بقينا عند نفس النقطة واعتبرنا هذه النقطة كتقاطع مستقيمين مختلفين عن المستقيمي ن المتقاطعين في الدورة السابقة عند نفس النقطة.

نستنتج مما سبق أنه في حالة تطبيق طريقة السمبلكس، عندما يكون هناك أكثر من متغي ر يمكن ادخاله الى الأساس فإنه من السهل ملاحظة أن هذه المتغيرات لها قيمة تساوي الصفر، أي أن القيمة المقابلة لها في العمود الأيمن تساوي الصفر. إذا تابعنا خطوات السمبلكس وأضفنا دورة جديدة فإن الأساس المتبعة في اختيار المتغير الخارج من الأساس سوف تختار هذا المتغير ذا القيمة الصفرية كعنصر محوري. وتبعا لذلك فإن قيمة دالة الهدف z لن تتحسن وذلك لأننا أضفنا فقط قيمة صفر لها.

ولنذكر أن البرنامج الخطي له حل غير منتظم إذا كان هناك متغير أساسي قيمته صفر.

في كثير من التطبيقات في حالات الحل غير المنتظم تؤدي طريقة السمبلكس إلى حل أمثلي، وذلك بعد اختيار متغير أساسي يغادر الأساس قيمته لا تساوي الصفر. ففي المثال ٤-٤-٤ في الجدول الأخير نختار المتغير x_7 كمتغير خارج من الأساس وذلك لأنه لا يساوي الصفر، وبعد تطبيق العمليات المحورية

حيث العنصر المحوري هو (1) المبين في الجدول السابق نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	0	0	1/7	−2/7	3
x_1	1	0	0	0	0	2/7	3/7	9
x_5	0	0	0	0	1	−6/7	5/7	10
x_3	0	0	1	0	0	1/7	5/7	10
x_4	0	0	0	1	0	0	1	14
	0	0	0	0	0	10/7	1/7	39

وبما أن صف دالة الهدف الأخير في هذا الجدول جميع قيمه موجبة فإن الحل الذي حصلنا عليه أمثلي وهو $x_2 = 3, x_1 = 9, x_5 = 10, x_3 = 10, x_4 = 14, z = -39$ ، وهو يقابل هندسيا النقطة $(9,3)$.

٤-٤-٤ حالة الدوران Cycling

في حالات نادرة جدا فإن حالة الحل غير المنتظم قد تؤدي إلى دوران Cycling. وهذا يحدث عندما يكون هناك أكثر من متغير مغادر، أي أن القيمة في الصيغة (4.14) غير وحيدة. وإذا قمنا باختيارات مختلفة للمتغير المغادر فإن ذلك لا يحدث أي تحسن لقيمة دالة الهدف بل إننا نرجع إلى الجدول الذي قد حصلنا عليه في خطوات سابقة. وإذا تابعنا هذه الخطوات فإننا نصل إلى عدد لا نهائي من خطوات السمبلكس دون الوصول إلى الحل الأمثل. المثال التالي يوضح حالة الدوران

مثال ٤-٤-٥

اعتبر البرنامج الخطي التالي في حالته القياسية:

$$\min \quad -22x_1 + 93x_2 + 21x_3 - 24x_4 \qquad (4.26)$$

s. t.

$$
\begin{aligned}
-4x_1 + 8x_2 + 2x_3 - 9x_4 + x_5 \quad &= 0 \\
0.5x_1 - 1.5x_2 - 0.5x_3 + x_4 \quad + x_6 &= 0 \\
x_1 + x_7 &= 1 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 &\geq 0
\end{aligned}
$$

نضع المعلومات الناشئة عن المسألة في الجدول التالي:

x_5	−4.0	8.0	2.0	−9.0	1	0	0	0
x_6	0.5	−1.5	−0.5	(1.0)	0	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0	1	1
	−22.0	93.0	21.0	−24.0	0	0	0	0

لاحظ أن الحل الناتج من هذا الجدول يولد حل غير منتظم وذلك لأن قيمة x_5 و x_6 تساوي الصفر. طريقة السمبلكس تولد متتالية من سبعة جداول كالتالي:

x_5	(0.5)	−5.5	−2.5	0.0	1	9.0	0	0
x_4	0.5	−1.5	−0.5	1.0	0	1.0	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0	1	1
	−10.0	57.0	9.0	0.0	0	24.0	0	0