الباب الثاني

البرمجة الخطية

Linear Programming

٢-١ مقدمة
٢-٢ بعض نماذج البرمجة الخطية

٢-١ مقدمة Introduction

ندرس في هذا الباب عددا من الأساسيات المتعلقة بالبرمجة الخطية. ففي البداية سندرس بشكل مختصر بعض المسائل التطبيقية التي يمكن أن تظهر في كثير من التطبيقات العملية وسندرس بعض هذه المسائل بشكل موسع في الباب السادس.

إن مسألة البرمجة الخطية عادة ما يعبر عنها على النحو التالي:

$$\min \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$
$$\text{s. t.}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

حيث $\mathbf{x}$ متجه من $\Re^n$ وكذلك $\mathbf{c}$. أما $\mathbf{A}$ فهي مصفوفة من نوع $m \times n$ و $\mathbf{b}$ متجه من $\Re^m$. إن $f(\mathbf{x})$ تسمى دالة الهدف وهي داله خطيه و $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ هي مجموعة قيود على شكل علاقات رياضية خطيه، بالإضافة إلى ذلك هناك شرط عدم سالبيه المتغيرات و المعبر عنه بـ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$.

٢-٢ بعض نماذج البرمجة الخطية Some linear programming models

يتضمن هذا الفصل بعض النماذج التي تبين طبيعة البرمجة الخطية. وسوف تتم صياغتها بشكل رياضي مما يتيح إبراز الصياغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية. سنعطي الآن مثالاً تطبيقياً على البرنامج الخطي ثم ننتقل إلى النماذج الخطية بعد ذلك.

مثال ٢-٢-١

على قطعة معينه من الأرض نود أن نبني عدة مساكن، ونود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسه والبعض الآخر ذات دورين. فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وكم ينبغي أن يكون عدد النوع الآخر كي تستوعب اكبر عدد من السكان، علما أن المعطيات مبينه في الجدول الآتي:

عدد المبا ني	عدد السكان في المبنى الواحد	المساحة اللازمة لكل مبنى	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	تكلفة المبنى الواحد	عدد الأدوار
x	30	800	120	600,000	5
y	12	600	60	200,000	2

ثم إن المبلغ المتوفر هو: 18,000,000دولاراً وساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة ومساحة الأرض الكلية تبلغ 42,000 متراً مربعاً.
إن الصياغة الرياضية لهذه المسألة هي كما يلي:

$$\begin{aligned} \max \quad & 30x + 12y \\ \text{s. t.} \quad & 800x + 600y \le 42{,}000 \\ & 120x + 60y \le 4500 \\ & 600{,}000x + 200{,}000y \le 18{,}000{,}000 \\ & x, y \text{ عددان صحيحان غير سالبين} \end{aligned}$$

وعند حل هذه المسألة يتبين أن الحل الأمثل يتحقق عندما $y = 45, x = 15$ ويتبقى $300m^2$ دون أن تبنى.

٢-٢-١ النموذج الأول (مسألة التغذية) The Diet Problem

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبه غذائية من قائمه تحتوي على n نوع من ألاطعمة بحيث تحتوي على كميات معينه من m نوع من الفيتامينات وتكون تكلفة الوجبة اقل ما يمكن. لنرمز بـ a_{ij} لكمية الفيتامين من النوع i في وحدة الطعام j ، ولنرمز بـ b_i لكمية الفيتامين من النوع i التي يجب أن تحتويها الوجبة، و لنرمز c_j لتكلفة الوحدة من الطعام j . والمطلوب هو تحديد الكميه x_j من نوع الطعام j بحيث تكون حلا للبرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = 1, \cdots, m \\ & x_j \ge 0 \qquad j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال اذا كانت المعطيات كما هي مبينة في الجدول الآتي:

الفيتامين	كمية الفيتامين المتوفره في وحدة الطعام			كمية الفيتامين التي يجب توفرها
	حليب	لحم	بيض	
A	10	15	10	20
B	100	10	10	50
C	10	100	10	10
تكلفة الوحدة	2	3	1	

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

s. t.

$$10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20$$
$$100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50$$
$$10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حيث x_1 تمثل عدد اللترات من الحليب و x_2 تمثل كمية اللحم بالكيلوغرام و x_3 تمثل عدد البيض.

٢-٢-٢ النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) The Production Problem

مصنع ينتج n صنفا و يحتاج في سبيل ذلك إلى m من المواد الخام. كل صنف يحتاج إلى كمية معينه من كل مادة خام. لنرمز بـ a_{ij} إلى كمية المادة الخام i التي تحتاجها الوحدة من الصنف j . ولتكن b_i هي الكمية المتوفرة من المادة i ولنفترض أن c_j هو ربح الوحدة من الصنف j والمطلوب هو تعيين الكميه x_j من الصنف المنتج j بحيث يتحقق مايلي:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s. t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1,\cdots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\cdots,n$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المعطيات المبينة في الجدول الآتي:

المادة الخام	كمية المادة الخام	اللازم لإنتاج وحدة من الصنف		كمية المادة الخام المتوفرة
	الكرسي	الطاولة	الدولاب	
الصنوبر	3	4	2	57
السنديان	2	1	2	27
ساعات العمل	4	5	4	73
الربح في وحدة الصنف	160	210	100	

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\max \quad 160x_1 + 210x_2 + 100x_3$$

$$\text{s. t.}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 57$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 27$$

$$4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \le 73$$

x_1, x_2, x_3 أعداد صحيحة غير سالبه

حيث x_1 تمثل عدد الكراسي و x_2 تمثل عدد الطاولات و x_3 تمثل عدد الدواليب.

٢-٢-٣ النموذج الثالث (مسألة النقل) The Transportation problem

في احدى الدول يوجد m فرع لمصنع سكر. الفرع i ينتج a_i طنا من السكر. توزع كميات السكر هذه على n منطقه. المنطقة j تحتاج إلى b_j طنا من السكر في الشهر الواحد. ولنفترض أن كميات السكر المنتجة تستهلك جميعها أي أن

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

ليكن c_{ij} هي تكلفة نقل طن واحد من الفرع i إلى المنطقة j. والمطلوب هو تحديد كمية السكر x_{ij} التي ينبغي نقلها من المصنع i إلى المنطقة j بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن. بمعنى أنه علينا أن نحقق البرنامج الآتي:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, \cdots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n$$

لقد تم تطبيق هذه المسألة فعلا في إحدى الدول و أدى ذلك إلى توفير في تكلفة النقل تعادل ١٠%.

٢-٢-٤ النموذج الرابع (مسألة التوظيف) The Assignment Problem

هذا النموذج يشبه نموذج النقل إلا أن قيم a_i , b_i هنا تساوي الواحد. فعلي سبيل المثال، هناك ثلاثة أساتذة يدرسون ثلاثة مقررات كل واحد من هؤلاء

الأساتذة يصحح أوراق اختبار أحد هذه المقررات، ولنفرض أن c_{ij} هو الزمن اللازم للأستاذ i كي يصحح أوراق المقرر j وفقا للجدول الآتي:

	المقرر 1	المقرر 2	المقرر 3
الأستاذ 1	6	4	8
الأستاذ 2	9	3	6
الأستاذ 3	5	2	7

والسؤال هو كيف يجب أن تنظم عملية التصحيح هذه كي يكون زمن التصحيح الكلي أقل ما يمكن اذا كان:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{عندما يقوم الاستاذ } i \text{ بتصحيح المقرر } j \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

فإن الصياغة الرياضية لهذه المسألة تأخذ الشكل الآتي:

$$\min \quad 6x_{11} + 4x_{12} + 8x_{13} + 9x_{21} + 3x_{22} + 6x_{23} + 5x_{31} + 2x_{32} + 7x_{33}$$

s. t.

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 1 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \\
x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} &\geq 0
\end{aligned}$$

تمارين الباب الثاني

١-٢ شركه لإنتاج مواد البلاستيك تريد إنتاج منتج جديد من أربعة مركبات كيميائيه. هذه المركبات مكونه من ثلاث مواد هي A ,B وC. نسب المواد في هذه المركبات وتكلفتها معطاة في الجدول التالي:

المركب الكيميائي	1	2	3	4
نسبة A في المركب	30	20	40	20
نسبة B في المركب	20	60	30	40
نسبة C في المركب	40	15	25	30
التكلفه/ الكيلو	20	30	20	15

المنتج الجديد يحتوي على 20% من مادة A ويحتوي على الأقل 30% من مادة B ويحتوي على الأقل 20% من ماده C. وبسبب المضاعفات الجانبية فإن نسبة المركبات 1 و2 يجب أن لاتتعدى ٢٠% و٣٠% من المنتج الجديد على التوالي. أكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة لأنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفه.

٢-٢ مصنع ينتج نوعين من المشروبات نوع 1,2 كل نوع من هذه المشروبات يتكون من مادتين A,B. لإنتاج صفيحة من المشروب ١ نحتاج إلى 5 لتراً من مادة A و5 لتراً من مادة B ولإنتاج صفيحة من المشروب 2 نحتاج إلى 3 لتراً من مادة A و11 لتراً من مادة B، المصنع يستطيع توفير 30 لتراً من مادة A و55 لتراً من مادة B في اليوم وكذلك المصنع قرر بناءاً على طلب شركات التوزيع أن لاينتج أكثر من أربع صفائح يومياً للمشروب. إذا كان ربح المشروب 1 هو 3 ريال لصفيحة وربح المشروب 3 هو 4 ريال لصفيحة. كم صفيحة ينتجون ليحصلوا على أكبرربح.
اكتب برنامج خطي لهذه المسألة.

١-٢ مزارع يملك مزرعة مساحتها 1200 فدان تنتج هذه المزرعة قمح، بطاطس وبازلاء كل نوع من هذه المحاصيل يعطي ربح محدد، ويحتاج إلى ساعات عمل وتنقية وتسميد وبذر حسب الجدول التالي:

المحصول	ساعات العمل	تكلفة التنقية	تكلفة التسميد	تكلفة البذر	ثمن البيع
قمح	6	20	14	2	144
بطاطس	8	12	9	3	125
بازلاء	3	8	9	1	75

اذا توفر لدى المزارع 3600 ريالاً و7400 ساعة عمل.
فاكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة.

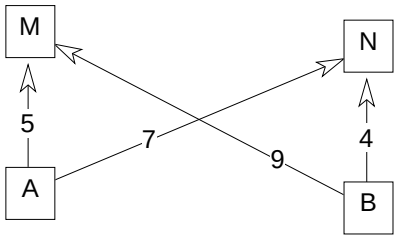
٢-٤ في مزرعة تربى فيها البقر والخراف هناك خمسون موقعاً للبقر ومئتان للخراف تمتد على مساحة مقدارها 50 هكتار. تحتاج البقرة الواحدة إلى هكتار واحد وتحتاج الخراف إلى 0.2 هكتار. إن عدد ساعات العمل المتاحة سنوياً تقدر بـ 10000 ساعة ويلزم للبقرة الواحدة 150 ساعة عمل سنوياً ويلزم للخروف الواحدة 25 ساعة عمل سنوياً. إن الربح الصافي عن كل بقرة يبلغ 250 ريالاً وعن كل خروف 45 ريال. ويتعين تحديد عدد البقر x_1 وعدد الخراف x_2 بحيث يكون الربح الإجمالي أعظم ما يمكن.

٢-٥ على أرض زراعية يراد زراعة بطاطس وجزر. بعض المعلومات الخاصة بذلك موضحة في الجدول التالي:

	تكاليف زراعة هكتار	عدد ساعات العمل لهكتار واحد	الربح الصافي لهكتار
بطاطس	5	2	20
جزر	10	10	60

إن المساحة x_1 التي ستزرع فيها البطاطس والمساحة x_2 التي ستزرع فيها الجزر، سوف يتم تحديدهما بحيث يصبح الربح الأجماي أقصى مايمكن، علماً أن هناك 1200 هكتار تحت التصرف وأن المبلغ المخصص 7000 ريال وساعات العمل 5200.

٦-٢ لنفرض أن هناك ثمان شاحنات في المحطة A وست شاحنات في المحطة B. المدينة M بحاجة إلى أربع شاحنات والمدينة N بحاجة إلى سبع شاحنات. كيف يمكن تحقيق ذلك بين المحطتين والمدينتين كي يكون استهلاك البنزين أقل مايمكن.



٧-٢ نوعان من الطعام B,A يحتوي كل كيلوغرام منهما على الكميات التالية من الفيتامينات:

A	B	
2.0	0.5	فيتامين V
2.5	1.2	فيتامين X
1.5	1.5	فيتامين Y
1.0	3.0	فيتامين Z

نود أن نكون وجبة يومية من هذين النوعين ذات تكلفة صغرى بحيث تحتوي على الأقل على الكميات التالية من الفيتامينات:

V=140; X=300; Y=270; Z=300.

علما أن ثمن النوع A هو ضعفي ثمن النوع B. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة.

٨-٢ يراد بناء مسجد جديد بالقرب من أربعة منازل قائمة في المواقع التالية:

$$\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix},$$

ليكن موقع المسجد هو $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$. أين يجب بناؤه إذا ما أُريد أن يكون محموع المسافات بين هذا المسجد وبين المنازل الأربعة أقل مايمكن.
ملاحظة: المسافة المقصودة هي مسافة الشارع، فمثلاً المسافة بين $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ وبين $\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$ هي:

$$|x_1-3|+|x_2|.$$

٩-٢ مصنع ينتج شنطاً وطاولات، إن انجاز ذلك يتطلب اجراء ثلاثة انواع من العمليات: القطع، التجميع، التجهيز، الجدول التالي يوضح الزمن اللازم لكل عملية من هذه العمليات لإنتاج شنطة واحدة أو طاولة واحدة.

	القطع	التجميع	التجهيز
الشنطة	6/5	1	3/2
الطاولة	1	1/2	2

إن الربح الصافي للشنطة الوحدة هو 80 ريالاً وللطاولة الواحدة 55 ريالاً. لنفترض أن ساعات العمل المتاحة للقطع لاتتجاوز 72 ساعة يومياً وللتجميع 50 ساعة يومياً وللتجهيز 120 ساعة. والمطلوب معرفة عدد الشنط المصنعة وكذلك عدد الطاولات كي يكون الربح الأجمالي أعظم مايمكن.

١٠-٢ سبع فروع لأحد مصانع للسكر F_j تنتج a_j طناً كل شهر $(j = 1,\text{K},7)$ هناك 300 موقع G_k تستهلك r_k طناً من السكر $(k = 1,\text{K},300)$ لنفترض أن $\sum_{g=1}^{7} a_j = \sum_{k=1}^{300} r_k$. لنرمز لتكلفة نقل طن واحد من السكر من الفرع F_j إلى الموقع G_k بالرمز c_{jk}. والمطلوب كتابة البرنامج الخطي الذي يتم من خلاله تعيين كمية السكر x_{jk} التي ينبغي نقلها من الفرع F_j إلى الموقع G_k. بحيث تكون تكاليف النقل أقل مايمكن.

١٠-٢ شخص يمتلك 18000 ريالاً يود استثمارها في ثلاثة أنواع من السلع، احداها ذات مجازفة بسيطة والثانية ذات مجازفة متوسطة أما الثالثة فهي ذات مجازفة عالية. وهو سوف يستثمر 2000 ريالاً أكثر في السلعة ذات المجازفة البسيطة من السلعة ذات المجازفة المتوسطة.
وسوف يستثمر على الأكثر مبلغ 8000 في السلعة ذات المجازفة الكبيرة. و14000 ريالاً على الأكثر في السلعتين المتوسطة والعالية المجازفة. إن العائد المتوقع من السلعة ذات المجازفة البسيطة هو 7%، و9% من السلعة ذات المجازفة المتوسطة، و11% من السلعة ذات المجازفة والعالية. والمطلوب معرفة المبلغ الذي ينبغي استثماره في كل نوع من هذه السلع والعائد المالي الذي يتوقع الحصول عليه.

١٢-٢ تستورد مصفاة بترول نوعين من الزيت الخام، خفيف سعره 25 دولاراً للبرميل وثقيل سعره 20 دولاراً للبرميل. تنتج هذه المصفاة غازولين، وزيت للتدفئة وبنزين بكميات للبرميل الواحد موضحة حسب الجدول التالي:

	غازولين	زيت للتدفئة	بنزين
زيت خفيف	0.3	0.2	0.3
زيت ثقيل	0.3	0.4	0.2

تعاقدت المصفاة مع احدى الجهات لتزويدها بـ 900000 برميل من الغازولين و800000 برميل من زيت التدفئة الغازولين و500000 برميل البنزين. تود المصفاة معرفة كمية الزيت الخام الذي يجب أن تستورده لتلبي الكمية المطلوبة بأقل تكلفة. والمطلوب صياغة هذه المسألة على شكل برنامج خطي.

١٣-٢ مصنع كبير للأنسجة له فرعان B,A. يستورد هذا المصنع مواد الخام من مصدرين ويوزع انتاجه على ثلاثة أسواق. تكاليف النقل للطن الواحد بين مصدري الإستيراد وبين فرعي المصنع وبين الأسواق موضحة في الجدولين التاليين:

	فرع المصنع B	فرع المصنع A
مصدر الأستيراد 1	1 دولار	1.5 دولار
مصدر الأستيراد 2	2 دولار	1.5 دولار

	السوق 3	السوق 2	السوق 3
فرع المصنع A	1 دولار	2 دولار	4 دولار
فرع المصنع B	2 دولار	4 دولار	3 دولار

هناك عشرة أطنان متوفرة في مصدر الاستيراد الأول و15 طناً متوفرة في مصدر الاستيراد الثاني. إن احتياجات الأسواق هي 8طناً و14 طناً و3طناً على التتالي.
والمطلوب صياغة هذه المسألة لإيجاد أقل تكلفة ممكنة بين مصدري الإستيراد وبين الأسواق الثلاثة.