Journal of Pure and Applied Algebra 64 (1990) 263-268
North-Holland

UNE CONJECTURE SUR LES ANNEAUX DE NAGATA*

Salah KABBAJ
Département de Mathématiques, Université Claude Bernard, Lyon I 69622 Villeurbanne Cédex, France

Communicated by C.A. Weibel
Received 21 February 1989

Dans un article consacré aux S-domaines forts, Malik et Mott se sont posés la question suivante: étant donné un entier naturel $n \geq 1$, a-t-on $A[X_1, \dots, X_n]$ S-domaine fort si et seulement si $A(X_1, \dots, X_n)$ S-domaine fort? Nous résolvons la conjecture par la négative. Par ailleurs, après une étude théorique, nous l'améliorons à la fin de cet article.

Les anneaux considérés sont commutatifs, intègres et possèdent un élèment unité. Un anneau A est appelé S-domaine fort si p et q étant deux idéaux premiers consécutifs dans Spec(A), alors les idéaux étendus $p[X]$ et $q[X]$ sont consécutifs dans Spec($A[X]$). Cette classe d'anneaux a été introduite par Kaplansky [10] pour unifier les travaux de Seidenberg [12] et Jaffard [7] sur les anneaux noethériens et les anneaux de Prüfer dans le cadre de la théorie de la dimension. Pour plus de précisions sur cette notion, on pourra se reporter à [6, 8, 9, 10, 11, ...].

Un anneau A est dit de Jaffard [2, 4] s'il est de dimension de Krull finie et s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes:

(i) $\dim A = \dim_v A$ ($\dim_v A$ désigne la dimension valuative de l'anneau A);

(ii) $\dim A[X_1, \dots, X_n] = n + \dim A$ pour tout $n \geq 0$.

Comme exemples d'anneaux de Jaffard, on connaît les anneaux noethériens [12], les anneaux de Prüfer [7], les anneaux universellement caténaires [3]... .

Soient A un anneau, $n \geq 1$ un entier naturel, $\{X_1, \dots, X_n\}$ un ensemble fini d'indéterminées sur A et S la partie multiplicative de $A[X_1, \dots, X_n]$ définie par:

$$S = \{f \in A[X_1, \dots, X_n] \,|\, c(f) = A\}$$

(si $f = \sum_i a_i X_1^{i_1} X_2^{i_2} \cdots X_n^{i_n}$, $c(f) = \sum_i a_i A$).

Posons $A(X_1, \dots, X_n) = S^{-1}(A[X_1, \dots, X_n])$. L'anneau $A(X_1, \dots, X_n)$ défini ainsi est appelé *l'anneau de Nagata* à n indéterminées et à coefficients dans A. Pour plus de précisions sur cette notion on pourra se reporter à [1].

* Ce travail a bénéficié de l'aide du département de Mathématiques de l'Université de Tennessee aux U.S.A.

0022-4049/90/$03.50

Dans un long article [11] consacré aux S-domaines forts, Malik et Mott ont énoncé la conjecture suivante: Soit n un entier naturel ≥ 1, a-t-on $A[X_1, \dots, X_n]$ S-domaine fort si et seulement si $A(X_1, \dots, X_n)$ S-domaine fort? La conjecture est résolue par la négative. Par ailleurs, nous allons l'améliorer à la fin de cet article.

Il est clair que si $A[X_1, \dots, X_n]$ est un S-domaine fort, alors il en est de même pour $A(X_1, \dots, X_n) = S^{-1}(A[X_1, \dots, X_n])$. Cependant, nous sommes en mesure d'affirmer que la réciproque est fausse. Cela est illustré par l'exemple suivant.

Exemple 1. *Soient k un corps, X et Y deux indéterminées sur k et un entier $n \geq 1$. Posons*:

$$V = k(X) + Yk(X)[Y]_{(Y)}$$

et

$$R = k + Yk(X)[Y]_{(Y)}.$$

Alors:

(a) *$R(X_1, \dots, X_n)$ est un S-domaine fort.*

(b) *$R[X_1, \dots, X_n]$ n'est pas un S-domaine fort où $X_1, \dots, X_n$ sont des indéterminées sur l'anneau R.*

Démonstration. Soit $M = Yk(X)[Y]_{(Y)}$ l'idéal maximal commun à V et R. L'anneau R est un produit fibré local issu de l'anneau de valuation V;

$$\begin{array}{ccc} R & \twoheadrightarrow & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \twoheadrightarrow & k(X). \end{array}$$

Il découle de [2, Lemma 2.1] et de [2, Theorem 2.6] que:

$$\dim R = \dim V = 1,$$

et

$$\dim_v R = \dim_v V + \deg \operatorname{tr}_k k(X) = \dim V + 1 = 2.$$

Il en résulte que $\dim R[X_1] = \dim_v R + 1 = 3$ et par conséquent $\operatorname{ht} M[X_1] = 2$. En fait, nous allons établir que $\operatorname{ht} M[X_1, \dots, X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$. En effet,

$$\operatorname{ht} M[X_1, \dots, X_n] + \dim(R[X_1, \dots, X_n]/M[X_1, \dots, X_n]) \leq \dim R[X_1, \dots, X_n],$$

d'où:

$$\operatorname{ht} M[X_1, \dots, X_n] + n \leq \dim R[X_1][X_2, \dots, X_n].$$

L'anneau $R[X_1]$ est un anneau de Jaffard puisque $\dim R[X_1] = 1 + \dim_v R = \dim_v R[X_1] = 3$. On en déduit que $\dim R[X_1][X_2, \dots, X_n] = \dim R[X_1] + n - 1 = n + 2$. Ce qui donne,

$$\operatorname{ht} M[X_1, \dots, X_n] + n \leq n + 2.$$

Par conséquent, $\operatorname{ht} M[X_1, \ldots, X_n] = 2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Dans notre cas particulier, nous avons:

$$R(X_1, \ldots, X_n) = R[X_1, \ldots, X_n]_{M[X_1, \ldots, X_n]}.$$

Il suffit donc de prouver que $R[X_1, \ldots, X_n]_{M[X_1, \ldots, X_n]}$ est un S-domaine fort.

Soient P et Q deux idéaux premiers de $R[X_1, \ldots, X_n]$ tels que $P \subsetneq Q \subset M[X_1, \ldots, X_n]$ et $\operatorname{ht}(Q/P) = 1$. Deux cas se présentent. Si $P = (0)$, alors $\operatorname{ht} Q = 1$. Nécessairement $Q \cap R = (0)$ et il existe un idéal premier Q' de $K[X_1, \ldots, X_n]$, K désigne le corps des fractions de R, tel que $Q' \cap A[X_1, \ldots, X_n] = Q$. $K[X_1, \ldots, X_n]$ étant un S-domaine, nous avons:

$$\operatorname{ht} Q[X_{n+1}] = \operatorname{ht} Q'[X_{n+1}] = 1 = \operatorname{ht} Q' = \operatorname{ht} Q.$$

Si $p \neq (0)$, nécessairement $Q = M[X_1, \ldots, X_n]$ (car $\operatorname{ht} M[X_1, \ldots, X_n] = 2$) donc,

$$\operatorname{ht}(Q[X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = \operatorname{ht}(M[X_1, \ldots, X_{n+1}]/P[X_{n+1}]) = 1.$$

Car nous avons aussi $\operatorname{ht} M[X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}] = 2$. D'où la conclusion. □

Toutefois, l'anneau R (construit précédemment) n'est pas un S-domaine fort. Ce qui nous conduit à nous poser la question suivante: Existe-t-il un S-domaine fort R tel que l'anneau $R(X_1, \ldots, X_n)$ ne soit pas un S-domaine fort?

Avant de répondre à cette question, nous allons établir certains résultats mettant en évidence les liaisons existant entre les notions de S-domaine fort et d'anneau de Jaffard pour les anneaux de Nagata. Ce qui nous permettra, par la suite, d'énoncer une nouvelle conjecture améliorant celle de Malik et Mott.

Théorème 2. *Soit A un anneau de dimension finie. Si A et $A(X_1, \ldots, X_n)$ sont des S-domaines forts pour tout entier $n \geq 1$, alors A est un anneau de Jaffard.*

Dans ce qui suit, nous allons identifier l'anneau $A(X_1, \ldots, X_n)$ pour $n = 0$ à l'anneau A. La démonstration du théorème découle du lemme suivant:

Lemme 3. *Soient A un anneau de dimension finie et $n \geq 1$ un entier naturel. Si $A(X_1, \ldots, X_k)$ est un S-domaine fort pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, alors:*

$$\dim A[X_1, \ldots, X_k] = k + \dim A \quad \textit{pour tout } k \in \{0, 1, \ldots, n, n+1\}.$$

Démonstration. Nous savons que $\dim A(X_1, \ldots, X_k) = \dim A[X_1, \ldots, X_k] - k$ pour tout entier naturel k [2, Proposition 1.21]. Soit $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ et supposons que $A(X_1, \ldots, X_k)$ soit un S-domaine fort. Donc,

$$\dim A(X_1) = \dim A[X_1] - 1 = \dim A$$

puisque A est un S-domaine fort.

Nous avons de même:

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \dim A(X_1,\ldots,X_k)(X_{k+1})\\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_k)[X_{k+1}]-1\\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_k),\end{aligned}$$

puisque l'anneau $A(X_1,\ldots,X_k)$ est un S-domaine fort. Il en résulte que:

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\ldots,X_{k+1}) &= \dim A(X_1,\ldots,X_k)\\ &= \dim A(X_1,\ldots,X_{k-1})\\ &= \dim A(X_1)\\ &= \dim A\end{aligned}$$

pour tout entier naturel $k\in\{0,1,\ldots,n\}$. D'autre part, nous avons:

$$\dim A(X_1,\ldots,X_{k+1}) = \dim A[X_1,\ldots,X_{k+1}]-(k+1).$$

Il en découle que $\dim A[X_1,\ldots,X_k]=k+\dim A$ pour tout entier naturel $k\in\{0,1,\ldots,n+1\}$. $\square$

La réciproque du théorème est généralement fausse. En effet, l'anneau $R=(k+Yk(X)[Y]_{(Y)})[Z]$ est un anneau de Jaffard car $\dim R=\dim_v R=3$ [2]; en revanche, R n'est pas un S-domaine fort car $R/(Z)=k+Yk(X)[Y]_{(Y)}$ n'en est pas un [11].

Théorème 4. *Etant donné un anneau A local de dimension ≤ 2. Soit n un entier naturel ≥ 1. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *$A(X_1,\ldots,X_k)$ est un S-domaine fort pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n\}$.*

(ii) *$\dim A[X_1,\ldots,X_k]=k+\dim A$ pour tout $k\in\{0,1,\ldots,n+1\}$.*

La démonstration du théorème repose en partie sur le lemme suivant:

Lemme 5. *Soit A un anneau local caténaire, de dimension finie. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un S-domaine fort*;

(ii) *$\dim A[X]=1+\dim A$.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). [10].

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soient p et q deux idéaux premiers de A tels que $\operatorname{ht} q/p=1$. Soit m l'idéal maximal de A. Il existe une chaîne saturée se terminant par m et contenant $p\subsetneq q$.

$$(0)\subsetneq p_1\subsetneq\cdots\subsetneq p\subsetneq q\subsetneq\cdots\subsetneq m.$$

Comme A est supposé caténaire, cette chaîne réalise la dimension de l'anneau A.

Supposons maintenant que $\operatorname{ht}(q[X]/p[X])>1$, alors il existe un idéal premier Q de $A[X]$ tel que:

$$p[X]\subsetneq Q\subsetneq q[X],$$

mais la chaîne précédente permet d'avoir une chaîne dans $A[X]$:

$$(0)\subsetneq p_1^*\subsetneq \cdots \subsetneq p[X]\subsetneq Q\subsetneq q[X]\subsetneq \cdots \subsetneq m[X]\subsetneq (m,X).$$

Cette chaîne est au moins de longueur égale à ht $m+2$, ce qui contredit l'hypothèse $\dim A[X]=\dim A+1$. On en déduit que $\mathrm{ht}(q[X]/p[X])=1$, A est donc un S-domaine fort. $\square$

Démonstration du Théorème 4. (i) $\Rightarrow$ (ii). Théorème 2 ou Lemme 3.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit $k\in\{0,\dots,n\}$. D'une part,

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\dots,X_k)[Y] &= \dim A[X_1,\dots,X_k)(Y)+1\\ &= \dim A(X_1,\dots,X_k,Y)+1\\ &= \dim [X_1,\dots,X_k,Y]-(k+1)+1\\ &= \dim A+1 \quad \text{(par hypothèse).}\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\dim A(X_1,\dots,X_k) &= \dim A[X_1,\dots,X_k]-k\\ &= \dim A \quad \text{(par hypothèse).}\end{aligned}$$

Il en résulte que $\dim A(X_1,\dots,X_k)[Y]=\dim A(X_1,\dots,X_k)+1$. Par conséquent, l'anneau $A(X_1,\dots,X_k)$ est un S-domaine fort car il est local, caténaire ($\dim A(X_1,\dots,X_k)=\dim A\le 2$) et vérifiant la condition (ii) du Lemme 5. D'où la conclusion. $\square$

Ainsi, nous sommes en mesure de répondre à la question précédente. Nous reprenons une construction de [5] illustrant un exemple de S-domaine fort R tel que $R[X]$ n'est pas un S-domaine fort.

Soient k un corps et X, Y, Z des indéterminées sur k. Posons:

$$V=k(X,Y)+Zk(X,Y)[Z]_{(Z)}=k(X,Y)+M_1.$$

Soit $\varphi: V\to V/M_1\simeq k(X,Y)$ la surjection canonique et soit V' l'anneau de valuation associé à la valuation $v: k(X,Y)\to \mathbb{Z}[\pi]$, où $v(X)=\pi$ et $v(Y)=1$.

L'anneau $\varphi^{-1}(V')$ est un anneau de valuation de la forme $k+M_2$ où M_2 est son idéal maximal. Posons:

$$V_1=\varphi^{-1}(V')=k+M_2 \quad \text{et} \quad W=k(X,Y)+(Z+1)k(X,Y)[Z]_{(Z+1)}.$$

Alors, $T=V_1\cap W$ est un anneau de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux M et N.

Exemple 6. *Posons $R=k+M\cap N$. Sous les notations précédentes un tel anneau vérifie les conditions suivantes*:

(a) *R est S-domaine fort.*

(b) *$R(X)$ n'est pas un S-domaine fort.*

(c) *$R[X]$ n'est pas un S-domaine fort.*

Démonstration. Pour (a) et (c) voir [5].

(b) R est local et $\dim R = 2$[5]. Supposons que $R(X)$ soit un S-domaine fort. Il découle du Théorème 4 que

$$\dim R[X] = \dim R + 1$$

et

$$\dim R[X, Y] = \dim R + 2 = 4.$$

Ce qui est contradictoire avec,

$$\dim R[X, Y] = \dim_v R + 2 = 3 + 2 = 5$$

(il est établi dans [5] que $\dim_v R = 3$). □

Il est donc possible d'avoir l'un des deux anneaux R ou $R(X)$ S-domaine fort sans que l'autre le soit (cf. Exemple 6).

Après l'étude théorique précédente, nous sommes en mesure d'énoncer une véritable conjecture—améliorant celle de Malik et Mott—dans le sens suivant:

> Etant donné un entier naturel $n \geq 1$, est-ce que $A[X_1, \ldots, X_n]$ est un S-domaine fort si et seulement si A, $A(X_1), \ldots, A(X_1, \ldots, X_n)$ sont des S-domaines forts?

Soulignons que la construction de [5], illustrant un exemple de S-domaine fort A tel que $A[X]$ n'en est pas un, ne permet pas d'amorcer une réponse à la conjecture (voir Exemple 6).

Bibliographie

[1] D.D. Anderson, Some remarks on the ring $R(X)$, Comment. Math. Univ. St. Paul. 26 (1977) 137–140.

[2] D.F. Anderson, A. Bouvier, D.E. Dobbs, M. Fontana and S. Kabbaj, On Jaffard domains, Exposition. Math. 6 (1988) 145–175.

[3] A. Bouvier, D.E. Dobbs and M. Fontana, Universally catenarian integral domains, Adv. in Math., à paraître.

[4] A. Bouvier and S. Kabbaj, Examples of Jaffard domains, J. Pure Appl. Algebra 54 (1988) 155–165.

[5] J.W. Brewer, P.R. Montgomery, E.A. Rutter and W.J. Heinzer, Krull dimension of polynomial rings, Lecture Notes in Mathematics 311 (Springer, Berlin, 1972) 26–45.

[6] M. Fontana and S. Kabbaj, On $D + (X_1, \ldots, X_r)D_S[X_1, \ldots, X_r]$ domains, soumis pour publication.

[7] P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes, Mém. Sc. Math. 146 (Gauthier-Villars, Paris, 1960).

[8] S. Kabbaj, La formule de la dimension pour les S-domaines forts universels, Boll. Un. Mat. Ital. D (6) 5 (1) (1986) 145–161.

[9] S. Kabbaj, Sur les S-domaines forts de Kaplansky, soumis pour publication.

[10] I. Kaplansky, Commutative Rings (University of Chicago Press, Chicago, 2nd print, 1974).

[11] S. Malik and J.L. Mott, Strong S-domains, J. Pure Appl. Algebra 28 (1983) 249–264.

[12] A. Seidenberg, On the dimension theory of rings II, Pacific J. Math. 3 (1952) 603–614.