JOURNAL OF ALGEBRA 137, 400–415 (1991)

Sur les S-domaines forts de Kaplansky

SALAH KABBAJ*

Département de Mathématiques, Université Claude Bernard-Lyon I, 69622 Villeurbanne Cedex, France

Communicated by Melvin Hochster

Received February 27, 1989

In this paper we deal with the study of the stably strong S-domain property for pull-back constructions. Some applications are given in Section 1. The main purpose of Section 2 is to construct a new example of stably strong S-domains.

0. DÉFINITIONS— RÉSULTATS ÉLÉMENTAIRES

Tous les anneaux considérés sont supposés commutatifs, intègres et unitaires. Les homomorphismes d'anneaux sont supposés transformer l'élément unité en l'élément unité.

Un anneau A est appelé *S(eidenberg)-domaine* si pour tout idéal premier p de A de hauteur 1, l'idéal premier $p[X]$ est de hauteur 1 dans $A[X]$. L'anneau A est appelé *S-domaine fort* si pour tout idéal premier p de A, l'anneau quotient A/p est un S-domaine (c'est-à-dire si p et q étant deux idéaux consécutifs dans Spec(A), les idéaux étendus $p^* = p[X]$ et $q^* = q[X]$ sont consécutifs dans Spec($A[X]$)).

Après les études faites par A. Seidenberg [20] et P. Jaffard [13] sur les anneaux noethériens et les anneaux de Prüfer dans le cadre de la théorie de la dimension, I. Kaplancky [15] a rassemblé ces deux catégories d'anneaux dans une même classe: les S-domaines forts.

Bien que l'anneaux des polynômes à coefficients dans un S-domaine fort ne soit pas nécessairement un S-domaine fort [7], S. Malik et J. L. Mott [16] se sont intéressés entre autres, au passage de cette notion aux anneaux de polynômes à plusiers indéterminées. En particulier, ils ont montré que si A est un anneau de Prüfer alors l'anneau des polynômes $A[X_1, ..., X_n]$ est un S-domaine fort pour tout entier $n \geqslant 1$.

DÉFINITION 0.1. Un anneau A est appelé S-domaine fort universel si pour tout entier naturel n, l'anneau des polynômes $A[X_1, ..., X_n]$ est un S-domaine fort (cf. [16, 14, 8]).

* Ce travail a bénéficié du support financier d'une bourse de l'O.T.A.N. et du département de mathématiques de l'université de Rome.

0021-8693/91 $3.00

Le présent article est consacré à l'étude de la théorie des S-domaines forts universels. Un intérêt particulier est porté à l'étude du transfert de cette notion aux produits fibrés. Et ce, dans le même état d'esprit que cela a été fait dans [2].

Nous commençons par donner des exemples de S-domaines forts universels.

(0.2) Tout anneau noethérien est un S-domaine fort universel.

Kaplansky [15] a établi qu'un anneau noethérien est un S-domaine fort. Cela permet de conclure puisque l'anneau des polynômes à plusiers indéterminées à coefficients dans un anneau noethérien est noethérien.

(0.3) Tout anneau de Prüfer est un S-domaine fort universel.

Voir [16, Theorem 3.5]. De notre côté nous avons retrouvé ce résultat comme conséquence d'un théorème plus général se basant sur les liaisons qui existent entre la notion de S-domaine fort universel et la formule de la dimension [14, Théorème 2.1].

(0.4) Tout anneau universellement caténaire est un S-domaine fort universel.

Ce résultat est dû à A. Bouvier, D. E. Dobbs, et M. Fontana.

Ils ont en particulier établi qu'étant donné un anneau A tel que $A[X]$ soit caténaire, alors A est un S-domaine fort [4, Lemma 2.3, Theorem 2.4]. Ce résultat peut également être déduit du théorème 2.3 établi dans [14].

(0.5) Étant donné un anneau A, si pour idéal premier P de A l'anneau quotient A/P vérifie la formule de la dimension, alors A est un S-domaine fort universel [14, Théorème 2.5].

Les résultats précédents sont éclairés par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
A \text{ noethérien} \arrow[dd] & A \text{ anneau de Prüfer} \arrow[d] \\
 & A \text{ universellement caténaire} \arrow[d] \\
\text{A } S\text{-domaine fort universel} \arrow[d] & A/P \text{ vérifie la formule de la dimension pour tout idéal premier } P \text{ de } A \arrow[l] \\
\text{A } S\text{-domaine fort} \arrow[d] & \\
\text{A } S\text{-domaine} &
\end{tikzcd}$$

(0.6) Dans Section 2 nous construirons un exemple d'anneau A satisfaisant les conditions suivantes:

— A est un S-domaine fort universel.

— A n'est pas un anneau noethérien.

— Il existe un idéal premier P de A tel que l'anneau quotient A/P ne vérifie pas la formule de la dimension (donc A n'est pas universellement caténaire et à fortiori n'est pas un anneau de Prüfer).

— A n'est pas isomorphe à un anneau de polynômes à coefficients dans un S-domaine fort universel.

Pour ce faire, nous allons auparavant étudier (dans Section 1), le transfert de la notion de S-domaine fort universel à certains produits fibrés particuliers, généralisant les anneaux de type "$D+M$."

Nous allons d'abord énoncer certains résultats élémentaires pour les S-domaines, S-domaines forts et S-domaines forts universels.

Rappelons au passage qu'un anneau factoriel est trivialement un S-domaine. Cependant, il n'est pas nécessairement un S-domaine fort [16].

(0.7) *Si A est un S-domaine fort alors* $\operatorname{ht} p^* = \operatorname{ht} p$ *pour tout* $p \in \operatorname{Spec}(A)$. *On peut facilement vérifier que la réciproque est vraie dans le cas où A est caténaire.*

(0.8) *Soit A un anneau de dimension 2. Les assertions suivantes sont enquivalentes*:

(i) *A est un S-domaine fort*;

(ii) *A est un S-domaine et* $\dim A[X] = 1 + \dim A$.

Démonstration. Il suffit de montrer (ii) $\Rightarrow$ (i). Soient p et q deux idéaux premiers de A tels que $\operatorname{ht}(q/p) = 1$.

Nous allons envisager deux cas. Si $p = (0)$ alors $\operatorname{ht} q = 1$ et par conséquent $\operatorname{ht} q[X] = 1$ puisque A est un s-domaine. Si $p \neq (0)$ alors q doit être un idéal maximal de A.

Supposons que $\operatorname{ht}(q[X]/p[X]) > 1$, il existe alors un idéal premier Q de $A[X]$ tel que $q[X] \supset Q \supset p[X]$, ce qui donne la chaîne suivante:

$$(q, X) \supset q[X] \supset Q \supset p[X] \supset (0)$$

qui est une chaîne de longueur au moins égale à 4. Cela est contradictoire avec l'hypothèse $\dim A[X] = \dim A + 1 = 3$. ∎

Rappelons qu'un anneau A est dit de *Jaffard* [1, 6] s'il est de dimension de Krull finie et s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes:

(i) $\dim_v A = \dim A$;

(ii) $\dim A[X_1, \ldots, X_n] = n + \dim A$, pour tout $n \geqslant 0$.

A est dit *localement de Jaffard* [1] si A_p est un anneau de Jaffard pour tout $p \in \operatorname{Spec}(A)$ (i.e., $\operatorname{ht} p[X_1, ..., X_n] = \operatorname{ht} p$, pour tout $p \in \operatorname{Spec}(A)$ et pour tout entier naturel n).

(0.9) [4, Corollary 6.3] *Pour un anneau de dimension* 1, *les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un S-domaine.*

(ii) *A est un S-domaine fort.*

(iii) *A est un S-domaine fort universel.*

(iv) *A est un anneau de Jaffard.*

(v) *A est localement de Jaffard.*

(vi) *$A[X]$ est caténaire.*

(vii) *A est universellement caténaire.*

(viii) $\dim A[X] = 2$.

(ix) *A' est un anneau de Prüfer où A' désigne la clôture intégrale de A.*

La proposition précédente n'est plus valable en dimension 2. En effet, un S-domaine fort de dimension 2 n'est pas nécessairement un anneau de Jaffard. Il suffit de considérer l'exemple construit à cet effet dans [7].

Nous allons clore ce paragraphe par quelques résultats sur le transfert des notions de S-domaine, S-domaine fort et S-domaine fort universel aux extensions entières.

On dit qu'un anneau A est pseudo-prüférien (ou un PVMD) si l'ensemble de ses v-idéaux finis $D_F(A)$ est un v-groupe [19, 21]. Étant donnés deux anneaux A et B tels que $A \to B$ soit entier et A' la clôture intégrale de A, Malik et Mott [16, Theorem 4.15] ont établi que si A' est un PVMD, alors B est un S-domaine. Un PVMD étant un S-domaine, ce résultat devient la conséquence immédiate d'un résultat plus général:

THÉORÈME 0.10. *Soient $A \to B$ un homomorphisme entier d'anneau et A' la clôture intégrale de A.*

Si A' est un S-domaine, alors B est un S-domaine.

LEMME 0.11. *Soit $A \to B$ un homomorphisme entier d'anneaux. Alors*

(a) *Si B est un S-domaine, alors A est un S-domaine.*

(b) *Si B est un S-domaine fort, alors A est un S-domaine fort.*

(c) *Si B est un S-domaine fort universel, alors A est un S-domaine fort universel.*

Démonstration. (a) et (b) découlent de la démonstration de [16, Theorem 4.6]. (c) découle du fait que si $A \to B$ est un homomorphisme entier d'anneau, alors: $A[X_1, ..., X_n] \to B[X_1, ..., X_n]$ est un homomorphisme entier d'anneau. Finalement, (b) permet de conclure.

Démonstration (du Théorème 0.10). Soit $\bar{A}$ la fermeture intégrale de A dans le corps des fractions de B. D'après [16, Corollary 4.10], $\bar{A}$ est un S-domaine (car l'homomorphisme $A' \hookrightarrow \bar{A}$ est entier).

D'après le Lemme 0.11(a), B est un S-domaine (car l'homomorphisme $B \hookrightarrow \bar{A}$ est entier). ∎

(0.12) *Tout anneau entier sur un anneau noethérien est un S-domaine fort universel* [16, *Proposition* 4.20].

1. Produits fibrés—théorème fondamental

Étant donné un anneau de valuation V de la forme $K + M$, où M est son idéal maximal et K son corps résiduel. Posons $R = D + M$, où D est un sous-anneau de K de corps des fractions k. Un intérêt particulier a été accordé à l'étude du transfert, de D à R, des notions d'anneau noethérien, cohérent, de Bezout, de Prüfer... etc. [9]. Par ailleurs, Malik et Mott [16] on établi que R est un S-domaine fort si et seulement si D est un S-domaine fort et K est une extension algébrique de k. De notre côté, nous allons nous intéresser à une situation plus générale. Nous déterminerons ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour que des produits fibrés généralisant les anneaux "$D + M$"-soient des S-domaines forts universels. A la suite de quoi, nous serons alors en mesure de construire des S-domaines forts universels n'appartenant à aucune des familles déjà connues.

Nous commençons par énoncer le théorème fondamental de ce chapitre.

Théorème 1.1 *Soient T un anneau, M un idéal maximal de T et K son corps résiduel. Soit φ: $T \to K$ la surjection canonique et posons $R = \varphi^{-1}(D)$, où D est un sous-anneau de K de corps des fractions k. Si T et D sont des S-domaines forts universels et K est une extension algébrique de k, alors R est un S-domaine fort universel.*

Pour démontrer Théorème 3.1, il nous faut passer par deux lemmes et deux propositions.

Une des difficultés majeures dans l'étude des anneaux de type "$D + M$" réside dans le fait qu'un anneau de polynômes à coefficients dans un $D + M$ n'est plus un anneau de type "$D + M$." Cela se traduit par des complications au niveau du spectre de l'anneau $(D + M)[X_1, ..., X_n]$ et a amené certains auteurs [5] à utiliser des propriétés topologiques des spectres.

Pour lever cette difficulté nous faisons appel au lemme (algébrique) suivant:

LEMME 1.2 [2, Lemma 2.1]. *Étant donnés un anneau A, une partie multiplicative S de A, un idéal saturé I de A ($S^{-1}I \cap A = I$) et un idéal premier Q de A contenant I. Alors il existe un idéal premier P de A tel que $P \cap S = \emptyset$ et $Q \supset P \supset I$.*

LEMME 1.3. *Pour un anneau A donné, les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *A est un S-domaine fort universel.*

(ii) *A_p est un S-domaine fort universel pour tout idéal premier p de A.*

(iii) *A_M est un S-domaine fort universel pour tout idéal maximal M de A.*

Démonstration. La notion de S-domaine fort étant une propriété locale [16, Corollary 2.4], il suffit de montrer l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i).

Soient n un entier naturel et P, Q deux idéaux premiers de $A[X_1, ..., X_n]$ tels que $Q \supset P$ et ht $Q/P = 1$. Posons $p = P \cap A$ et $q = Q \cap A$. Il existe alors un idéal maximal M de A tel que $M \supset q \supset p$. Par conséquent, P_M et Q_M sont deux idéaux premiers de $A_M[X_1, ..., X_n]$ tels que $Q_M \supset P_M$ et ht $Q_M/P_M = 1$.

Par hypothèse, A_M est S-domaine fort universel, donc, ht $Q_M[Y]/P_M[Y] = 1$. Posons $S = A - M$. Nous avons $S^{-1}A[X_1, ..., X_n] = A_M[X_1, ..., X_n]$. D'après la correspondance bijective entre les idéaux premiers saturés de $A[X_1, ..., X_n]$ et ceux de $A_M[X_1, ..., X_n]$ on déduit que ht $Q[Y]/P[Y] =$ ht $Q_M[Y]/P_M[Y] = 1$. Car $M \supset q \supset p$, et par conséquent $P \cap S = Q \cap S = \emptyset$. A est donc un S-domaine fort universel. ∎

PROPOSITION 1.4. *Soient T un anneau local, M son idéal maximal et K son corps résiduel. Soit $\varphi: T \to K$ la surjection canonique et posons $R = \varphi^{-1}(D)$, où D est un sous-anneau de K tel que* $\mathrm{Frac}(D) = K$. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *R est un S-domaine fort universel.*

(ii) *T et D sont des S-domaines forts universels.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) R est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, two heads] & K \end{tikzcd}$$

D'après [1, Lemma 2.2(a)] R/M est isomorphe à D. L'anneau D est donc un S-domaine fort universel. Rappelons que l'image homomorphe d'un S-domaine fort est un S-domaine fort [16, Proof of Theorem 5.1].

T étant local, il découle du [1, Lemma 2.1(c)] que M est un idéal divisé de R et $R_M = T$ (puisque $\mathrm{Frac}(D) = K$). T est donc un S-domaine fort universel, grâce au Lemme 1.3.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soient n un entier naturel et P, Q deux idéaux premiers de $R[X_1, ..., X_n]$ tels que $Q \supset P$ et $\mathrm{ht}\, Q/P = 1$. Posons $p = P \cap R$ et $q = Q \cap R$.

M étant un idéal divisé de R, il est comparable avec tout idéal premier de R. Par conséquent, nous envisageons trois cas:

• Si $M \supseteq q \supset p$, alors P_M et Q_M sont deux idéaux premiers de $R_M[X_1, ..., X_n]$ tels que $Q_M \supset P_M$ et $\mathrm{ht}\, Q_M/P_M = 1$. Par conséquent, $\mathrm{ht}\, Q_M[Y]/P_M[Y] = 1$ puisque $R_M = T$ est, par hypothèse, un S-domaine fort universel. Il en résulte que

$$\mathrm{ht}\, Q[Y]/P[Y] = \mathrm{ht}\, Q_M[Y]/P_M[Y] = 1.$$

• Si $q \supset p \supseteq M$, nous avons nécessairement $Q \supset P \supset M[X_1, ..., X_n]$. L'anneau $R[X_1, ..., X_n]$ est un pruidt fibré déterminé par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} R[X_1, ..., X_n] & \twoheadrightarrow & D[X_1, ..., X_n] \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ T[X_1, ..., X_n] & \xrightarrow{\psi} & K[X_1, ..., X_n] \end{array}$$

Il existe alors deux idéaux premiers P' et Q' de $D[X_1, ..., X_n]$ tels que $P = \psi^{-1}(P')$, $Q = \psi^{-1}(Q')$, $Q' \supset P'$, et $\mathrm{ht}\, Q'/P' = 1$. Par conséquent, $\mathrm{ht}\, Q[Y]/P[Y] = \mathrm{ht}\, Q'[Y]/P'[Y] = 1$ puisque $R[X_1, ..., X_n]/M[X_1, ..., X_n] \simeq D[X_1, ..., X_n]$ est un S-domaine fort universel.

• Si $q \supset M \supset p$, posons $I = P + M[X_1, ..., X_n]$. I est un idéal propre de $R[X_1, ..., X_n] (Q \supset I)$, saturé pour la partie multiplicative $S = R - M$. En effet,

$$\begin{aligned} I_M &= P_M + (M[X_1, ..., X_n])_M \\ &= P_M + MR_M[X_1, ..., X_n] \\ &= P_M + M[X_1, ..., X_n]. \end{aligned}$$

Puisque $M = MR_M (M$ idéal divié). Il en résulte que

$$\begin{aligned} I_M \cap R[X_1, ..., X_n] &= P_M \cap R[X_1, ..., X_n] + M[X_1, ..., X_n] \\ &= P + M[X_1, ..., X_n] \\ &= I. \end{aligned}$$

D'après Lemme 1.2 il existe un idéal premier P' de $R[X_1, ..., X_n]$ tel que $I \subset P' \subset Q$ et $P' \cap (R \backslash M) = \emptyset$. Ce qui donne $P \subset P' \subsetneq Q$ puisque $Q \cap (R \backslash M) \neq \emptyset$. Par hypothèse, P et Q sont consécutifs. Donc $P = P'$. Il en résulte que $M[X_1, ..., X_n] \subset P' = P \subsetneq Q$. Il en résulte que $p = M$. D'où la contradiction. ∎

PROPOSITION 1.5. *Soient T un anneau local, M son idéal maximal et K son corps résiduel. Soit $\varphi: T \to K$ la surjection canonique et posons $R = \varphi^{-1}(k)$, où k est un sous-corps de K. Si T est un S-domaine fort universel et K une extension algébrique de k, alors R est un S-domaine fort universel.*

Démonstration. $R[X_1, ..., X_n]$ est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} R[X_1, ..., X_n] \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k[X_1, ..., X_n] \arrow[d, hook] \\ T[X_1, ..., X_n] \arrow[r, two heads, "\psi"] & K[X_1, ..., X_n] \end{tikzcd}$$

K étant une extension algébrique de k, T est entier sur R. T étant un S-domaine fort universel, Lemme 0.11(c) permet de conclure. ∎

Démonstration (du Théorème 1.1). Nous sommes en présence des deux produits fibrés suivants:

$$\begin{tikzcd} R = \varphi^{-1}(D) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ T_1 = \varphi^{-1}(k) \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k \arrow[d, hook] \\ T \arrow[r, two heads] & K \end{tikzcd}$$

Le théorème est vrai dans le cas (où T est) local. En effet, si T est local, il en est de même pour T_1. Ainsi Propositions 1.4 et 1.5 permettent de conclure.

Revenons maintenant au cas général (T non nécessairement local).

Soit p un idéal premier de R. D'après [1, Lemme 2.1(e), (g)], deux cas se présentent:

- Si $M \subsetneq p$, alors il existe un idéal premier q de T tel que $q \cap R = p$ et $R_p = T_q$. L'anneau Rp est donc un S-domaine fort universel.
- Si $p \supset M$, alors il existe un idéal premier q de D tel que $p = \varphi^{-1}(q)$ et R_p est un produit fibré déterminé par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} R_p \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D_q \arrow[d, hook] \\ T_M \arrow[r, two heads] & K \end{tikzcd}$$

D_q et T_M sont des S-domaines forts universels et K est une extension algébrique de $\mathrm{Frac}(D_q) = k$, donc R_p est un S-domaine fort universel, puisque le théorème est vrai dans le cas local.

Nous venons d'établir que R_p est un S-domaine fort universel pour tout idéal premier p de R, par conséquent R est un S-domaine fort universel, d'après Lemme 1.3. ∎

Comme première application du Théorème 1.1, nous allons établir un résultat intéressant sur les anneaux pseudo-valuation (cf. [11]). Soit R un PVD d'idéal maximal M. Soit $V = (M : M)$ l'anneau de valuation associé à R. Hedstrom et Houston [12] ont établi que R est un S-domaine fort si et seulement si $\dim R[X] = \dim R + 1$. Nous sommes ainsi en mesure de généraliser ce résultat.

COROLLAIRE 1.6. *Soit R in PVD de dimension finie et d'idéal maximal M. Soit $V = (M : M)$ l'anneau de valuation associé à R. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *R est un S-domaine fort universel.*

(ii) *R est un anneau de Jaffard.*

(iii) *V/M est une extension algébrique de R/M.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii) en général. (ii) et (iii) sont équivalents, par [1, Theorem 2.6(b)]. (iii) $\Rightarrow$ (i) par Théorème 1.1. ∎

COROLLAIRE 1.7. *Soit V un anneau de valuation (de dimension finie) de la forme $V = K + M$ où K est son corps résiduel et M est l'idéal maximal de V. Posons $R = D + M$, où D est un sous-anneau de K de corps des fractions k. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

(i) *R est un S-domaine fort universel.*

(ii) *D est un S-domaine fort universel et K est une extension algébrique de k.*

Démonstration. R est un produit fibré illustré par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} R = D + M \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & D \arrow[d, hook] \\ V = K + M \arrow[r, two heads] & K \end{tikzcd}$$

Si R est un S-domaine fort (universel) alors nécessairement K est une extension algébrique de k [16, Th. 5.1]. V étant un S-domaine fort universel, Théorème 1.1 permet de conclure.

COROLLAIRE 1.8. *Soient K un corps, D un sous-anneau de K de corps des fractions k et n un entier positif. Posons $R = D + (X_1, ..., X_n) K[X_1, ..., X_n]$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *R est un S-domaine fort universel.*

(ii) *D est un S-domaine fort universel et K est une extension algébrique de k.*

Démonstration. R est un produit fibré illustré par le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} R = D + (X_1, ..., X_n) K[X_1, ..., X_n] & \twoheadrightarrow & D \\ \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\ T = K[X_1, ..., X_n] & \twoheadrightarrow & K \end{array}$$

Si R est un S-domaine fort universel alors R est localement de Jaffard [14, Lemme 1.4]. Par conséquent, K est une extension algébrique de k [1, Corollary 2.12]. T étant un anneau noethérien, il est un S-domaine fort universel. Théorème 1.1 permet de conclure que D est un S-domaine fort universel. La réciproque découle aussi de Théorème 1.1. ∎

Ainsi, d'après Corollaire 1.8 on peut affirmer que l'anneau $R_1 = \mathbb{Q} + (X_1, ..., X_n) \mathbb{R}[X_1, ..., X_n]$ n'est pas un S-domaine fort universel, alors que $R_2 = \mathbb{Q} + (X_1, ..., X_n) \mathbb{Q}(i)[X_1, ..., X_n]$ en est un.

THÉORÈME 1.9. *Soient L un corps, K un sous-corps de L et $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, une famille finie d'anneaux de valuation de L de dimension finie tels que $V_i \not\subset V_j$ pour $i \neq j$ et $V_i = K + M_i$ où M_i est l'idéal maximal de V_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Soient $R_i = D_i + M_i$ où D_i est un sous-anneau de K et $R = \bigcap_i R_i$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *R est un S-domaine fort universel.*

(ii) *D_i est un S-domaine fort universel et K est une extension algébrique de* $\mathrm{Frac}(D_i)$ *pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.*

Démonstration. Supposons que R soit un S-domaine fort universel; soit $i \in \{1, ..., n\}$ et posons $S_i = \{s \in R/s$ est inversible dans $R_i\}$. S_i étant une partie multiplicative de R, Arnold et Gilmer [3] ont montré que $S_i^{-1}R = R_i$. Donc, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, R_i est un S-domaine fort universel. R_i étant un produit fibré déterminé par le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} R_i = D_i + M_i & \twoheadrightarrow & D_i \\ \cap\downarrow & & \cap\downarrow \\ V_i = K + M_i & \twoheadrightarrow & D \end{array}$$

Théorème 1.1 permet de conclure.

Réciproquement, soit M un idéal maximal de R, d'après [10] il existe $i \in \{1, ..., n\}$ et M'_i idéal maximal de R_i tel que $M = M'_i \cap R$. Montrons que $R_M = R_{iM'_i}$. Il est facile de voir que $R_M \subset R_{iM'_i}$. Soit x/s un élément de $R_{iM'_i}$, on a vu que $R_i = S_i^{-1}R$ donc on peut écrire $x = x_1/t_1$ et $s = x_2/t_2$ avec $x_1, x_2 \in R$ et $t_1, t_2 \in S_i$. Il en résulte que $x/s = x_1 t_2 / x_2 t_1$; t_1 est inversible dans R_i et $x_2 = st_1 \notin M'_i$ donc $x_2 t_1 \notin M$ et par conséquent $x/s \in R_M$. Par hypothèse, D_i est un S-domaine fort universel et K est une extension algébrique de Frac(D_i); d'après Théorème 1.1, R_i est un S-domaine fort universel et par conséquent R_M en est un aussi. M étant arbitraire, Lemme 1.3 permet de conclure. ∎

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Théorème 1.9 nous permet de construire (cf. l'Exemple 2.2) des exemples d'anneaux A tels que

(a) $\dim A = n$.

(b) A soit un S-domaine fort.

(c) A ne soit pas un S-domaine fort universel.

2. Application à un contre-exemple de Nagata: construction d'un nouvel exemple de S-domaine fort universel

Pour ce faire, nous allons reprendre une construction de Nagata [17]. Soit k un corps, posons $W = k[X, Y]_{(X-1, Y)}$. Soit V un anneau de valuation noethérien contenant $k[X, Y]$ et contenu dans $k(X, Y)$ tel que si P est l'idéal maximal de V, on a $P \cap k[X, Y] = (X, Y)$ et V/P est isomorphe à k. Posons $T = V \cap W$.

T est semi-local d'idéaux maximaux M et N. Il vérifie en outre $T = (k + M \cap N)[X]$ (cf. [17]).

Exemple 2.1. Posons $R = k + M \cap N + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)}$. Alors

(a) R est un S-domaine fort universel.

(b) R n'est pas un anneau noethérien.

(c) Il existe un idéal premier p de R tel que l'anneau quotient R/p ne vérifie pas la formule de la dimension (donc R n'est pas universellement caténaire et à fortiori n'est pas un anneau de Prüfer).

(d) R n'est pas isomorphe à un anneau de polynômes à coefficients dans un S-domaine fort universel.

Démonstration. (a) L'anneau R est un produit fibré illustré par le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd} R = k + M \cap N + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & k + M \cap N \arrow[d, hook] \\ V = k(X, Y)[Z]_{(Z)} \arrow[r, two heads] & k(X, Y) \end{tikzcd}$$

Sachant que [17] $k + M \cap N$ est un anneau noethérien de corps des fractions $k(X, Y)$, Théorème 1.1 permet de conclure que R est un S-domaine fort universel.

(b) R est un anneau de type "$D + M$" issu de l'anneau de valuation $V = k(X, Y)[Z]_{(Z)}$. L'anneau R ne peut être un anneau noethérien, puisque $k + M \cap N$ n'est pas un corps ($\dim k + M \cap N = 2$).

(c) Posons $p = Zk(X, Y)[Z]_{(Z)}$. L'anneau quotient $R/p \simeq k + M \cap N$ ne vérifie pas la formule de la dimension. En effet, remarquons que $T = (k + M \cap N)[X]$. T est donc une $(k + M \cap N)$-algèbre de type fini telle que l'homomorphisme d'anneaux $k + M \cap N \hookrightarrow T$ est entier et $M \cap (k + M \cap N) = M \cap N$. Ainsi, nous avons: ht $M = 1$, alors que

$$\operatorname{ht} M \cap N + \operatorname{deg\,tr}_{k + M \cap N} T - \operatorname{deg\,tr}_{(k + M \cap N)/M \cap N} T/M = 2 + 0 - 0.$$

Soulignons que $T/M \simeq (k + M \cap N)/M \cap N \simeq k$.

(d) Pour montrer que R n'est pas isomorphe à un anneau de polynômes, il suffit de comparer les spectres. En effet, l'anneau R est de dimension 3 et son spectre est totalement ordonné:

$$\begin{array}{l} \bullet\; M \cap N + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} \\ | \\ \bullet\; p + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} \\ | \\ \bullet\; Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} \\ | \\ \bullet\; (0) \end{array}$$

où p est l'idéal premier de $k + M \cap N$ de hauteur 1. Par contre, le spectre d'un anneau de polynôme n'est jamais totalement ordonné. ∎

Nous terminerons ce paragraphe par une application du Théorème 1.9. En fait, nous allons construire des S-domaines forts, de dimension quelconque, qui ne soient pas des S-domaines forts universels.

L'exemple suivant peut être utile pour essayer de résoudre l'une des conjectures inspirées par les travaux de Ratliff [18]. En effet, si A est un anneau noethérien tel que $A[X]$ est caténaire alors A est universellement caténaire [18]. Le problème consiste à savoir s'il existe A (nécessairement non noethérien) tel que $A[X]$ soit caténaire et $A[X, Y]$ ne soit pas caténaire. Ce qui revient à se demander s'il existe un anneau A tel que $A[X]$ soit caténaire et $A[X]$ ne soit pas un S-domaine fort. D'où la nécessité de savoir construire des anneaux A tels que A soit un S-domaine fort et $A[X]$ ne le soit pas.

EXEMPLE 2.2. Pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe un anneau R_n tel que

(a) $\dim R_n = n$.

(b) R_n est un S-domaine fort.

(c) R_n n'est pas un S-domaine fort universel.

Démonstration. Rappelons qu'en dimension 1, les notions de S-domaine fort et S-domaine fort universel sont équivalentes.

Nous reprenons une construction de [7] illustrant un exemple de S-domaine fort R tel que $R[X]$ n'est pas un S-domaine fort.

Soient k un corps et X, Y, Z des indéterminées sur k. Posons:

$$V = k(X, Y) + Zk(X, Y)[Z]_{(Z)} = k(X, Y) + M_1.$$

Soit φ: $V \to V/M_1 \simeq k(X, Y)$ la surjection canonique et soit V' l'anneau de valuation associé à la valuation v: $k(X, Y) \to \mathbb{Z}[\pi]$, où $v(X) = \pi$ et $v(Y) = 1$.

L'anneau $\varphi^{-1}(V')$ est un anneau de valuation de la forme $k + M_2$ où M_2 est son idéal maximal. Posons:

$$V_1 = \varphi^{-1}(V') = k + M_2$$

et

$$W = k(X, Y) + (Z+1)\, k(X, Y)[Z]_{(Z+1)}.$$

Alors, $T = V_1 \cap W$ est un anneau de Prüfer semi-local d'idéaux maximaux M et N.

Il est prouvé dans [7] que l'anneau $A = k + M \cap N$ est un S-domaine fort, de dimension 2, de corps des fractions $k(X, Y, Z)$ et $A[Z_1]$ n'est pas un S-domaine fort (Z_1 est une indéterminée sur A).

Donc, pour $n=2$ on prend $R_2=A$. Supposons désormais $n \geqslant 3$.

Nous choisissons $k=\mathbb{Q}(i)$, où $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions rationnelles.

Soient V' un anneau de valuation de dimension $n-2$ de la forme $V'=\mathbb{Q}(i)(X, Y, Z)+M'$ où M' est son idéal maximal, V'' un anneau de valuation de dimension 1 de la forme $V''=\mathbb{Q}(i)(X, Y, Z)+M''$ où M'' est son idéal maximal tels que V' et V'' soient incomparables et $\mathrm{Frac}(V')=\mathrm{Frac}(V'')$.

Enfin, posons:

$$A_1=\mathbb{Q}(i)+M \cap N+M'=A+M'$$

et

$$A_2=\mathbb{Q}(X, Y, Z)+M''.$$

L'anneau $R=A_1 \cap A_2$ vérifie les propriétés (a), (b), et (c) de Exemple 2.2. En effet, nous sommes en présence des produits fibrés suivants:

$$\begin{tikzcd} A_1=A+M' \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook] \\ V'=Q(i)(X, Y, Z)+M' \arrow[r, two heads] & Q(i)(X, Y, Z) \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} A_2=\mathbb{Q}(X, Y, Z)+M'' \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & \mathbb{Q}(X, Y, Z) \arrow[d, hook] \\ V''=Q(i)(X, Y, Z)+M'' \arrow[r, two heads] & Q(i)(X, Y, Z) \end{tikzcd}$$

D'après [16, Theorem 5.1], A_1 et A_2 sont des S-domaines forts. [16, Theorem 5.3] permet de conclure que $R=A_1 \cap A_2$ est un S-domaine fort.

D'après Théorème 1.9 l'anneau R n'est pas un S-domaine fort universel puisque A_1 n'en est pas un. D'autre part, on peut aisément vérifier que

$$\dim R=\mathrm{Sup}(\dim A_1, \dim A_2).$$

D'où

$$\begin{aligned} \dim R &= \dim A_1 \\ &= \dim A+\dim V' \\ &= 2+n-2 \\ &= n, \end{aligned}$$

on prend $R_n=R$. ▮

Quant à la réciproque du Théorème 1.1 ou plutôt celle de la Proposition 1.5, le problème demeure ouvert. Néanmoins, nous avons quelques résultats intermédiaires. En effet, soit R le produit fibré déterminé par les données de la Proposition 1.5:

$$\begin{array}{ccc} R & \twoheadrightarrow & k \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \twoheadrightarrow & K \end{array}$$

Supposons que R soit un S-domaine fort universel, alors R est localement de Jaffard. On en déduit que *K est une extension algébrique de k* et que *T est localement de Jaffard* [1]. Cependant, rien ne permet d'affirmer que T est un S-domaine fort universel.

Bibliographie

1. D. F. Anderson, A. Bouvier, D. E. Dobbs, M. Fontana, and S. Kabbaj, On Jaffard domains, *in* "Expositiones Mathematicae," Bibliograph. Institut & F. A. Brockmans AG, Vol. 6, pp. 145–175, 1988.
2. D. F. Anderson, D. E. Dobbs, S. Kabbaj, and S. B. Mulay, Universally catenarian domains of $D+M$ type, *Proc. Amer. Math. Soc.* **104**, No. 2 (1988), 378–385.
3. J. T. Arnold and R. Gilmer, The dimension sequence of a commutative ring, *Amer. J. Math.* **96** (1974), 385–408.
4. A. Bouvier, D. E. Dobbs, and M. Fontana, Universally catenarian integral domains, *Adv. in Math.* **72** (1988), 211–238.
5. A. Bouvier, D. E. Dobbs, and M. Fontana, Two sufficient conditions for universal catenarity, *Comm. Algebra* **15** (1987), 861–872.
6. A. Bouvier and S. Kabbaj, Examples of Jaffard domains, *J. Pure Applied Algebra* **54** (1988), 155–165.
7. J. W. Brewer, P. R. Montgomery, E. A. Rutter, and W. J. Heinzer, Krull dimension of polynomial rings, *in* "Lecture Notes in Math.," Vol. 311, pp. 26–45, Springer-Verlag, New York, 1972.
8. M. Fontana and S. Kabbaj, On $D+(X_1, ..., X_r)\,D_S[X_1, ..., X_r]$ domains, *J. Pure Appl. Algebra*, to appear.
9. R. Gilmer, Multiplicative ideal theory, *in* "Queen's Papers in Pure and Applied Math.," Queen's Univ., Kingston, ON, 1968.
10. R. Gilmer, Two constructions of Prüfer domains, *J. Reine Angew. Math.* **239/240** (1969), 153–162.
11. J. R. Hedstrom and E. G. Houston, Pseudo-valuation domains, *Pacific J. Math.* **75** (1978), 137–147.
12. J. R. Hedstrom and E. G. Houston, Pseudo-valuation domains, II, *Houston J. Math.* **4** (1978), 199–207.
13. P. Jaffard, Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes, *in* "Mém. Sc. Math.," Vol. 146, Gauthier-Villars, Paris, 1960.
14. S. Kabbaj, La formule de la dimension pour les S-domaines forts universels, *Boll. Un. Math. Ital. D* (6) **5**, No. 1, (1986), 145–161.

15. I. KAPLANSKY, Commutative rings, 2nd print, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1974.
16. S. MALIK AND J. L. MOTT, Strong S-domains, *J. Pure Appl. Algebra* **28** (1983), 249–264.
17. M. NAGATA, "Local Rings," Interscience, New York, 1962.
18. L. J. RATLIFF, On quasi-unmixed local domains, the altitude formula and the chain condition for prime ideals, II, *Amer. J. Math.* **92** (1970), 99–144.
19. A. RYCKAERT, "Sur le groupe des classes et le groupe local des classes d'un anneau intègre," Thèse de doctorat, Université Claude Bernard, Lyon I, 1986.
20. A. SEIDENBERG, On the dimension theory of rings, II, *Pacific J. Math.* **3** (1952), 603–614.
21. M. ZAFRULLAH, Some polynomial characterizations of Prüfer v-multiplication domains, *J. Pure Appl. Algebra* **32** (1984), 231–237.