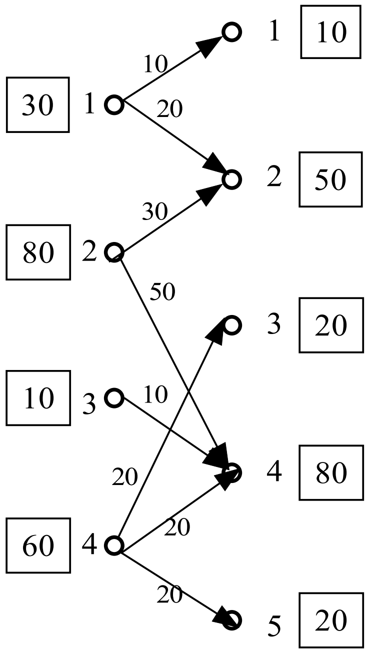


٣-٦ مسألة التعيين The Assignment Problem

ندرس هنا مسألة تحديد امثل تعيين لـ n من العمال على n من الوظائف، علما بأنه إذا أعطى العامل i الوظيفة j فإن التكلفة هي c_{ij}. كذلك فإن كل عامل يجب أن تحدد له وظيفة واحدة فقط، ولكل وظيفة يجب أن يحدد لها عامل واحد فقط.

وبالتالي فإن الحل $x_{ij}=1$ يعني أن العامل i سيكون من نصيبه الوظيفة j و $x_{ik}=0$ لكل $k \neq j$ وكذلك $x_{lj}=0$ لكل $l \neq i$. من ذلك يتضح أن الشرط

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1,\cdots,n$$

يعني أن العامل i سيأخذ وظيفة واحدة فقط. وكذلك الشرط

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1,\cdots,n$$

يعني أن الوظيفة j ستكون من نصيب عامل واحد فقط.
من الواضح أن الهدف هو تحديد افضل تعيين بحيث تكون التكلفة الأجمالية أقل مايمكن.
بشكل عام يمكن كتابته مشكلة التعيين هذه بالشكل الرياضي التالي:

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s. t.}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1,\cdots,n$$

$$x_{ij} = 0,1 \qquad i, j = 1,\cdots,n$$

والتي يمكن اعادة كتابتها على الشكل:

$$\min \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$\text{s. t.}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{1}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

يتضح لنا من هذا الشكل أن مشكلة التوظيف ما هي إلا حالة خاصة من مسألة النقل العامة حيث $m = n$ وحيث $a_i = 1$ و $b_j = 1$ لجميع i.

نظرية ٦-٣-١

إن جميع المتغيرات x_{ij} لأي حل مسموح به لمسألة التعيين ستكون مساوية إما صفر أو واحد.

البرهان

نظرا لأن المصفوفة **A** هي نفس مصفوفة المعاملات لمشكلة النقل واعتمادا على أن أي أساس لمصفوفة النقل ستكون مصفوفة مثلثية (انظر خواص مصفوفة النقل فصل ٦-٢-١) ونظرا لأن الطرف الأيمن أعداد صحيحه لذا فإن كل المتغيرات الأساسية في أي حل أساسي ستكون أعداداً صحيحه. من الواضح أن أي متغير لن يزيد عن الواحد وفقاً لقيود المسألة، لذا فإن أي متغير سيأخذ إما القيمة صفر أو القيمة واحد.

□

بما أن أي صف (أو عمود) من صفوف (أعمدة) مصفوفة الأساس سيحوي على الأكثر على عنصر واحد فقط غير صفري لذا فانه سيكون هناك على الأكثر n من المتغيرات الأساسية تأخذ القيمة واحد. وحيث انه بالنسبة لمشكلة النقل العامة فإن أي حل منتظم Non degenerate سيحوي على $2n-1$ من المتغيرات الموجبة، فإن أي حل لمشكلة التعيي ن سيحوي $n-1$ من المتغيرات ذات القيمة صفر. أي أن هذه المسألة تعتبر مسألة سيئة الانتظام Highly degenerate. بالتالي فإن تطبيق خوارزمية النقل عليها لن يكون عمليا. ولابد من اللجوء إلى طرائق اكثر فعالية، وبالفعل فلقد قام رياضيان من هنغاريا بوصف خوارزمية ذات فعالية عالية لحل هذه المسألة، وقد عرفت بالخوارزمية الهنغارية والتي عممت فيما بعد إلى الطريقة المعروفة باسم طريقة الأصلية-المقابلة Primal-Dual method لمسائل البرمجة الخطية بشكلها العام.

قبل البدء بدراسة هذه الخوارزمية فإننا سنبدأ بدراسة بعض الأمور الرئيسية. التي تمهد الطريق لتلك الخوارزمية.

٦-٣-١ ثنائية مسألة التعيين Duality of Assignment Problem

الشكل العام للثنائية هو

$$\sum_{i=1}^{n} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \ \max$$

s. t.

$$u_i + v_j \le c_{ij} \qquad i, j = 1,2,\ldots,n$$

$$u_i , v_j \quad \text{غير مقيدة}$$

وباستخدام نظرية الـ Weak Complementary Slackness نحصل على

$$\left(c_{ij}-u_i-v_j\right)x_{ij}=0 \qquad i,j=1,2,\ldots,n$$

بالتالي فإذا استطعنا إيجاد مجموعه من الحلول المسموح بها $u's,\ v's\ \&\ x's$ والتي تحقق شروط نظرية الـ Complementary Slackness فإن هذه المجموعة ستكون مجموعة حلول مثلى.

تعريف ٦-٣-٢

نعرف المصفوفة المختزلة Reduced matrix بـ

$$\hat{c}_{ij}=c_{ij}-u_i-v_j$$

أي هي تلك المصفوفة التي نحصل عليها بطرح من كل صف اصغر عنصر في ذلك الصف ثم نطرح من كل عمود من أعمدة المصفوفة الناتجة اقل عنصر في ذلك العمود.

مثال ٦-٣-٣

باعتبار المصفوفة

				Row min
3	2	5	4	2
0	1	2	3	0
4	1	−1	3	−1
2	5	3	4	2

المصفوفة الناتجة بعد طرح القيمة الصغرى من كل صف هي:

	1	0	3	2
	0	1	2	3
	5	2	0	4
	0	3	1	2
Column min	0	0	0	2

بالتالي فإن المصفوفة المختزلة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{c}_{ij}$$

نظرية ٦-٣-٤

إن اكبر عدد من الخلايا الصفرية المستقلة في المصفوفة المختزلة يساوي اقل عدد ممكن من الخطوط التي تغطي جميع أصفار المصفوفة المختزلة.

بعد هذه المقدمة الموجزة نقدم الآن شرحا للخوارزمية الهنغارية.

خوارزمية ٦-٣-٥ الخوارزمية الهنغارية Hungarian Algorithm

تعتبر هذه الطريقة التمهيد لطريقة الأصلية-المقابلة Primal-Dual، حيث نبدأ هذه الخوارزمية بالمرحلة البدائية الآتية:

أولا: من مصفوفة معاملات التكلفة c_{ij} نضع $u_i = \min_j \{c_{ij}\}$ لكل صف i.

ثانيا: ثم نضع $v_j = \min_i (c_{ij} - u_i)$ لكل عمود j وبهذا نكون قد ضمنا بأن $c_{ij} = u_i + v_j$ ستكون محققه على الأقل مرة واحدة لكل صف ولكل عمود.

ثالثا: نحصل على المصفوفة المختزلة $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - v_j - u_i$ ثم ننتقل إلى الخطوات الرئيسية التالية:

- ارسم اقل عدد ممكن من الخطوط خلال صفوف وأعمدة المصفوفة المختزلة لتغطي جميع أصفارها. إذا كان عدد الخطوط مساويا n فإن الحل أمثلي، وإلا أنتقل إلى الخطوة الثانية.
- اختر اقل قيمة غير مغطاة. اطرح هذه القيمة من كل عنصر من العناصر غير المغطاة. وأضف هذا العنصر إلى كل عنصر مغطى بخطين (خط من العمود وخط من الصف) ثم عد إلى الخطوة السابقة.

مثال ٦-٣-٥

اعتبر مصفوفة التكلفة التالية:

					Row min
2	3	5	1	4	1
−1	1	3	6	2	−1
−2	4	3	5	0	−2
1	3	4	1	4	1
7	1	2	1	2	1

المصفوفة الناتجة بعد طرح القيمة الصغرى من كل صف هي:

	1	2	4	0	3
	0	2	4	7	3
	0	6	5	7	2
	0	2	3	0	3
	6	0	1	0	1
Column min	0	0	1	0	1

بالتالي فإن المصفوفة المختزلة هي:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

أي أن عدد الخطوط هي ثلاثة والتي لا تساوي $n = 5$. الآن اقل قيمة غير مغطاة هي 1. نطرحها من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها إلى جميع العناصر المغطاة بخطين فنحصل على

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

عدد الخطوط هو أربعة، وهذا أيضا لا يساوي خمسة. نكرر: اقل قيمة غير مغطاة هي 1. نطرحها من جميع القيم غير المغطاة ونضيفها إلى جميع العناصر المغطاة بخطين من هذا نحصل على

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

عدد الخطوط هو خمسة، لذا فإن الحل الأمثل هو

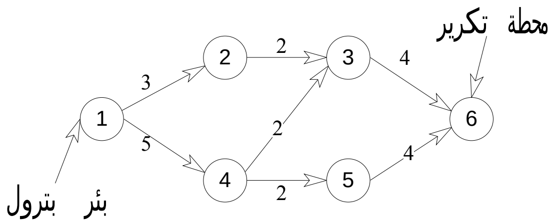
$$x_{12} = x_{21} = x_{35} = x_{44} = x_{53} = 1$$

وجميع المتغيرات الأخرى هي أصفارا.

٦-٤ تحليل الشبكات Network Analysis

٦-٤-١ مقدمة Introduction

يمثل الرأس (1) في الشكل أدناه بئر بترول، بينما يمثل الرأس (6) محطة تكرير. الرؤوس المتبقية تمثل محطات لتقوية ضخ البترول. كذلك تمثل الأضلاع الواصلة بين الرؤوس المختلفة أنابيب يمكن استخدامها لنقل البترول من البئر إلى محطة التكرير، بينما تدل الأعداد المعطاة على الأضلاع على السعه القصوى لكل أنبوب.



الشكل ٦-٤-١

السؤال الآن، ما هي أكبر كمية من البترول الخام يمكن نقلها عبر شبكة الأنابيب هذه؟
قبل البدء في دراسة مثل هذا السؤال نقدم فيما يلي بعض التعاريف والمبادئ الأولية.

تعريف ٦-٤-١ الشبكة Network

بافتراض أن $N=(V,E)$ هو راسم موجّه متصل بسيط، حيث V مجموعة رؤوس الراسم Vertices و E مجموعة اضلاعه Edges. فأننا نقول بأن N هي شبكه نقل أو للسهولة نقول بأن N هي شبكه Network إذا تحققت الشروط الآتية:

- يوجد عنصر واحد فقط من عناصر المجموعة V ذو درجه داخله Indegree مساويه للصفر. نسمي هذا الرأس بالمنبع Source وعادة سيعطى الرقم (1).
- يوجد عنصر واحد فقط من عناصر المجموعة V ذو درجه خارجه Out degree مساويه للصفر. نسمي هذا الرأس المصب Sink وعادة سيعطى الرقم (n) حيث n عدد عناصر المجموعة V.
- توجد داله من المجموعة E إلى مجموعه الأعداد الحقيقية غير السالبة تحدد لكل ضلع (i,j) عدداً حقيقياً غير سالب c_{ij} يسمى بسعة Capacity ذلك الضلع.

مثال ٦-٤-٢

الشكل ٦-٤-١ يمثل شبكة منبعها الرأس (1) ومصبها الرأس (6) ودالتها
$C: E \to \Re^{+}$
والمعرف بالجدول التالي:

(i,j)	(1,2)	(2,3)	(3,6)	(1,4)	(4,3)	(4,5)	(5,6)
c_{ij}	3	2	4	5	2	2	4

تعريف ٦-٤-٣ التدفق Flow

إذا كانت $N=(V,E)$ شبكه، وكانت x داله تعين لكل عنصر $(i,j)\in E$ عددا حقيقيا غير سالب x_{ij} ، فإن هذه الدالة تسمى تدفقا إذا حققت الشروط الآتية:

- لكل $(i,j)\in E$ فإن:

$$x_{ij} \le c_{ij}$$

- لكل رأس غير المنبع والمصب فإن:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_{ji} \qquad j = 2,3,\ldots,n-1$$

وذلك بعد تعريف

$$x_{ij} = 0 \qquad \forall (i,j) \notin E$$

ملاحظات:

- تسمى x_{ij} بالتدفق عبر الضلع (i,j).
- لأي رأس $j \in V$ فإن $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ يسمى بالتدفق الداخل للرأس j ، بينما يسمى $\sum_{i=1}^{n} x_{ji}$ بالتدفق الخارج.

باستخدام هذه المسميات فإن الشرط الثاني في التعريف ٦-٤-٣ أعلاه يعني أن التدفق الداخل لأي رأس يكون مساويا للتدفق الخارج من ذلك الرأس. إن هذه الخاصة تعرف بقانون حفظ الطاقة.

مثال ٦-٤-٤

الدالة x المعرفة بالجدول الآتي تعرف تدفقا للشبكة الموضحة في الشكل ٦-٤-١ السابق:

(i,j)	(1,2)	(2,3)	(1,4)	(4,3)	(4,5)	(3,6)	(5,6)
x_{ij}	2	2	3	1	2	3	2

فعلى سبيل المثال التدفق الداخل للرأس 4 يساوي $x_{14}=3$ وهذا يساوي التدفق الخارج من الرأس 4 والذي هو

$$x_{43}+x_{45}=1+2=3$$

الآن التدفق الخارج من المنبع يساوي

$$x_{12}+x_{14}=2+3=5$$

أما التدفق الداخل إلى المصب فهو

$$x_{36}+x_{56}=3+2=5$$

من هنا نلاحظ أن التدفق الخارج من المنبع يساوي التدفق الداخل إلى المصب. إن هذه الملاحظة لا تقتصر على هذا المثال بل هي عامه كما سنبرهن ذلك في النظرية التالية:

نظرية ٦-٤-٥

إذا كانت x داله تعرف تدفقاً عبر الشبكة $N=(V,E)$ فإن قيمة التدفق الخارج من المنبع يساوي قيمة التدفق الداخل إلى المصب، أي أن

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}=\sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

البرهان

بما أن

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}=\sum_{j\in V}(\sum_{i\in V} x_{ij})$$

وكذلك

$$\sum_{(i,j)\in E} x_{ij}=\sum_{j\in V}(\sum_{i\in V} x_{ji})$$

لذا فإن

$$\sum_{j\in V}(\sum_{i\in V}x_{ij})=\sum_{j\in V}(\sum_{i\in V}x_{ji})$$
$$\Rightarrow \sum_{j\in V}(\sum_{i\in V}x_{ij}-\sum_{i\in V}x_{ji})=0$$
$$\Rightarrow (\sum_{i\in V}x_{in}-\sum_{i\in V}x_{ni})+(\sum_{i\in V}x_{i1}-\sum_{i\in V}x_{1i})$$
$$+\sum_{j\in V-\{1,n\}}(\sum_{i\in V}x_{ij}-\sum_{i\in V}x_{ji})=0$$

حيث أنه لا يوجد تدفق داخل إلى المنبع فإن $\sum_{i\in V}x_{i1}=0$ ، كذلك $\sum_{i\in V}x_{ni}=0$ وذلك لعدم وجود تدفق خارج من المصب كذلك فإن

$$\sum_{i\in V}x_{ij}-\sum_{i\in V}x_{ji}=0$$

لكل $j\in V-\{1,n\}$ وذلك باستخدام قانون حفظ الطاقة. بتعويض هذه القيم في العلاقة السابقة نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{n}x_{1i}=\sum_{i=1}^{n}x_{in}$$

أي أن مجموع قيم التدفق الخارج من المنبع تساوي مجموع قيم التدفق الداخل إلى المصب.

□

تعريف ٦-٤-٦

إذا كانت x دالة تعرف تدفقاً في الشبكة $N=(V,E)$ فإن القيمة

$$z=\sum_{i=1}^{n}x_{1i}=\sum_{i=1}^{n}x_{in}$$

تسمى بقيمة التدفق x.

٦-٤-٢ الصيغة الرياضية لمسألة التدفق الأعظم

Mathematical Model for Maximal Flow Problem

إن مسألة التدفق الأعظم يمكن صياغتها بالشكل الرياضي الآتي:

$$\max \quad z = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} = \sum_{i=1}^{n} x_{in}$$

s. t.

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} - \sum_{i=1}^{n} x_{kj} = 0 \qquad k = 2,3,\ldots,n-1$$

$$0 \le x_{ij} \le c_{ij} \qquad i, j = 1,2,\ldots,n.$$

وهذه مسألة من مسائل البرمجة الخطية والتي يمكن حلها باستخدام إحدى الطرائق العامة المعروفة كطريقة السمبلكس مثلا. إلا انه نظراً للتكوين الخاص لهذه المسألة ونظراً لأهميتها العملية فهناك طرائق خاصة بها ذات كفاية أعلى من كفاية الخوارزميات العامة. لهذا فإننا سندرس خوارزمية خاصة بهذه المسألة تأخذ في الأعتبار الشكل الخاص بها.

٦-٤-٣ خوارزمية حساب التدفق الأعظمي

Maximal flow algorithm

الخوارزمية التي سنتعرض لشرحها هنا ذات طبيعة تكرارية بمعنى أننا نبدأ بتدفق ما (عادة نبدأ بالتدفق الصفري ، أي نضع $x_{ij} = 0 \quad i, j = 1,\ldots,n$) ثم نحاول زيادة التدفق إلى أن نصل إلى مرحله لا نستطيع بعدها زيادة قيمة التدفق الأعظمي.

إن المرحلة الرئيسية في هذه الخوارزمية هي مرحله زيادة قيمة التدفق والتي تتطلب إيجاد مسار من المنبع إلى المصب. إن المسار ومفهومه يلعب دورا رئيسيا هنا لذا فإننا نقدم فيما يلي بعض المفاهيم والمصطلحات الهامة.

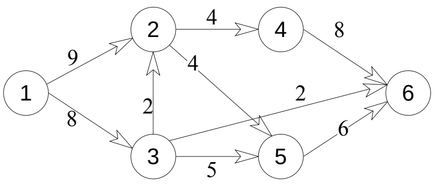
٦-٤-٤ عدم وحدانية التدفق الأعظم **Maximal Flow Uniqueness**

نظرية ٦-٤-٧

قيمة التدفق الأعظمي ليس وحيدا.

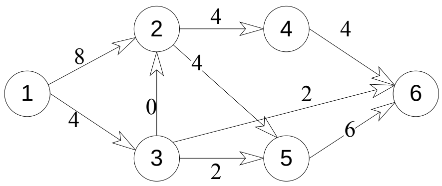
مثال ٦-٤-٨

باعتبار الشبكة الموضحة بالشكل ٦-٤-٢:



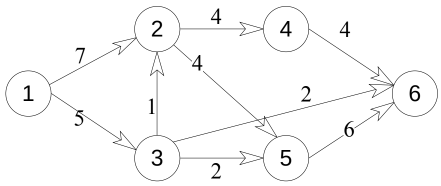
الشكل ٦-٤-٢

حيث الأعداد الموضوعة على الأضلاع تدل على سعة كل ضلع. لهذه الشبكة سنوضح فيما بعد أن قيمة التدفق الأعظمي هي 12 والتي يمكن الحصول عليها بالتدفق x_{ij} الموضح بالشكل ٦-٤-٣:



الشكل ٦-٤-٣

أو بالتدفق y_{ij} الموضح بالشكل ٦-٤-٤:



الشكل ٦-٤-٤

المثال أعلاه يوضح النظرية السابقة.

٦-٤-٥ المسارات وأنواعها في الشبكات Paths in Networks

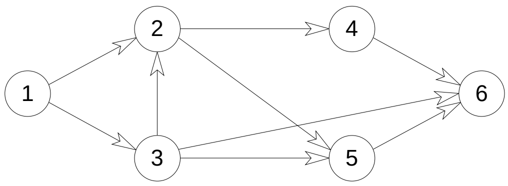
باعتبار الشبكة $N=(V,E)$ ، عند حذف الاتجاهات الموجودة على أضلاع الشبكة نحصل على راسم غير موجه. المسارات التي سنتعرض لدراستها هنا هي مسارات على الراسم غير الموجه المرتبط بالشبكة $N=(V,E)$ بافتراض أن $P=(1,2,K\,,n)$ عبارة عن مسار من المنبع إلى المصب، فأننا نميز بين النوعين الآتيين من أضلاع ذلك المسار.

تعريف ٦-٤-٩

إذا كان (i,j) هو أحد أضلاع المسار P وكان اتجاه هذا الضلع من i إلى j فإننا نقول بأن الضلع (i,j) هو ضلع أمامي Forward أما إذا كان اتجاه هذا الضلع من j إلى i فأننا نسميه ضلع عكسي Reverse or Backward.

مثال ٦-٤-١٠

في الشكل ٦-٤-٥:



الشكل ٦-٤-٥

المسار $P=1(1,2)2(2,4)4(4,6)6$ جميع أضلاعه أمامية بينما في المسار $P=1(1,2)2(2,3)3(3,5)5(5,6)6$ فأن الضلع $(2,3)$ عكسي وباقي أضلاعه أمامية.

نظرية ٦-٤-١١

إذا كان P مسارا من منبع إلى مصب الشبكة $N=(V,E)$ وكانت الشروط الآتية محققه:

- لكل ضلع أمامي في المسار P

$$c_{ij} > x_{ij}$$

- لكل ضلع عكسي في المسار P
$x_{ij} > 0$

وبوضع

$$\omega = \min \begin{cases} \min|c_{ij} - x_{ij}| & \text{if } (i, j) \text{ ضلع أمامي} \\ \min|x_{ij}| & \text{if } (i, j) \text{ ضلع خلفي} \end{cases} \qquad (6.3.5)$$

وبتعريف

$$\mathrm{x}_{\mathrm{ij}}^{*} = \begin{cases} \mathrm{x}_{\mathrm{ij}} & (i, j) \notin \Sigma \\ \mathrm{x}_{\mathrm{ij}} + \omega & (i, j) \in \Phi \\ \mathrm{x}_{\mathrm{ij}} - \omega & (i, j) \in \Pi \end{cases}$$

حيث

$\Sigma =$ {أضلاع المسار P}
$\Phi =$ {أضلاع المسار P الأمامية}

و

$\Pi =$ {أضلاع المسار P العكسية}

فإن x^* يعرف تدفقا ذا قيمه تزيد عن قيمة التدفق x بالمقدار ω.