$$7/2 \geq \Delta\, c_2 > -\infty$$

وأخيرا بالنسبة لـ c_7 نجد أن التغير المسموح به هو:

$$7/39 \geq \Delta\, c_7 \geq -1/4$$

ملاحظة:

إن النظرية السابقة تنطبق في حالة اجراء تغيير على آحد معاملات دالة الهدف ولكنها لاتنطبق اذا كان التغيير يشمل عدة متغيرات.

٥-٣-٢ تغير في الطرف الأيمن للشروط Changes in the Right-Hand Side

إذا أجرينا تغييرا في أحد عناصر الطرف الأيمن للشروط بأن نستبدل b_k مثلا ونجعله $b_k + \Delta b_k$ فإن الطرف الأيمن يكتب على النحو التالي:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta b_k\, \mathbf{e}_k$$

حيث $\mathbf{e}_k$ متجه الوحدة الذي يحتوي على 1 في الإحداثي k.

إن مجموعة المتغيرات الأساسية المقابلة للحل الأمثل تصبح بعد إجراء هذا التغيير كما يلي:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}} &= \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{b}} \\ &= \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{b} + \Delta b_k\, \mathbf{e}_k) \\ &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_k\, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k \end{aligned}$$

من هذه الصيغة يتضح أن مجموعة المتغيرات الأساسية لا تتغير طالما أن عناصر المتجه الأتي:

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k$$

تبقى غير سالبة.

يجدر بنا أن ننوه هنا عن العلاقة بين الحساسية والثنائية، فالتغير في الدالة الهدف الناشئ عن التغير في $\mathbf{b}_k$ يمكن التعبير عنه على النحو التالي:

$$\begin{aligned}\Delta z &= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\Delta\mathbf{x}_{\mathbf{B}}\\ &= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}(\Delta b_k \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_k)\\ &= \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\Delta b_k \mathbf{e}_k\\ &= w^T \Delta b_k \mathbf{e}_k\end{aligned}$$

اذن مقدار التغير في دالة الهدف نتيجة للتغير Δb_k يساوي $w^T \Delta b_k \mathbf{e}_k$ حيث أن w هو الحل الأمثل للثنائية.

مثال ٥-٣-٣

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}z = -1/2\, x_1 - 3/4\, x_2 - x_3 \min&\\ \text{s. t.}&\\ 3x_1 + 4\, x_2 + 6x_3 &\le 2000\\ 5x_1 + 6\, x_2 + 5x_3 &\le 2880\\ 8x_1 + 6\, x_2 + 5x_3 &\le 4000\\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0\end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج هو:

x_3	$-1/8$	0	1	$3/8$	$-1/4$	0	30
x_2	$15/16$	1	0	$-5/16$	$3/8$	0	455
x_6	3	0	0	0	-1	1	1120
	$5/64$	0	0	$9/64$	$1/32$	0	$1485/4$

إذا كانت $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية المقابلة للبرنامج الخطي السابق فإن:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/8 & -1/4 & 0\\ -5/16 & 3/8 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 455 \\ 1120 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

لإيجاد التغير المسموح به بالنسبة لـ b_1 نحسب

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \Delta b_1 \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 30 \\ 455 \\ 1120 \end{bmatrix} + \Delta b_1 \begin{bmatrix} 3/8 \\ -5/16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ولكي يبقى $\mathbf{x_B}$ حلا مسموحا به، نجعل مركبات هذا المتجه غير سالبة وبالتالي نجد أن:

$$\begin{aligned} 30 + \Delta b_1 (3/8) &\geq 0, \\ 455 + \Delta b_1 (-5/16) &\geq 0, \\ 1120 + \Delta b_1 (0) &\geq 0 \end{aligned}$$

وهذا يكافئ

$$\Delta b_1 \geq -80, \qquad \Delta b_1 \leq 1456$$

إذن

$$-80 \leq \Delta b_1 \leq 1456$$

وبشكل مشابه نجد أن:

$$-3640/3 \leq \Delta b_2 \leq 120$$

وكذلك

$$-1120 \leq \Delta b_3 < \infty$$

ملاحظة:

إذا كانت المسألة تتطلب استخدام طريقة المرحلتين فإن $\mathbf{B}^{-1}$ حينئذ تكون هي المصفوفة المقابلة للمتغيرات الأساسية في الجدول الأول الموسع (بعد إضافة المتغيرات الاصطناعية).

مثال ٥-٣-٤

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\min \quad -80\,x_1 - 60\,x_2 - 42x_3$$
$$\text{s. t.}$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 12 \\
5x_1 + 6x_2 + 3x_3 &\ge 15 \\
2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 8 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

إن الجدول الأول الموسع هو:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_4 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
y_1 & 5 & 6 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 15 \\
y_2 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\
 & -7 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 & 0 & -23
\end{array}
$$

أما الجدول النهائي للمرحلة الثانية فهو:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x_2 & 0 & 1 & 0 & 1/6 & 0 & 0 & -1/6 & 2/3 \\
x_3 & 2 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 10 \\
x_5 & 1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1 & 1/2 & 19 \\
 & 4 & 0 & 0 & 31 & 0 & 0 & 11 & 460
\end{array}
$$

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_4, y_1, y_2 (انظر الجدول الأول) وهي كما يلي:

$$
\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 5/2 & -1 & 1/2 \end{bmatrix}
$$

فإذا أجرينا تغييرا في إحدى قيم b_1, b_2, b_3 فإن التغير المسموح به بالنسبة لكل من هذه القيم يكون:

$$\max\left\{\frac{-2/3}{1/6},\frac{-10}{1/2},\frac{-19}{5/2}\right\} \le \Delta b_1 < \infty$$

$$-\infty < \Delta b_2 \le \min\left\{\frac{-19}{-1}\right\}$$

$$\max\left\{\frac{-10}{1/2},\frac{-19}{1/2}\right\} \le \Delta b_3 \le \min\left\{\frac{-2/3}{-1/6}\right\}$$

وهذا يكافئ

$$\begin{gathered} -4 \le \Delta b_1 < \infty \\ -\infty < \Delta b_2 \le 19 \\ -20 \le \Delta b_3 \le 4 \end{gathered}$$

٥-٣-٣ إضافة متغير جديد **Addition of a New Variable**

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ \text{s. t.} \quad & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ & x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

ولنفترض أننا نود إضافة متغير جديد (كأن يكون منتج جديد نود تصنيعه). إن البرنامج الخطي الموسع سيأخذ حينئذ الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n + c_{n+1}x_{n+1} \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + a_{1,n+1}x_{n+1} &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + a_{2,n+1}x_{n+1} &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + a_{m,n+1}x_{n+1} &= b_m \\
x_i \ge 0 \qquad\qquad i &= 1,\cdots,n+1
\end{aligned}$$

ما هو تأثير هذا المتغير الجديد على الجدول النهائي للبرنامج الأصلي؟ إذا كانت $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية المقابلة لهذا الجدول وكانت $\mathbf{c_B}$ عناصر متجه التكلفة المقابل فإن عنصر التكلفة الجديد في الجدول النهائي يعطى بالصيغة الآتية:

$$c_{n+1}^{*} = c_{n+1} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_{n+1}$$

فإذا كانت هذه القيم غير سالبة فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي يبقى أمثليا (ويكون $x_{n+1} = 0$). أما إذا كانت هذه القيم سالبة عندئذ لابد من الاستمرار في عمليات طريقة السمبلكس.

مثال ٥ـ٣ـ٥

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4 \\
& 3x_1 - 2x_2 + x_3 \le 6 \\
& x_1 + x_3 \le 9 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج الخطي هو:

x_3	0	$-1/5$	1	3/5	$-1/5$	0	6/5
x_1	1	$-3/5$	0	$-1/5$	2/5	0	8/5
x_6	0	4/5	0	$-2/5$	$-1/5$	1	31/5
	0	2/5	0	9/5	2/5	0	48/5

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_3, x_1, x_6 وهي كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix}$$

وأن

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$\mathbf{x}_{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} 6/5 & 8/5 & 31/5 \end{bmatrix}$$

لنفترض الآن أننا أدخلنا متغيرا جديدا هو x_7 مزودا بالمعطيات الآتية:

$$\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad c_7 = 3$$

بحساب الآن قيمة c_7^* نجد:

$$c_7^* = c_7 - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_7 = 3 - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2$$

بما أن $c_7^* \geq 0$ لذا فإن الجدول النهائي يبقى أمثليا ولا تأثير على الحل الأمثل بإدخال المتغير الجديد.

مثال ٥-٣-٦

نعيد دراسة المثال السابق ولكن بالمعطيات الآتية:

$$\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_7 = -4$$

بحساب الآن قيمة c_7^* نجد:

$$c_7^* = c_7 - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_7 = -4 - \begin{bmatrix} -4 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ -2/5 & -1/5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{4}{5}$$

بما أن $c_7^* < 0$ لذا فإن الجدول الموسع ليس أمثليا ويتطلب الأمر متابعة خطوات السمبلكس على الجدول الموسع. للتوصل للجدول الموسع نحسب

$$\mathbf{a}_7^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_7 = \begin{bmatrix} 7/5 \\ -4/5 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

ولذا يكون الجدول الموسع كما يلي:

x_3	0	−1/5	1	3/5	−1/5	0	7/5	6/5
x_1	1	−3/5	0	−1/5	2/5	0	−4/5	8/5
x_6	0	4/5	0	−2/5	−1/5	1	7/5	31/5
	0	2/5	0	9/5	2/5	0	−4/5	48/5

بمتابعة خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_7	0	−1/7	5/7	3/7	−1/7	0	1	6/7
x_1	1	−5/7	4/7	1/7	2/7	0	0	16/7
x_6	0	1	−1	−1	0	1	0	5
	0	2/7	4/7	15/7	2/7	0	0	72/7

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_7 = 6/7,\ x_1 = 16/7,\ x_6 = 5$$

وقيمة دالة الهدف هي:

$$-3\,x_1 + 3\,x_2 + 4x_3 - 4x_7 = -72/7$$

x_3	0	−1/5	1	3/5	−1/5	0	7/5	6/5
x_1	1	−3/5	0	−1/5	2/5	0	−4/5	8/5
x_6	0	4/5	0	−2/5	−1/5	1	7/5	31/5
	0	2/5	0	9/5	2/5	0	−4/5	48/5

بمتابعة خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_7	0	−1/7	5/7	3/7	−1/7	0	1	6/7
x_1	1	−5/7	4/7	1/7	2/7	0	0	16/7
x_6	0	1	−1	−1	0	1	0	5
	0	2/7	4/7	15/7	2/7	0	0	72/7

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_7 = 6/7,\ \ x_1 = 16/7,\ \ x_6 = 5$$

وقيمة دالة الهدف هي:

$$-3\,x_1 + 3\,x_2 + 4x_3 - 4x_7 = -72/7$$

٥-٣-٤ تغير في مصفوفة المعاملات Changes in the Coefficient Matrix

درسنا كيفية حل البرنامج الخطي في حالة التغير في معاملات دالة الهدف، الطرف الأيمن أو في حالة إضافة متغير جديد. وفي هذا الفصل سندرس حل البرنامج الخطي في حالة تغير مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$. إن التغير في مصفوفة المعاملات يعتبر نسبياً بسيط إذا كان المعامل المراد تغييره a_{ij} مقابل لمتغير غير أساسي. أما إذا كان a_{ij} مقابل لمتغير أساسي فإن المسألة أكثر صعوبة وفي هذه الحالة سنعيد فرز المصفوفة $\mathbf{A}$ ونعيد حل المسألة من جديد.

لتكن

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}) = (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0}) \geq \mathbf{0}$$

هو حل اساسي مسموح به أمثلي للبرنامج الخطي في الحالة القياسية، إن التغير في المصفوفة $\mathbf{A}$ ينقسم إلى حالتين:

الحالة الأولى: المصفوفة $\mathbf{N}$ تتغير إلى $\mathbf{N}'$ وبالتالي فإن التغير في العمود $\mathbf{a}_k$ المقابل للمتغير غير الأساسي x_k سيؤثر على المتجه $\mathbf{y}_k = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_k$ وبالتالي بشكل غير مباشر على r_k. ليكن $\mathbf{a}_k$ المتجه القديم المراد إستبداله بالمتجه الجديد $\hat{\mathbf{a}}_k$ حيث $\hat{\mathbf{y}}_k = \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k$ تمثل المتجه الجديد في مصفوفة المعاملات $\mathbf{A}$ بعد تعديله بواسطة معكوس المصفوفة الأساسية $\mathbf{B}^{-1}$ وبالتالي فإن

$$\hat{r}_k = \mathbf{c_B}\hat{\mathbf{y}}_k - c_k = \mathbf{c_B}\mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_k - c_k$$

فإذا كانت $\hat{r}_k$ سالبة يجب مواصلة عملية السمبلكس مع إضافة متغيرالعمود ومعامل التكلفة النسبية الجديد لحل البرنامج الخطي الجديد التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_B} + \mathbf{c_{N'}}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_{N'}} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{B}\mathbf{x_B} + \mathbf{N}'\mathbf{x_{N'}} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x_B}, \mathbf{x_{N'}} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

مثال ٥-٣-٧

ليكن لدينا البرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -10\,x_1 - 7\,x_2 - 6x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3x_1 + 2\,x_2 + x_3 \leq 36 \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 32 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 22 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج الخطي هو:

x_2	1	1	0	1	0	−1	14
x_5	−2	0	0	1	1	−3	2
x_3	1	0	1	−1	0	2	8
	3	0	0	1	0	5	146

إن المصفوفة $\mathbf{B}^{-1}$ تقابل المتغيرات الأساسية x_2, x_5, x_3 وهي كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

لنفترض أنه حدث خطاء في نقل المعلومات وأن a_{31} هو 1 بدلاً من 2.
وهذا يعني أن

$$\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\hat{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{B}^{-1}\hat{\mathbf{a}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وأن

$$\hat{z}_1 - c_1 = \mathbf{c_B}\hat{\mathbf{y}}_1 - c_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 10 = -2$$

بما أن $\hat{z}_1 - c_1 < 0$ لذا فإن الجدول السابق ليس أمثليا ويتطلب الأمر متابعة خطوات السمبلكس على الجدول السابق بعد تغيير $\mathbf{y}_1$ بـ $\hat{\mathbf{y}}_1$ ولذا يكون الجدول الجديد كما يلي:

x_2	2	1	0	1	0	−1	14
x_5	1	0	0	1	1	−3	2
x_3	−1	0	1	−1	0	2	8
	−2	0	0	1	0	5	146

بمتابعة خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_2	0	1	0	-1	-2	5	10
x_1	1	0	0	1	1	-3	2
x_3	0	0	1	0	1	-1	8
	0	0	0	3	2	-1	150

نتابع خطوات السمبلكس على هذا الجدول نحصل على الجدول التالي:

x_6	0	1/5	0	$-1/5$	$-2/5$	1	2
x_1	1	3/5	0	2/5	$-1/5$	0	8
x_3	0	1/5	1	$-1/5$	3/5	0	12
	0	1/5	0	14/5	8/5	0	152

وبالتالي نحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$x_6 = 2,\ \ x_1 = 8,\ \ x_3 = 12$$

وقيمة دالة الهدف هي:

$$-10\,x_1 - 6\,x_3 + 0x_6 = -152$$

الحالة الثانية: المصفوفة الأساسية $\mathbf{B}$ تتغير إلى $\mathbf{B}'$. وفي هذه الحالة فإن الحل الأمثل x^*قد يكون غير أساسي للبرنامج الخطي الجديد وكذلك فإن $\mathbf{B}'$ قد تكون مصفوفة ليس لها معكوس وبالتالي فإن حلاً مباشراً من الحل السابق قد لايكون من السهل الحصول عليه ويفضل حل المسألة من جديد.

تمارين الباب الخامس

٥-١ برهن نظرية متممة المكملة الضعيفة.

٥-٢ اكتب البرنامج المقابل لكل ممايلي:

أ)

$$\begin{aligned}
\max \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0 \\
& 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3 \\
& -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\
& x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

ب)

$$\min \quad x_1 - x_2$$
s. t.
$$2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \le 0$$
$$3x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 \ge 3$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1$$
$$x_2, x_3 \ge 0$$

ج)

$$z \max$$
s. t.
$$z - \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \le 0$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$
$$x \ge 0 \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

د)

$$\max \quad 2x_1 - 3x_2$$
s. t.
$$x_1 + x_2 \ge 3$$
$$3x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

إستخدم نظرية الثنائية لتأكد فيما إذا كان $x_1 = 3/2, \quad x_2 = 3/2$ هو الحل لأمثل لهذا البرنامج.

٣-٥ أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية وكذلك أوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل له:

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$

$$
\begin{aligned}
&\text{s. t.}\\
&2x_1 + 3x_2 \le 3\\
&x_1 + 5x_2 \le 1\\
&2x_1 + x_2 \le 4\\
&4x_1 + x_2 \le 5\\
&x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

٥-٤ أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية وكذلك أوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل له:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3\\
\text{s. t.}\quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 4\\
& 2x_1 + 3x_3 \le 5\\
& 2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 7\\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

٥-٥ بالإستعانة بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
& 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \max\\
\text{s. t.}\quad & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5\\
& x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3\\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

٥-٦ بالإستعانة بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4\\
\text{s. t.}
\end{aligned}
$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \le 5$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \le 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

٥-٧ اعطيت البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \le 1 \\ & x_1 - x_2 - 2x_3 \le 1 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

الجدول النهائي لهذا البرنامج

x_4	1	−1	1.5	0.5	0	0.5
x_1	0	0	−3.5	−0.5	1	0.5
	0	0	9.5	1.5	0	1.5

لنفرض أننا أضفنا متغير إضافي x_5 مع معامل التكلفة $c_5 = -1$ ومعملات القيود $\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1. \\ 2 \end{bmatrix}$ أوجد الحل الأمثل للبرنامج الجديد مستخدما الحل في الجدول النهائي.

٥-٨ أكتب البرنامج المقابل للبرنامج التالي وأوجدحله بستخدام نظرية متممة المكملة الضعيفة.

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\le 10 \\
x_1 + x_2 &\le 8 \\
3x_1 + 5x_2 &\le 26 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

٥-٩ لدينا البرنامج الخطي الآتي

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 5x_1 - 3x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 4 \\
& x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5 \\
& 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج ثم إكتب البرنامج المقابل ثم حله.

٥-١٠ أكتب البرنامج المقابل للبرنامج التالي:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = -4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& -2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \le -5 \\
& -x_1 + x_2 + 3x_3 \le -3 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

ثم حله هندسيا ثم حل المسألة الأصلية باستخدام نظرية متمّمة المكملة الضعيفة.

٥-١١ حل بطريقة السمبلكس البرنامج التالي مستخدما قاعدة بلاند Bland's rule:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 15 \\
& 2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

لنفرض أننا أضفنا متغير إضافي x_6 مع معامل التكلفة $c_6 = -1$ ومعملات القيود $\mathbf{a}_6 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 2 \end{bmatrix}$ أوجد الحل الأمثل للبرنامج الجديد مستخدما الحل الذي حصلت عليه من البرنامج الأصلي.

٥-١٢ أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي ثم أوجد إعتماً على ذلك الحل الأمثل للبرنامج المقابل:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_3 \geq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

٥-١٣ حل البرنامج التالي بطريقة السمبلكس :

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

ثم أوجد مقدار التغير على قيم $i = 1,2,3,4,5 \quad c_i$ بحيث يبقى الحل الأمثل كما هو.

٥-١٤ كيف يتأثر الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي عندما يتغير c_1 من 1 إلى 2

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned}$$

$$\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

حيث

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 32 \\ 33 \\ 35 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{c} = [-1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

٥-١٥ فيما يلي الجدول الابتدائي والنهائي لحل برنامج خطي بطريقة السمبلكس:

x_8	4	0	8	-8/3	4/3	-8/3	0	1	20/3
x_2	-6	1	-11	10/3	-4/3	23/3	0	0	16/3
x_7	7/3	0	38/3	-41/9	16/9	-5/9	1	0	134/9
	-46	0	-64	41	-16	47	0	0	-5

x_5	3	0	6	-2	1	-2	0	3/4	5
x_2	-2	1	-3	2/3	0	5	0	1	12
x_7	-3	0	2	-1	0	3	1	-4/3	6
	2	0	32	9	0	15	0	12	75

أ- أوجد مدى التغير لمعاملات التكلفة النسبية دون التغير في قيمة الحل الأمثل.

ب- برهن أنه إذا كان x_s متغير غير أساسي فإن الحل الأمثل لن يتغير لدى تغير c_s إذا تحقق الشرط $\Delta c_s \geq -c_s^* = -r_s$.

٥-١٦ ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{array}{ll} \text{min} & -2x_1 + x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} & \end{array}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

أ- ماهو المجال المسموح به للتغير Δb_1 دون أن تتبدل المتغيرات الأساسية الأمثلية للبرنامج المذكور.
ب- ماهو المجال المسموح به للتغير Δc_1 دون أن يتأثر الحل الأمثل للبرنامج المذكور.
ج- ماهو المجال المسموح به للتغير Δc_2 دون أن يتأثر الحل الأمثل للبرنامج المذكور.
د- لنفرض أننا أدخلنا في البرنامج السابق متغيراً جديداً $x_6 \ge 0$ مزوداً بالمعطيات التالية $c_6 = 1$، $a_6 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ماهو تأثير ذلك على الجدول النهائي للبرنامج المذكور.

٥-١٧ ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\max \quad 2x_1 + x_2 - x_3$$
s. t.
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 \le 3$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

أ- باستخدام موضوع الحساسية جد الحل الأمثل الجديد عندما يتغير معامل x_2 في دالة الهدف من 1 إلى 5.
ب- إذا كان لك أن تختار بين أن تجري زيادة في b_1 أو في b_2 فأيهما تختار؟ ماتأثير ذلك على القيمة الأمثلية لدالة الهدف؟

٥-١٨ الجدول التالي هو الجدول النهائي للبرنامج التالي:

$$\max \quad 2x_1 + x_2 - x_3$$
s. t.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

x_1	1	2	2	1	0	8
x_5	0	3	3	1	1	12
	0	3	3	2	0	16

أ- هل يتغير الحل الأمثل عند اضافة المتغير الجديد x_6 المزود بالمعطيات التالية $c_6 = 5$ ، $a_6 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

ب- ماهو المجال المسموح به للتغير Δb_1 دون أن تتبدل المتغيرات الأساسية الأمثلية للبرنامج المذكور.