الباب الخامس

الثنائية والحساسية

Duality and Sensitivity

٥-١ مقدمه حول الثنائية
٥-٢ النظرية الأساسية في الثنائية
٥-٣ تحليل الحساسية
٥-٣-١ تغير في معاملات دالة الهدف
٥-٣-٢ تغير في الطرف الأيمن للشروط
٥-٣-٣ إضافة متغير جديد.
٥-٣-٤ تغير في مصفوفة المعاملات

٥-١ مقدمه حول الثنائية Introduction to duality

الغرض من هذا الفصل هو توليد برنامج خطي جديد من برنامج خطي سابق بحيث تتصف هذه العملية بأنها متعاكسة بمعنى أن ثنائية الثنائية هي البرنامج الأصلي. ومن ثم فإننا سوف نتطرق إلى العلاقة الوثيقة التي تربط بين هذين البرنامجين، هناك عدة طرائق لتعريف الثنائية من البرنامج الأصلي، إن ذلك يعتمد على طريقة تعريف القيود، وعلى إشارة المتغيرات. سوف نستعرض الأشكال الثلاثة التالية:

١. الثنائية في حالة المتباينات:

المسألة الأصلية:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

المسألة المقابلة:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ \text{s. t.} & \\ & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \\ & \mathbf{w} \geq \mathbf{0} \end{array}$$

٢. الثنائية في حالة المعادلات:

المسألة الأصلية:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} & \end{array}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

المسألة المقابلة:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{b} \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{w}^T\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^T \end{aligned} \tag{5.1}$$

$\mathbf{w}$ بدون قيود.

٣. الثنائية في الحالة المختلطة:

المسألة الأصلية:

$$\min \quad \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{5.2}$$

s. t.

$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \qquad i \in I$$
$$\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \qquad i \in E$$
$$x_j \geq \mathbf{0}$$

حيث $N = \{1,2,\ldots,n\}$، $M = \{1,2,\ldots,m\}$ و $M = I \cup E$، إن المسألة المقابلة للمسألة الأصلية هي على النحو التالي:

$$\max \quad \sum_{i \in M} b_i w_i \tag{5.3}$$

s. t.

$$\mathbf{a}_j^T\mathbf{w} \leq c_j \qquad j \in N$$
$$w_i \geq 0 \qquad i \in I$$

$w_i \quad i \in E$ بدون قيود.

أو العكس إذا كانت المسألة الأصلية كما يلي:

$$\max \quad \sum_{j \in N} c_j x_j \tag{5.4}$$

s. t.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}_i\mathbf{x} \geq b_i \qquad & i \in I \\
\mathbf{a}_i\mathbf{x} = b_i \qquad & i \in E \\
x_j \geq \mathbf{0} \qquad &
\end{aligned}
$$

فتكون المسألة المقابلة:

$$
\begin{aligned}
\min \qquad & \sum_{i\in M} b_i w_i \qquad\qquad (5.5) \\
\text{s. t.} \qquad & \\
& \mathbf{a}_j^T\mathbf{w} \geq c_j \qquad j \in N \\
& w_i \leq 0 \qquad i \in I \\
& w_i \quad \text{بدون قيود.} \qquad i \in E
\end{aligned}
$$

ربما تسهل عملية كتابة المسألة المقابلة إذا تتبعنا الجدول الآتي:

min	max
متغيرات: $\geq$ ، $\leq$ ، بدون قيود	شروط: $\leq$ ، $\geq$ ، $=$
شروط: $\geq$ ، $\leq$ ، $=$	متغيرات: $\geq$ ، $\leq$ ، بدون قيود

مثال ٥-١-١

اكتب المسألة المقابلة للبرنامج الآتي:

$$
\begin{aligned}
\min \qquad & x_1 + 4x_2 + 4x_3 \\
\text{s. t.} \qquad & \\
& 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 3 \\
& -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 \\
& 4x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0 \\
& x_i \geq 0 \quad \forall i
\end{aligned}
$$

المسألة المقابلة هي

$$\max \quad 3w_1 - 2w_2$$

s. t.

$$3w_1 - 2w_2 + 4w_3 \le 1$$
$$2w_1 - 3w_2 - w_3 \le 4$$
$$-w_1 - 2w_2 + 3w_3 \le 4$$
$$w_1 \ge 0$$
$$w_3 \le 0$$

w_2 بدون قيد.

مثال٥-١-٢

اكتب المسألة المقابلة للبرنامج الآتي:

$$\max \quad 8x_1 + 3x_2$$

s. t.

$$x_1 - 6x_2 \ge 2$$
$$5x_1 + 7x_2 = 4$$
$$x_1 \le 0, \quad x_2 \ge 0$$

المسألة المقابلة هي

$$\min \quad 2w_1 + 4w_2$$

s. t.

$$w_1 + 5w_2 \le 8$$
$$-6w_1 + 7w_2 \ge 3$$
$$w_1 \le 0$$

w_2 بدون قيد.

المعنى الأقتصادي لمتغيرات الثنائية Economic Interpretation of Dual Variables

ليكن لدينا البرنامج لأصلي الآتي:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

s. t.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

$$x_j \ge \mathbf{0}$$

إن x_j هي الكمية من المنتج j و b_i هي الكمية التوفرة من المادة الخام i. أما a_{ij} فهي الكمية التي نحتاجها من المادة الخام i لصنع وحدة من النتج j. وتعني c_j الربح في وحدة المنتج j. إن الشروط في المسألة الثنائية والتي هي: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j$ تدلنا على أن y_j تعني سعر الوحدة من المادة الخام i. وبالتالي فإن البرنامج الأصلي يبحث في إيجاد أكبر ربح بينما البرنامج الثنائي يبحث في أقل تكلفة للإنتاج.

٥-٢ النظرية الأساسية في الثنائية Fundamental Theorm of Duality

سوف نقتصر في هذا الفصل على الشكل القياسي للمسألة الأصلية:

$$\min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

s. t.

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

وبالتالي فإن المسألة المقابلة لها هي:

$$\max \quad \mathbf{w}^T \mathbf{b}$$

s. t. $\mathbf{w}^T \mathbf{A} \le \mathbf{c}^T$

$\mathbf{w}$ بدون قيد

نظرية ٥-٢-١

إذا كان $\mathbf{x}$ حلا مسموحا به بالنسبة للمسألة الأصلية وكان $\mathbf{w}$ حلا مسموحا به بالنسبة للمسألة المقابلة عندئذ يتحقق ما يلي:

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \ge \mathbf{w}^T \mathbf{b} \tag{5.6}$$

البرهان:

$$\mathbf{w}^T\mathbf{b} = \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

وذلك لأن $\mathbf{x} \ge 0$, $\mathbf{w}^T\mathbf{A} \le \mathbf{c}^T$.

□

نتيجة ٥-٢-٢ مبدأ الثنائية الضعيف WPD (The Weak Principle of Duality)

إذا كان $\mathbf{x}$ حلا مسموحا به بالنسبة للمسألة الأصلية وكان $\mathbf{w}$ حلا مسموحا به بالنسبة للمسألة المقابلة وإذا تحقق بالإضافة إلى ذلك أن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b} \tag{5.7}$$

عندئذ يكون $\mathbf{x}$ حلا أمثليا بالنسبة للمسألة الأصلية و $\mathbf{w}$ حلا أمثليا بالنسبة للمسألة المقابلة.

البرهان:

لو لم يكن $\mathbf{x}$ حلا أمثليا بالنسبة للمسألة الأصلية لوجد حل $\overline{\mathbf{x}}$ يتحقق من أجله:

$$\mathbf{c}^T\overline{\mathbf{x}} < \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$$

وهذا يتعارض مع النظرية ٥-٢-١. وبالمثل يمكن برهان أن $\mathbf{w}$ حل أمثلي للمسألة المقابلة.

□

نظرية ٥-٢-٣

لنفترض أن للمسألة الأصلية حلا أساسيا أمثليا مسموحا به مصفوفته الأساسية $\mathbf{B}$. عندئذ يكون:

١. $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\,\mathbf{B}^{-1}$ حلا مسموحا به بالنسبة للمسألة المقابلة.

٢. $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$.

٣. $\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\,\mathbf{B}^{-1}$ حلا أمثليا بالنسبة للمسألة المقابلة.

البرهان:

١. إن $\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$. بما أن $\mathbf{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ حل أساسي أمثلي مسموح به، لذا فإن

$$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} \geq \mathbf{0}$$

ولكن

$$\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T} - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

وهذا يقتضي

$$\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \leq \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T}$$

سوف نبين الآن أن $\mathbf{w}^{T} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}$ هو حل مسموح به بالنسبة للمسألة المقابلة

$$\mathbf{w}^{T}\mathbf{A} = \left[\mathbf{w}^{T}\mathbf{B},\ \mathbf{w}^{T}\mathbf{N}\right] = \left[\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}, \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right] \leq \left[\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}, \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^{T}\right] = \mathbf{c}^{T}$$

وبالتالي $\mathbf{w}^{T}\mathbf{A} \leq \mathbf{c}^{T}$ وهذا يعني أن $\mathbf{w}$ حل مسموح به بالنسبة للمسألة المقابلة.

٢. $\mathbf{w}^{T}\mathbf{b} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{T}\mathbf{x}_{\mathbf{B}} = \mathbf{c}^{T}\mathbf{x}$

٣. بما أن $\mathbf{c}^{T}\mathbf{x} = \mathbf{w}^{T}\mathbf{b}$ لذا فإن $\mathbf{w}$ هو حل أمثلي بالنسبة للمسألة المقابلة حسب ما تنص عليه النتيجة.

□

إن هذه النظرية تبين أنه يمكن التوصل للحل الأمثل بالنسبة للمسألة المقابلة إذا ما تم الحصول على حل المسألة الأصلية بطريقة السمبلكس، كما يتضح ذلك من المثال التالي:

مثال ٥-٢-٤

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 - 4x_2 - 3x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

إن الحل الأمثل لهذا المثال يمكن الحصول عليه بطريقة السمبلكس كما هو موضح في الجدول التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_4 & 2 & (2) & 1 & 1 & 0 & 4 \\ x_5 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 6 \\ & -1 & -4 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

وبعد العمليات المحورية نحصل على الجدول النهائي التالي:

$$\begin{array}{ccccccc} x_2 & 3/2 & 1 & 0 & 1 & -1/2 & 1 \\ x_3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 10 \end{array}$$

من النظرية ٥-٢-٣ نحصل على الحل الأمثل للمسألة المقابلة كما يلي:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}$$

وهذا يمثل الحل الأمثل للمسألة المقابلة. كما أننا نجده موضحا في الجدول أعلاه تحت المصفوفه $\mathbf{B}^{-1}$ وذلك بعد ضربه في -1. كما نلاحظ أن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b} = -10$.

نظرية ٥-٢-٥ متمّمة المكملة الضعيفة

The Weak Complementary Slackness (WCS)

ليكن $\mathbf{x}$ حلا مسموحا به بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حلا مسموحا به بالنسبة للبرنامج المقابل. الشرط اللازم والكافي ليكون $\mathbf{x}$ حلا أمثليا بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حلا أمثليا بالنسبة للبرنامج المقابل هو أن يتحقق ما يلي:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) &= 0 \\ (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{A})\mathbf{x} &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

البرهان:

لندخل من قبيل الاختصار الرمزين التاليين:

$$\alpha = \mathbf{w}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}), \qquad \beta = (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{A})\mathbf{x}$$

بما أن $\mathbf{x}$ حل مسموح به بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل مسموح به بالنسبة للبرنامج المقابل لذا فإن $\alpha = 0,\ \beta \geq 0$، لأن $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. إذا افترضنا أن $\mathbf{x}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج المقابل لذا فإن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ وبالتالي فإن:

$$\alpha + \beta = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b} = 0$$

وحيث أن $\alpha \geq 0,\ \beta \geq 0$ لذا لابد وأن يكون $\alpha = 0,\ \beta = 0$ مما يعني أن:

$$\mathbf{w}^T(\mathbf{Ax} - \mathbf{b}) = 0, \qquad (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}^T\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$$

أي أن الشرطين قد تحققا.
وبالعكس إذا افترضنا أن الشرطين محققان، أي $\alpha = 0,\ \beta = 0$ لنتج عن ذلك أن $\alpha + \beta = 0$ أي أن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} - \mathbf{w}^T\mathbf{b} = 0$ وبالتالي فإن $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{w}^T\mathbf{b}$ وحسب نظريه سابقه يتضح أن $\mathbf{x}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج الأصلي و $\mathbf{w}$ حل أمثلي بالنسبة للبرنامج المقابل.

□

ملاحظة: نستنتج من هذه النظرية العلاقات التالية:

$$\begin{aligned}
x_j > 0 \qquad &\Rightarrow \quad \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j = c_j \\
c_j > \mathbf{w}^T\mathbf{a}_j \qquad &\Rightarrow \quad x_j = 0 \\
w_i > 0 \qquad &\Rightarrow \quad \mathbf{a}_i^T\mathbf{x} = b_i \\
\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} > b_i \qquad &\Rightarrow \quad w_i = 0
\end{aligned}$$

مثال ٥-٢-٦

لدينا البرنامج الأصلي الآتي:

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s. t.}$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$
$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$
$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,\ldots,5$$

أوجد حلا أمثليا لهذا البرنامج مستعينا بنظرية متمّمة المكملة الضعيفة.

الحل:

إن البرنامج المقابل هو:

$$\max \quad 4w_1 + 3w_2$$
$$\text{s. t.}$$
$$w_1 + 2w_2 \leq 2$$
$$w_1 - 2w_2 \leq 3$$
$$2w_1 + 3w_2 \leq 5$$
$$w_1 + w_2 \leq 2$$
$$3w_1 + w_2 \leq 3$$
$$w_i \geq 0 \qquad i = 1,2$$

يحوي البرنامج المقابل متغيرين فقط ولذا يمكن حله بسهوله بالطريقة البيانية فنحصل على الحل الأمثل الآتي:

$$w_1 = 4/5, \quad w_2 = 3/5$$

نطبق الآن نظرية متمّمة المكملة الضعيفة فنجد بعد تعويض الحل الأمثل للبرنامج المقابل في الشروط أن:

$$\frac{4}{5}+\frac{6}{5}=2$$
$$\frac{4}{5}-\frac{6}{5}=-\frac{2}{5}<3 \Rightarrow x_2=0$$
$$\frac{8}{5}+\frac{9}{5}=\frac{17}{5}<5 \Rightarrow x_3=0$$
$$\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}<2 \Rightarrow x_4=0$$
$$\frac{12}{5}+\frac{3}{5}=3$$

بما أن $w_i > 0$ إذن :

$$x_1+x_2+2x_3+x_4+3x_5=4$$
$$2x_1-2x_2+3x_3+x_4+3x_5=3$$

وحيث أن $x_2=x_3=x_4=0$ لذا فإن:

$$x_1+3x_5=4$$
$$2x_1+x_5=3$$
$$\Rightarrow x_1=1 \quad x_5=1$$

أي أن الحل الأمثل للبرنامج الأصلي هو $(1,0,0,0,1)$

تلعب المتغيرات الثنائية دوراً مشابهاً لمعاملات لاجرانج في حساب التفاضل. فمن المعلوم، أنه لحساب القيمة الصغرى للدالة $z=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$ ، حيث تخضع $\mathbf{x}$ للشروط التالية:

$$\mathbf{a}_i{}^T\mathbf{x}=b_i \text{ ،}$$

فاننا ندخل مايسمى معاملات لاجرانج w_i ونبحث عن القيمة الصغرى للدالة التالية غير المشروطه

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\sum_{i=1}^{m} w_i(b_i-\mathbf{a}_i^T\mathbf{x})$$

إن هذا لإسلوب لايمكن تطبيقه حرفياً في البرمجة الخطية لوجود الشرط الأضافي $\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$. ومع ذلك فإننا نكوّن دالة مطابقة للدالة المذكورة آنفا

$$l(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{b} - \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

التي ندعوها دالة لاجرانج، وسنتعرف من خلالها على شرط لازم وكافي جديد للحلول الأمثلية للبرنامجين.

نظرية ٥-٢-٧ نظرية لاجرانج Lagrange Theorem

ليكن $\mathbf{x}_o$ حلا مسموحا به بالنسبة للبرنامج الأصلي. وليكن $\mathbf{w}_o$ حلا مسموحا به بالنسبة للبرنامج المقابل. الشرط اللازم والكافي ليكون $\mathbf{x}_o$ حلا أمثليا بالنسبة للبرنامج الأصلي. و $\mathbf{w}_o$ حلا أمثليا بالنسبة للبرنامج المقابل هو أن يتحقق ما يلي:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}) \le \ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ) \le \ell(\mathbf{x},\mathbf{w}_\circ) \tag{5.9}$$

حيث

$$\ell(\mathbf{x},\mathbf{w}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}^T\mathbf{b} - \mathbf{w}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

البرهان:

نبين أن الشرط المذكور لازم، بما أن $\mathbf{x}_o$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي، و $\mathbf{w}_o$ حل أمثلي للبرنامج المقابل لذا فإنه، حسب نظرية متمّمة المكملة الضعيفة، ينتج:

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_\circ &= \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x}_\circ = \ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ)\\
\ell(\mathbf{x},\mathbf{w}_\circ) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x}\\
&= \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} + (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A})\mathbf{x}\\
&\ge \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} = \ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ)
\end{aligned}$$

إذن

$$\ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ) \le \ell(\mathbf{x},\mathbf{w}_\circ)$$

بالمثل يمكن البرهان على أن

$$\ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}) \le \ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ)$$

إذن:

$$\ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}) \le \ell(\mathbf{x}_\circ,\mathbf{w}_\circ) \le \ell(\mathbf{x},\mathbf{w}_\circ)$$

سوف نبين الآن أن شرط لاجرانج كافي:

$$\begin{aligned}
& \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \le \ell(\mathbf{x}, \mathbf{w}_\circ) \\
\Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_\circ + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x}_\circ \le \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}\mathbf{x} \\
\Rightarrow\ & 0 \le \mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ) - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ) \\
\Rightarrow\ & 0 \le (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\circ^T\mathbf{A})(\mathbf{x} - \mathbf{x}_\circ)
\end{aligned}$$

نختار $\mathbf{x}$ كما يلي : $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\text{o} + \mathbf{e}_j$ حيث $\mathbf{e}_j$ متجه وحده، عناصره أصفار ماعدا العنصر الذي ترتيبه j فهو واحد.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & 0 \le (\mathbf{c}^T - \mathbf{w}_\text{o}^T\mathbf{A})\mathbf{e}_j \\
\Rightarrow\ & 0 \le c_j - \mathbf{w}_\text{o}^T\mathbf{a}_j \\
\Rightarrow\ & \mathbf{w}_\text{o}^T\mathbf{a}_j \le c_j \\
\Rightarrow\ & \mathbf{w}_\text{o}^T\mathbf{A} \le \mathbf{c}
\end{aligned}$$

إذن $\mathbf{w}_\text{o}$ حل مسموح به.

بالمثل

$$\begin{aligned}
& \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}) \le \ell(\mathbf{x}_\circ, \mathbf{w}_\circ) \\
\Rightarrow\ & (\mathbf{w} - \mathbf{w}_\circ)^T\ (\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_\circ) \le 0
\end{aligned}$$

نختار $\mathbf{w}$ كما يلي : $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\text{o} + \mathbf{e}_j$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{w} = \mathbf{w}_\text{o} + \mathbf{e}_j \\
\Rightarrow\ & \left(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_\text{o}\right)^T\mathbf{e}_j \le 0 \\
\Rightarrow\ & b_j - \mathbf{a}_j^T\mathbf{x}_\text{o} \le 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{b} \le \mathbf{A}\mathbf{x}_\text{o}
\end{aligned}$$

إذن $\mathbf{x}_\text{o}$ حل مسموح به. سوف نبين الآن أن $\mathbf{x}_\text{o}$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي ولذا نعوض في شرط لاجرانج $\mathbf{w} = 0,\ \mathbf{x} = 0$ فنجد:

$$\begin{aligned} & l(\mathbf{x}_o, \mathbf{w}_o) \le l(\mathbf{0}, \mathbf{w}_o) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o + \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \le 0 \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \end{aligned}$$

بشكل مشابه:

$$\begin{aligned} & l(\mathbf{x}_o, \mathbf{0}) \le l(\mathbf{x}_o, \mathbf{w}_o) \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \le \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o + \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \\ \Rightarrow\ & 0 \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} - \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \\ \Rightarrow\ & \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{A}\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \\ \Rightarrow\ & \mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \le \mathbf{w}_o^T\mathbf{b} \end{aligned}$$

ولكننا نعلم من نظرية ٥-٢-١ أن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_o \ge \mathbf{w}_o^T\mathbf{b}$$

إذن:

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_o = \mathbf{w}_o^T\mathbf{b}$$

وحسب نظرية ٥-٢-٣ ينتج من العلاقة الأخيره أن $\mathbf{x}_o$ حل أمثلي للبرنامج الأصلي، و $\mathbf{w}_o$ حل أمثلي للبرنامج المقابل.

□

إن نظرية لاجرانج في صيغتها هذه، تعتبر تطبيقاً على البرمجة الخطية لنظرية مشهورة في البرمجة الخطية تعرف باسم نظرية كوهن-توكر Kuhn-Tucker.

٥-٣ تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

في العديد من مسائل البرمجة الخطية تكون المعطيات غير دقيقه، لذا فمن الأهمية بمكان إيجاد الحل الأمثل للمسألة بعد توافر معطيات جديدة دون عناء حلها من جديد. كما أنه من الممكن أن تكون هناك أمور لم تؤخذ بعين الاعتبار أثناء صياغة المسألة. لهذا كله نجد لزاماً علينا تحري هذه الأمور ومعرفة مدى تأثير ذلك على قيمة دالة الهدف دون الحاجة إلى إعادة حل المسألة من جديد.
ليكن لدينا البرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.10}$$

ولتكن $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية التي أدت إلى الحل الأمثل لهذه المسألة.
سوف نتابع الآن التغيرات الآتية التي يمكن أن تحدث على معطيات المسألة:

١. تغير في معاملات دالة الهدف.
٢. تغير في الطرف الأيمن للشروط.
٣. تغير في مصفوفة الشروط.
٤. إضافة متغير جديد.
٥. إضافة شرط جديد.

في هذا الفصل سوف تقتصر دراستنا على النقاط ١،٢،٤ السابقة.

٥-٣-١ تغير في معاملات دالة الهدف Changes in the Objective Coefficient

ليكن لدينا البرنامج الخطي (5.10) نود أن نعرف إلى أي مدى يمكننا تغيير c_s دون أن ينتج عن ذلك تغير في الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.10).
إن المتجه

$$\mathbf{c}^T = [c_1, c_2, \ldots, c_s, \ldots, c_n]$$

قد يتغير ليصبح

$$\tilde{\mathbf{c}}^T = [c_1, c_2, \ldots, c_s + \Delta c_s, \ldots, c_n]$$

لنفترض أن الجدول الأخير عند حل البرنامج الخطي (5.10) هو كما في (4.33):

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c}^{T*} & -z^* \end{bmatrix}$$

نظرية ٥-٣-١

أ. إذا كان x_s متغيرا غير أساسي في $\mathbf{T}^*$ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.10) لن يتأثر لدى تغير c_s، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\Delta c_s \geq -c_s^* = -r_s$$

ب. إذا كان x_s متغيرا أساسيا في $\mathbf{T}^*$ فإن الحل الأمثل للبرنامج الخطي (5.10) لن يتأثر لدى تغير c_s، إذا تحقق الشرط الآتي:

$$\min_{j\in\Re}\left\{r_j / a_{kj}^* \ : a_{kj}^* > 0\right\} \geq \Delta c_s \geq \max_{j\in\Re}\left\{r_j / a_{kj}^* \ : a_{kj}^* < 0\right\} \qquad (5.11)$$

حيث k هو دليل الصف المقابل للمتغير الأساسي x_s. بينما $\Re$ ترمز إلى مجموعة أدلة المتغيرات غير الأساسية.

البرهان:

لدينا الحالتان التاليتان:

<u>الحالة الأولى:</u>

بما أن x_s متغير غير أساسي لذا فإنه لن يحدث أي تأثير على $\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j$. إن $\mathbf{a}_j$ تمثل أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$. ينتج عن ذلك أن $\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^*$.

فإذا كانت $j \neq s$ فإن

$$\begin{aligned}\hat{c}_j^* &= \hat{c}_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_j^* = c_j^* = r\end{aligned}$$

وأما إذا كانت $j = s$ فإن

$$\begin{aligned}\hat{c}_s^* &= \hat{c}_s - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_s^* \\ &= c_s + \Delta c_s - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{a}_s^* \\ &= c_s^* + \Delta c_s \\ &= r_s + \Delta c_s\end{aligned}$$

فإذا كان $r_s + \Delta c_s \geq 0$ أي إذا كان $\Delta c_s \geq -r_s$ فإن الحل الأمثل قبل تغيير c_s يبقى أمثليا بعد إجراء التغيير. ومما تجدر ملاحظته هنا هو أن قيمة x_s هي صفر وذلك باعتباره متغيرا غير أساسي. إن هذا يعني أن قيمة دالة الهدف سوف لن تتأثر نتيجة للتغيير Δc_s.

الحالة الثانية:

لنفترض الآن أن x_s متغير أساسي في الجدول النهائي وأن $\hat{c}_s = c_s + \Delta c_s$ وبالتالي فإن

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{c} + \Delta c_s \mathbf{e}_s \qquad (5.12)$$

حيث $\mathbf{e}_s$ متجه الوحدة التالي:

$$\mathbf{e}_s^T = [0,0,\ldots,0,1,0,\ldots,0]$$

حيث يقع 1 في الموضع s. وبقصر المعادلة (5.12) على معاملات التكلفة النسبية المقابلة للمتغيرات الأساسية نحصل على المعادلة التالية:

$$\hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}} + \Delta c_s \mathbf{e}_k \qquad (5.13)$$

حيث c_s يقع في الموضع k من المتجه $\mathbf{c}_{\mathbf{B}}$ بعد حذف معاملات التكلفة النسبية المقابلة للمتغيرات غير الأساسية. سوف ندرس الحالات الثلاث التالية:

١. إذا كان x_j متغيرا أساسيا وكان $j \neq s$.

٢. إذا كان x_j متغيرا أساسيا وكان $j = s$.

٣. إذا كان x_j متغيرا غير أساسي.

أولا: x_j متغير أساسي، حيث $j \neq s$.

بما أن x_j متغير أساسي لذا فإن $c_j^* = r_j = 0$ وبالتالي فإن

$$0 = c_j^* = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_j = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_j^* \qquad (5.14)$$

كما أن

$$\hat{c}_j^* = \hat{c}_j - \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_j^*$$

ولكن $\hat{c}_j = c_j$ اذن:

$$\hat{c}_j^* = c_j - (\mathbf{c_B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k)^T \mathbf{a}_j^*$$
$$= c_j - \mathbf{c_B}^T \mathbf{a}_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*$$

ولكن من (5.14) نجد أن:

$$= 0 - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*$$

وبما أن x_j متغير أساسي فإن

$$\mathbf{a}_j^* = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

حيث يقع 1 في الموقع j ، $k \neq j$ وكذلك $\mathbf{e}_k$ متجه الوحدة حيث يقع 1 في الموقع k ، نستنتج من ذلك أن $\mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^* = 0$ وبالتالي فإن $\hat{c}_j^* = 0$ أي أن هذه القيمة بقيت صفرا كما كانت سابقا.

<u>ثانيا:</u> x_j متغير أساسي، حيث $j = s$ بشكل مشابه للحالة الأول نجد أن:

$$\hat{c}_s^* = \hat{c}_s - \hat{\mathbf{c}}_\mathbf{B}^T \mathbf{a}_s^* = c_s + \Delta c_s - (\mathbf{c_B} + \Delta c_s \mathbf{e}_k)^T \mathbf{a}_s^*$$
$$= c_s - \mathbf{c_B}^T \mathbf{a}_s^* + (\Delta c_s - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_s^*)$$

ولكن $\mathbf{a}_s^*$ متجه الوحدة حيث يقع 1 في الموقع s وذلك لأن x_s متغير أساسي، وبالتالي فإن $c_s = \mathbf{c_B}^T \mathbf{a}_s^*$ أي أن $c_s - \mathbf{c_B}^T \mathbf{a}_s^* = 0$ وبالتالي:

$$\hat{c}_s^* = \Delta c_s - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_s^*$$

من الواضح أن $\mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_s = 1$ وبالتالي فإن

$$\hat{c}_s^* = \Delta c_s - \Delta c_s$$

أي أن $\hat{c}_s^* = 0$ وهذا يعني أن قيمة c_s بقيت صفرا كما كانت سابقا.

<u>ثالثا:</u> x_j متغير غير أساسي.

من الطبيعي أن $j \neq s$ وإلا رجعنا إلى الحالة الأولى. في هذه الحالة $\hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} = \mathbf{c}_{\mathbf{B}} + \Delta c_s \mathbf{e}_k$ وكذلك $\hat{c}_j = c_j$ ثم أن

$$\begin{aligned}\hat{c}_j^* &= \hat{c}_j - \hat{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \left(\mathbf{c}_{\mathbf{B}} + \Delta c_s \mathbf{e}_k\right)^T \mathbf{a}_j^* \\ &= c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*\end{aligned}$$

ولكن $c_j^* = c_j - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{a}_j^*$ وبالتالي:

$$\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s \mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^*$$

ولكن

$$\mathbf{a}_j^* = \begin{bmatrix} a_{1j}^* \\ \vdots \\ a_{kj}^* \\ \vdots \\ a_{mj}^* \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $\mathbf{e}_k^T \mathbf{a}_j^* = a_{kj}^*$، نستنتج من ذلك أن

$$\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s a_{kj}^*$$

ولكي يبقى الحل الأمثل أمثليا لابد أن نشترط أن $\hat{c}_j^* = c_j^* - \Delta c_s a_{kj}^* \geq 0$ فإذا كان $a_{kj}^* > 0$ فإن هذا الشرط هذا يكافئ أن $c_j^*/a_{kj}^* \geq \Delta c_s$، أما إذا كان $a_{kj}^* < 0$ فإن هذا الشرط يكافئ أن $c_j^*/a_{kj}^* \leq \Delta c_s$، وفي حالة $a_{kj}^* = 0$ فإن هذا الشرط يعني أن $c_j^* \geq 0$. إن الشروط المذكورة يمكن أن تصاغ على النحو التالي:

$$\min_{j \in \Re} \left\{ c_j^*/a_{kj}^* \ : a_{kj}^* > 0 \right\} \geq \Delta c_s \geq \max_{j \in \Re} \left\{ c_j^*/a_{kj}^* \ : a_{kj}^* < 0 \right\}$$

وهذا ينهي إثبات النظرية.

□

مثال ٥-٣-٢

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{array}{ll} \min & -9x_1 - 6x_2 - x_3 - 9x_4 \\ \text{s.t.} & \\ & 6x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 24 \\ & 2x_1 + x_2 + 4x_4 \le 12 \\ & 69x_1 + 7x_2 + 4x_3 - 6x_4 \le 234 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{array}$$

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج هو:

x_3	4	0	1	−1	1	−1	0	12
x_2	2	1	0	4	0	1	0	12
x_7	39	0	0	−30	−4	−3	1	102
	7	0	0	14	1	5	0	84

بما أن x_1 متغير غير أساسي لذا فانه حسب النظرية ٥-٣-١ يمكننا تغيير c_1 بمقدار $\infty > \Delta c_1 \ge -7$ دون أن يتأثر الحل الأمثل السابق، وتبقى دالة الهدف كما هي. أما بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية x_4, x_5, x_6 فيمكننا إجراء التغييرات الآتية:

$$\infty > \Delta c_6 \ge -5, \quad \infty > \Delta c_5 \ge -1, \quad \infty > \Delta c_4 \ge -14$$

أما بالنسبة للمتغير الأساسي x_3 فيمكننا إجراء التغييرات الآتية دون أن يتأثر الحل الأمثل:

$$\min_{j \in \Re}\{7/4, 1/1\} \ge \Delta c_3 \ge \max_{j \in \Re}\{-14/1, -5/1\}$$

أي

$$1 \ge \Delta c_3 \ge -5$$

والتغير المسموح لـ c_2 هو: