x_1	1	−11.0	−5.0	0	2.0	18.0	0	0
x_4	0	(4.0)	2.0	1	−1.0	−8.0	0	0
x_7	0	11.0	5.0	0	−2.0	−18.0	1	1
	0	−53.0	−41.0	0	20.0	204.0	0	0

x_1	1	0	(0.5)	2.75	−0.75	−4.0	0	0
x_2	0	1	0.5	0.25	−0.25	−2.0	0	0
x_7	0	0	−0.5	−2.75	0.75	4.0	1	1
	0	0	−14.0	13.25	6.75	98.0	0	0

x_3	2.0	0	1	5.5	−1.5	−8.0	0	0
x_2	−1.0	1	0	−2.5	0.5	(2.0)	0	0
x_7	1.0	0	0	0.0	0.0	0.0	1	1
	29.0	0	0	93.0	−15.0	−18.0	0	0

x_3	−2.0	4.0	1	−4.5	(0.5)	0	0	0
x_6	−0.5	0.5	0	−1.25	0.25	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0	0.0	0.0	0	1	1
	20.0	9.0	0	70.5	−10.5	0	0	0

x_5	−4.0	8.0	2.0	−9.0	1	0	0	0
x_6	0.5	−1.5	−0.5	(1.0)	0	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0	1	1
	−22.0	93.0	21.0	−24.0	0	0	0	0

نلاحظ هنا حدوث دوران وأنه لم يحدث أي تحسن في قيمة دالة الهدف، وأن هذه الجدول هو نفس الجدول الأول. وأننا لو تابعنا خطوات السمبلكس فسوف نستمر في الدوران عددا لا نهائي من

الدورات. بالرغم من عدم حدوث ظاهرة الدوران بشكل كبير في المسائل العملية، إلا أن هذه المشكلة جذبت اهتمام الباحثين. وقد استطاع بلاند Bland عام ١٩٧٧م أن يبرهن أن القاعدة البسيطة التالية تمنع حدوث ظاهرة الدوران هذه.

قاعدة بلاند:

١- اختر العمود الداخل إلى الأساس وفقا للدليل الآتي:

$$k = \min_{j}\left\{ j : r_j < 0 \right\}$$

أي الدليل الأصغر، وليس شرطا أن تكون قيمته الأصغر.

٢- بالنسبة للمتغير المغادر إذا لم تكن القيمة الصغرى للنسب المذكورة في الصيغة (4.14) وحيده فأختر المقابل لأول قيمه صغرى تواجهك في العمود المحوري من أعلى.

مثال ٤-٤-٦

باستخدام قاعدة بلاند على المثال ٤-٤-٥

نضع المعلومات الناشئة عن البرنامج الخطي في المثال ٤-٤-٥ في الجدول التالي:

x_5	-4.0	8.0	2.0	-9.0	1	0	0	0
x_6	(0.5)	-1.5	-0.5	1.0	0	1	0	0
x_7	1.0	0.0	0.0	0.0	0	0	1	1
	-22.0	93.0	21.0	-24.0	0	0	0	0

بهذا يكون العمود المحوري هو الأول بدلا من الرابع ويكون العنصر المحوري هو (0.5). ثم نجري العمليات المحورية فنحصل على الجدول التالي:

x_5	0	-4.0	-2.0	-2.0	1	8.0	0	0
x_1	1	-3.0	-1.0	2.0	0	2.0	0	0
x_7	0	3.0	(1.0)	-2.0	0	-2.0	1	1
	0	27.0	-1.0	20.0	0	44.0	0	0

ثم نعاود الخطوات السابقة فنحصل على الجدول النهائي التالي:

x_5	0	2	0	-5	1	4	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1
	0	30	0	18	0	42	1	1

أي أن الحل الأمثل هو $x_5 = 2,\quad x_3 = 1,\quad x_1 = 1,\quad z = -1$.

٤-٥ طريقة المرحلتين The Two-Phase method

حتى الآن كان تعاملنا مع البرامج الخطية من النوع:

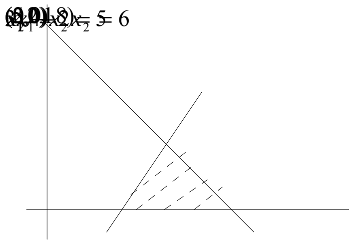
$$\begin{aligned} \min \quad & z = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{Ax} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

حيث أن $b_i \ge 0$ لكل $1 \le i \le m$، في هذا الفصل سندرس البرامج الخطية والتي لا يشترط أن يكون الطرف الأيمن فيها غير سالب،

اعتبر البرنامج الخطي

$$\begin{aligned} \min \quad & -3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 3x_1 - 2x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned} \tag{4.27}$$

إن ضرب المتباينة الثانية بـ -1 سيغير في اتجاه إشارة المتباينة وتصبح اشارة الطرف الأيمن سالبة. إننا لا نستطيع استخدام المتغيرات غير الأساسية x_1 و x_2 كنقاط بداية لطريقة السمبلكس وذلك لأن $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ يجعل قيمة المتغيرات الإضافية سالبة، وهذا سببه القيمة السالبة في المتباينة الثانية. الشكل التالي يوضح منطقة الحل المسموح به للبرنامج الخطي (4.27). لاحظ أن المركز $(0,0)$ليس نقطة حدية مسموح بها في منطقة الحل المسموح به.



لحل هذه المشكلة سنستخدم طريقة المرحلتين.

يسهل في بعض الأحيان إيجاد حل أساسي ابتدائي للبرنامج الخطي وهو أمر كما نعلم ضروري كنقطة انطلاق لطريقة السمبلكس. إلا أنه في كثير من الأحيان، كما رأينا في المثال السابق، يصعب الحصول على حل أساسي ابتدائي مباشر للبرنامج الخطي الذي شروطه مكتوبة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.28}$$

إن حل البرنامج الخطي يمر بالمرحلتين التاليتين

المرحلة الأول: لكي نتوصل إلى حل أساسي ابتدائي نأخذ في عين الاعتبار البرنامج الخطي المساعد الأتي:

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \ \min \tag{4.29}$$

s. t.

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} + \mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

ندعو **y** متجه المتغيرات المساعدة Artificial Variables. إذا كانت القيمة الصغرى للبرنامج (4.29) مساويه الصفر فإن هذا يعني أن $y_i = 0$ وأن قيم x_i سوف توصلنا إلى حل أساسي ابتدائي للمسألة الأصلية (4.28). أما إذا كانت القيمة الصغرى للبرنامج (4.29) لا تساوي الصفر، فهذا يعني أن المسألة المساعدة (4.29) غير متوافقة مع المسألة الأصلية وبالتالي لن يكون للمسألة الأصلية حل مسموح به.

المرحلة الثانية: بعد حل المسألة المساعدة تكون المرحلة الأولى قد انتهت وتبدأ المرحلة الثانية بالاستعانة بالحل الأساسي المسموح به الناتج عن المرحلة الأولى في سبيل تطبيق طريقة السمبلكس لإيجاد القيمة الصغرى لدالة الهدف في المسألة الأصلية. وفي هذه المرحلة يتم التغاضي عن المتغيرات المساعدة وكذلك عن دالة الهدف للمسألة المساعدة.

نطبق هذه الطريقة على المثال (4.27)، نضيف المتغيرات الإضافية x_3, x_4 التالية:

$$\begin{aligned}
&\min \quad -3x_1 + 4x_2 \qquad\qquad (4.30)\\
&\text{s. t.}\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&3x_1 - 2x_2 - x_4 = 6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

للسهولة سنسمي المتغيرات الزائدة والإضافية بالإضافية. نلاحظ أنه في هذه المرحلة لا يمكن استخدام المتغيرات x_3 و x_4 كمتغيرات أساسية وذلك لأنه إذا كان $x_1 = 0$ و $x_2 = 0$ فإنه يكون لدينا الحل غير المسموح به $(0,0,5,-6)$.

نضيف المتغير المساعد y_1 ويكون لدينا البرنامج الخطي المساعد التالي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad y_1 \qquad\qquad (4.31)\\
&\text{s. t.}\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 5\\
&3x_1 - 2x_2 - x_4 + y_1 = 6\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, y_1 \geq 0
\end{aligned}$$

إن البرنامجين (4.30) و(4.31) غير متكافئين، ولكن إذا كان $(t_1, t_2, t_3, t_4, 0)$ حلا أساسيا لـ (4.31) حيث المتغير المساعد y_1 غير أساسي، فإن (t_1, t_2, t_3, t_4) يكون حلا أساسيا لـ (4.30).

إن الفكرة الأساسية هي جعل المتغيرات الأساسية المساعدة في المرحلة الأولى متغيرات غير أساسية ومن ثم الانتقال إلى المرحلة الثانية.

الجدول التالي يمثل البرنامج (4.31)

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	1	1	1	0	0	5
y_1	3	−2	0	−1	1	6
	0	0	0	0	1	0

المتغيرات الأساسية نتخلص منها بجعلها غير أساسيه ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الثاني في (−1) وجمعه مع الصف الأخير نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	1	1	1	0	0	5
y_1	3	−2	0	−1	1	6
	−3	2	0	1	0	−6

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	
x_3	0	5/3	1	1/3	−1/3	3
x_1	1	−2/3	0	−1/3	1/3	2
	0	0	0	0	1	0

وبما أن جميع القيم في الصف الأخير غير سالبة نكون حصلنا على القيمة الأصغرى لـ y_1 والذي يساوي الصفر. وحيث أن هذا هو المطلوب إذ تمكنا من

جعل المتغير y_1 غير أساسي وبالتالي نكون قد حصلنا على حل أساسي للمسألة الأصلية (4,30) وهو $(2,0,3,0)$.
ننتقل الآن إلى المرحلة الثانية حيث نضع في الصف الأخير معاملات دالة الهدف الأصلية ونحذف العمود الممثل للمتغير المساعد فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 3 \\ x_1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 2 \\ & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

نضرب الصف الثاني بـ3 ونضيفها إلى الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_3 & 0 & 2/3 & 1 & 1/3 & 3 \\ x_1 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 & 2 \\ & 0 & 2 & 0 & -1 & 6 \end{array}$$

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

$$\begin{array}{cccccc} x_4 & 0 & 2 & 3 & 1 & 9 \\ x_1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ & 0 & 4 & 3 & 0 & 15 \end{array}$$

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي $x_1 = 5, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 9$ ودالة الهدف $z = -15$.

مثال ٤-٥-١

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{array}{ll} \min & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} & \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\
3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

في هذا المثال لا يوجد حل أساسي واضح، لذا نستخدم طريقة المرحلتين.
المرحلة الأول: نضيف المتغيرين المساعدين $y_1, y_2 \ge 0$ ودالة الهدف المساعدة $y_1 + y_2$. فيتكون لدينا البرنامج المساعد التالي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad y_1 + y_2 \\
&\text{s. t.} \\
&\quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_1 = 4 \\
&\quad 3x_1 + 3x_2 + x_3 + y_2 = 3 \\
&\quad x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

ومنه نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
	0	0	0	1	1	

نتخلص من المتغيرات الأساسية بجعلها غير أساسيه ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الأول في (-1) وجمعه مع الصف الأخير، وكذلك بضرب الصف الثاني في (-1) وجمعه مع الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
y_1	2	1	2	1	0	4
y_2	3	3	1	0	1	3
	-5	-4	-3	0	0	-7

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	
x_3	0	–3/4	1	3/4	–1/2	3/2
x_1	1	5/4	0	–1/4	1/2	1/2
	0	0	0	1	1	0

نلاحظ أن كلاً من المتغيرات المساعدة قد خرج من الأساس وأن دالة الهدف المساعدة مساويه للصفر وبذا نكون قد أنهينا المرحلة الأولى والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأساسي الأبتدائي التالي $x_1 = 1/2, x_2 = 0 x_3 = 3/2$.

المرحلة الثانية: نبدأ بالجدول الذي حصلنا عليه من المرحلة الأولى بعد إهمال الأعمدة المقابلة للمتغيرات المساعدة فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	–3/4	1	3/2
x_1	1	5/4	0	1/2
	4	1	1	0

نجري العمليات الحسابية اللازمة لجعل $\mathbf{r = 0}$ لجميع المتغيرات الأساسية فنحصل على

	x_1	x_2	x_3	
x_3	0	–3/4	1	3/2
x_1	1	(5/4)	0	1/2
	0	–13/4	0	–7/2

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	
x_3	3/5	0	1	9/5
x_2	4/5	1	0	2/5
	13/5	0	0	–11/5

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي $x_1 = 0, x_2 = 2/5, x_3 = 9/5$ ودالة الهدف $z = 11/5$.

مثال ٤-٥-٢

حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} &\min \quad x_1 + 2x_2 \\ &\text{s. t.} \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20 \\ &\quad 2x_1 - x_2 - x_4 = 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

في هذا المثال لا يوجد حل أساسي واضح، لذا نستخدم طريقة المرحلتين. نضيف المتغيرين المساعدين $y_1, y_2 \geq 0$ ودالة الهدف المساعدة $y_1 + y_2$. فيتكون لدينا البرنامج المساعد التالي:

$$\begin{aligned} &\min \quad y_1 + y_2 \\ &\text{s. t.} \\ &\quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + y_1 = 20 \\ &\quad 2x_1 - x_2 - x_4 + y_2 = 2 \\ &\quad x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأول: نبدأ بالجدول

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	4	1	0	1	0	20
y_2	2	-1	0	-1	0	1	2
	0	0	0	0	1	1	

نتخلص من المتغيرات الأساسية بجعلها غير أساسيه ومن ثم الرجوع إلى المسألة الأصلية. في البداية نتخلص من الواحد المقابل لدالة الهدف بضرب الصف الأول في (-1) وجمعه مع الصف الأخير، وكذلك بضرب الصف الثاني في (-1) وجمعه مع الصف الأخير فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
y_1	3	4	1	0	1	0	20
y_2	2	−1	0	−1	0	1	2
	−5	−3	−1	1	0	0	−22

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	
x_2	0	1	2/11	3/11	2/11	−3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	1/11	4/11	28/11
	0	0	0	0	1	1	0

نلاحظ أن كلاً من المتغيرات المساعدة قد خرج من الأساس وأن دالة الهدف المساعدة مساويه للصفر وبذا نكون قد أنهينا المرحلة الأولى والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأساسي الأبتدائي التالي $x_1 = 28/11, x_2 = 34/11, x_3 = 0, x_4 = 0$.

المرحلة الثانية: نبدأ بالجدول الذي حصلنا عليه من المرحلة الأولى بعد إهمال الأعمدة المقابلة للمتغيرات المساعدة فنحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	2/11	3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	28/11
	1	2	0	0	0

نجري العمليات الحسابية اللازمة لجعل $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ لجميع المتغيرات الأساسية فنحصل على

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	2/11	3/11	34/11
x_1	1	0	1/11	−4/11	28/11
	0	0	−5/11	−2/11	−96/11

بتنفيذ خطوات خوارزمية السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	11/2	1	3/2	17
x_1	1	−1/2	0	−1/2	1
	0	5/2	0	1/2	−1

وبذلك نكون قد أنهينا المرحلة الثانية والتي من خلالها توصلنا إلى الحل الأمثل التالي $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 17, x_4 = 0$ ودالة الهدف $z = 1$.

ملحوظة: يمكن حل المثال السابق بإضافة متغير مساعد واحد فقط.

٤-٦ خوارزمية السمبلكس المحسنة The Revised Simplex Method

لقد لوحظ من خلال التعامل مع خوارزمية السمبلكس أن عدد العمليات المحورية هو حوالي $3m/2$ فإذا كانت m أقل بكثير من n فمن الواضح أن جزءا كبيرا من أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$ لن تجرى عليها عمليات محورية. وبالتالي فإن الوقت المستنفذ على مثل هذه الحسابات هو وقت ضائع. بالإضافة إلى ذلك فإن تخزين هذه الأعمدة هو أيضا مضيعة لذاكرة الحاسب. من هنا فإن خوارزمية السمبلكس المحسنة تقوم بترتيب عمليات السمبلكس بشكل يتجنب حساب وتخزين المعلومات غير الضرورية، وهذا بطبيعة الحال يؤدي إلي زيادة كفاءة خوارزمية السمبلكس مما يؤهلها لحل المسائل العملية بشكل فعال.

النظرية التالية تعطي الصياغة الأساسية لعلاقة المصفوفة الناتجة من طريقة السمبلكس بالمصفوفة الابتدائية:

نظرية ٤-٦-١

بفرض أن

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}^T & -z \end{bmatrix} \tag{4.32}$$

هو الجدول الأولي للبرنامج الخطي بشكله القياسي، حيث تحوي $\mathbf{A}$ أعمدة الوحدة $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$. لتكن $\mathbf{T}^*$ جدول السمبلكس الناتج من $\mathbf{T}$ بواسطة عملية محورية أو أكثر من العمليات المحورية لطريقة السمبلكس، ولتكن $\mathbf{B}$ المصفوفة الأساسية لـ$\mathbf{T}^*$. لنرمز للمصفوفات الجزئية من $\mathbf{T}^*$ بـ

$$\mathbf{T}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^* & \mathbf{b}^* \\ \mathbf{c}^{T*} & -z^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{N}}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

فإن:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^* &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} \\ \mathbf{b}^* &= \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{c}^{T*} &= \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} \\ -z^* &= -z - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

مثال ٤-٦-٢

اعتبر البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = -6x_1 - 8x_2 - x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 20 \\ & x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 9 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 30 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{aligned}$$

بتطبيق طريقة السمبلكس نحصل على الجدول التالي:

x_4	3	5	3	1	0	0	20
x_5	1	3	2	0	1	0	9
x_6	6	2	5	0	0	1	30
	−6	−8	−1	0	0	0	0

إن الجدول النهائي لهذا البرنامج هو:

x_1	[]	[]	[]	$-1/12$	0	$5/24$	[]
x_2	[]	[]	[]	$1/4$	0	$-1/8$	[]
x_5	[]	[]	[]	$-2/3$	1	$1/6$	[]
	[]	[]	[]	[]	[]	[]	[]

إن المعلومات المفقودة في المناطق الخالية بين الأقواس المربعة، يمكن الحصول عليها من المعلومات المعطاة في الجدولين السابقين وذلك باستخدام النظرية ٤-٦-١. $\mathbf{B}^{-1}$ المصفوفة في الجدول الأخير تقابل مصفوفة الوحدة في الجدول الأول. نستطيع استنتاج $\mathbf{c_B}$ من المتغيرات الأساسية المعطاة في صفوف الجدول الأخير وصف دالة الهدف المعطى في الجدول الأول. هذه الملاحظات توضح أن $\mathbf{B}^{-1}$ و $\mathbf{c_B}$ فقط هي التي نحتاج معرفتها لإعادة بناء الجدول الأخير الناتج من طريقة السمبلكس. وهذا هو أساس بناء طريقة السمبلكس المحسنة.

لتكن $\mathbf{A}^*, \mathbf{b}^*, \mathbf{r}^{T*}$ و z^* المصفوفات الجزئية من الجدول الأخير. نحسب القيم المفقودة كالتالي:

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1/12 & 0 & 5/24 \\ 1/4 & 0 & -1/8 \\ -2/3 & 1 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_3^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 19/24 \\ 1/8 \\ 5/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 55/12 \\ 5/4 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

باستخدام $\mathbf{A}^*$ و $\mathbf{b}^*$ نستطيع حساب $\mathbf{r}^{T*}$ و $-z^*$، كالتالي:

$$\mathbf{r}^T = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{c}^T - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{A}^*$$

$$= \begin{bmatrix} -6 & -8 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 19/24 & -1/12 & 0 & 5/24 \\ 0 & 1 & 1/8 & 1/4 & 0 & -1/8 \\ 0 & 0 & 5/6 & -2/3 & 1 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 19/4 & 3/2 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

$$-z^* = -z - \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{b}^*$$

$$= -0 - \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 55/12 \\ 5/4 \\ 2/3 \end{bmatrix} = -75/2$$

وبالتالي: $z^* = 75/2$

خوارزمية السمبلكس المحسنة: Revised Simplex Algorithm(RSM)

يتم ترتيب العمليات في هذه الخوارزمية وفقاً لما يلي:

إذا كان لدينا معكوس المصفوفة $\mathbf{B}$ والحل الابتدائي $\mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ فإننا نقوم بعدئذ بتكرار الخطوات الآتية:

أولا : نحسب معاملات التكلفة النسبية للمتغيرات غير الأساسية

$$\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}$$

والتي يمكن حسابها بحساب المتجه

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1}$$

ثم نحسب

$$\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T \mathbf{N}$$

إذا كانت جميع مركبات المتجه $\mathbf{r}_\mathbf{N}$ غير سالبه فإن ذلك يعني أن الحل امثلي.
ثانيا : نحدد المتجه $\mathbf{a}_\mathbf{k}$ الداخل إلى الأساس وذلك بأخذ أصغر قيمه سالبه من قيم معاملات التكلفة النسبية ثم نعبر عن هذا المتجه وفقاً للأساس الحالي أي أننا نقوم بحساب:

$$\mathbf{a}_k^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_\mathbf{k}$$

ثالثا : نحسب النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ ثم نحدد المتجه الخارج من الأساس وذلك بأخذ أصغر هذه النسب (إذا كانت القيمة الصغرى لهذه النسب ليست وحيده فإننا نأخذ أول قيمه صغرى من أعلى أي أننا نطبق قاعدة بلاند) حسب الجدول التالي:

معكوس الأساس	الطرف الأيمن
$\mathbf{B}^{-1}$	$\mathbf{b}$
$-\mathbf{d}^T$	$\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{b}$

رابعا : نجري العمليات المحورية للحصول على معكوس المصفوفة الأساسية الجديدة وكذلك للحصول على حل أساسي جديد.

مثال ٤-٦-٣

حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس المحسنة (RSM)

$$\min \quad -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - 4x_5 + 2x_6 \tag{4.34}$$

s. t.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 &\le 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 \quad &\le 4 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 &\le 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

في البداية نضيف متغيرات مكملة Slack variables x_7, x_8, x_9 ثم نجد قيمة $\mathbf{d}$

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T \mathbf{B}^{-1} = (0,0,0)$$

حيث المصفوفة الأساسية $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ فيتكون لدينا الجدول التالي:

	معكوس الأساس			الطرف الأيمن
x_7	1	0	0	6
x_8	0	1	0	4
x_9	0	0	1	4
$-z$	0	0	0	0

الدورة الأولى:

نحسب $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وبما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ لذا فإن $\mathbf{r}_\mathbf{N} = \mathbf{c}_\mathbf{N}$ ومن هنا نجد $k = 5$ ويكون المتغير الداخل x_5

$$\mathbf{a}_5^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_5^* \\ c_5 - u_5 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق، حيث $u_5 = \mathbf{d}^T\mathbf{a}_5$.

ثالثا : نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{35}^* = 2$ فنحصل بعد الاختزال على الجدول التالي:

	معكوس الأساس			الطرف الأيمن	$\mathbf{a}_5^*$
x_7	1	0	0	6	1
x_8	0	1	0	4	0
x_9	0	0	1	4	(2)
$-z$	0	0	0	0	-4

بعد اجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

معكوس الطرف

	الأساس			الأيمن
x_7	1	0	$-1/2$	4
x_8	0	1	0	4
x_5	0	0	$1/2$	2
$-z$	0	0	2	8

الدورة الثانية:

نحسب مره أخرى $\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ و

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T\mathbf{B}^{-1} = (0,0,-2)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^{\mathbf{T}}\mathbf{a}_j$ وبالتالي نجد أن

$$c_1 - u_1 = -1, \quad c_2 - u_2 = -2, \quad c_3 - u_3 = 3,$$
$$c_4 - u_4 = 1, \quad c_6 - u_6 = 4, \quad c_9 - u_9 = 2,$$

فنجد أن $k = 2$ ويكون المتغير الداخل x_2

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* \\ c_2 - u_2 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق مع ملاحظة أن $c_2 - u_2 = -2$.

ثالثا : نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{21}^* = 1$ فنحصل على الجدول التالي:

معكوس الأساس	الطرف الأيمن	$\mathbf{a}_2^*$

x_7	1	0	$-1/2$	4	(1)
x_8	0	1	0	4	-1
x_5	0	0	$1/2$	2	0
$-z$	0	0	2	8	-2

بعد اجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

	معكوس الأساس			الطرف الأيمن
x_2	1	0	$-1/2$	4
x_8	1	1	$-1/2$	8
x_5	0	0	$1/2$	2
z	2	0	1	16

الدورة الثالثة:

نحسب مره أخرى $\mathbf{d}^T\mathbf{N}$ و $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1} = (-2,0,-1)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{a}_j$ وبالتالي نجد أن

$$c_1 - u_1 = 1, \quad c_3 - u_3 = 4, \quad c_4 - u_4 = 2,$$
$$c_6 - u_6 = 5, \quad c_7 - u_7 = 2, \quad c_9 - u_9 = 1$$

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل (المتغير x_7 غادر الأساس وبالتالي $c_7 - u_7 > 0$).

مثال ٤ـ٦ـ٤

استخدم طريقة السمبلكس المحسنة (RSM) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\min \quad -2x_2$$
$$\text{s. t.}$$

$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

نضع الجدول الخاص بطريقة السمبلكس المحسنة بعد إضافة المتغيرات الإضافية.

	$\mathbf{B}^{-1}$		$\mathbf{b}$
x_3	1	0	4
x_4	0	1	9
z	0	0	0

ثم نحسب $\mathbf{r}_{\mathbf{N}}^T = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ بما أن $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ لذا فإن $\mathbf{r}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}$ ومن هنا نجد أن $k = 2$ ويكون المتغير الداخل x_2

$$\mathbf{a}_2^* = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ثم ندخل المتجه $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* \\ c_2 - u_2 \end{bmatrix}$ إلى أيمن الجدول السابق.

ثالثا: نحسب أصغر النسب b_i^* / a_{ik}^* لجميع $a_{ik}^* > 0$ لتعيين العنصر المحوري وهو هنا $a_{12}^* = 2$ فنحصل على الجدول التالي:

	$\mathbf{B}^{-1}$		$\mathbf{b}$	$\mathbf{a}_2^*$
x_3	1	0	4	(2)
x_4	0	1	9	1
z	0	0	0	−2

بعد اجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

$\mathbf{B}^{-1}$ $\mathbf{b}$

x_2	0.5	0	2
x_4	-0.5	1	7
z	1	0	40

<u>الدورة الثانية:</u>

نحسب مره أخرى $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وكذلك

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1} = (-1,0)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{a}_j$ وبالتالي فإننا نجد

$$c_1 - u_1 = 1, \quad c_3 - u_3 = 1,$$

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل.

بعد اجراء العمليات المحورية نحصل على الجدول التالي:

	$\mathbf{B}^{-1}$		$\mathbf{b}$
x_2	0.5	0	2
x_4	-0.5	1	7
z	1	0	40

<u>الدورة الثانية:</u>

نحسب مره أخرى $\mathbf{r}_\mathbf{N}^T = \mathbf{c}_\mathbf{N}^T - \mathbf{d}^T\mathbf{N}$ وكذلك

$$\mathbf{d}^T = \mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1} = (-1,0)$$

إن $r_j = c_j - u_j = c_j - \mathbf{d}^\mathbf{T}\mathbf{a}_j$ وبالتالي فإننا نجد

$$c_1 - u_1 = 1, \quad c_3 - u_3 = 1,$$

وبما أن جميع $c_j - u_j \geq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأساسي المعطى في الجدول السابق هو الحل الأمثل.

٤-٧ طريقة كارماركر Karmarkar Method

في عام ١٩٨٣م وجد كارماركر طريقةجديدة لحل مسائل البرمجة الخطية. وقد امتازت هذه الطريقة بقدرتها على حل المسائل ذات الحجم الكبير. وسوف

نذكر كلمة موجزة حول هذه الطريقة، فهي خلافاً لطريقة السمبلكس، تبدأ من نقطة داخل المنطقة المسموح بها ثم تتحرك بالاتجاه الأفضل نحو تحسين دالة الهدف وتقف عند نقطة قريبة من حدود المنطقة المسموح بها. ثم تسعى طريقة كارماركر إلى تبديل المتغيرات بحيث تنتقل النقطة التي تم الوقوف عندها إلى مكان قريب من مركز المنطقة المسموح بها الجديدة. ومن ثم يتم العمل من جديد بالتحرك نحو اتجاه جديد بغية تحسين دالة الهدف، وهكذا.

تمارين الباب الرابع

٤-١ أوجد حلا أمثليا للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 8 \\ & 3x_1 + 5x_2 \le 26 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

٤-٢ أوجد حلا أمثليا للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = -4x_1 - 3x_2 + 12x_3 \\ \text{s. t.} \quad & -2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \le -5 \\ & -x_1 + x_2 + 3x_3 \le -3 \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

٤-٣ أوجد الحل الأمثل للبرنامج الخطي الآتي:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ & x_1 + 2x_3 \ge 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1 \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

٤-٤ لدينا البرنامج الخطي الآتي

$$\min \quad 5x_1 - 3x_2$$
s. t.
$$2x_1 - x_2 + 4x_3 \le 4$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \le 5$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \ge 1$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

أوجد الحل الأمثل للبرنامج المذكور.

٤-٥ حل البرنامج التالي بطريقة السمبلكس :

$$\min \quad -2x_1 + x_2 - x_3$$
s. t.
$$x_1 + x_2 + x_3 \le 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

٤-٦ حل التمرين ٢-٧ بطريقتين مختلفتين.

٤-٧ باستخدام طريقة المرحلتين استخدم المرحلة الأول لاثبات أن البرنامج التالي ليس له حل مسموح به:

$$\min \quad z = -3x_1 - 2x_2$$
s. t.
$$3x_1 + 4x_2 \le 5$$
$$2x_1 + x_2 \ge 2$$
$$-x_1 + x_2 \ge 1$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

٤-٨ حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\min \quad x_1 + 2x_2$$
s. t.

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20$$
$$2x_1 - x_2 - x_4 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

٤-٩ باستخدام طريقة المرحلتين استخدم المرحلة الأول لاثبات أن البرنامج التالي ليس له حل مسموح به:

$$\min \quad z = -3x_1 - 2x_2$$
s. t.
$$3x_1 + 4x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

٤-١٠ حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$\min \quad 3x_1 + x_2$$
s. t.
$$3x_1 + 4x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1 - x_2 \leq -1$$
$$-x_1 - x_2 \leq -3$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

٤-١١ حل البرنامج التالي بطريقة المرحلتين:

$$-30x_1 + 40x_2 \min$$
s. t.
$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

٤-١٢ أوجد الشرط اللازم والكافي لكل من t, s كي يكون للبرنامج الخطي الآتي:

$$\min \quad -x_1 - x_2$$
s. t.

$$sx_1 + tx_2 \le 1$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

حلاً أمثلياً.

٤-١٣ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي ثم حلها:

$$\max \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
s. t.
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_3 = 1$$
$$x_2, x_3 \ge 0$$

٤-١٤ حل بطريقة السمبلكس البرنامج التالي مستخدما قاعدة بلاند Bland's rule :

$$\min \quad z = -2x_1 + 3x_2 - 4x_3$$
s. t.
$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 15$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 \le 10$$
$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$$

٤-١٥ أشرح باختصار طريقة السمبلكس المحسنة (r.s.m.).

٤-١٦ استخدم (r.s.m.) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\min \quad -2x_2$$
s. t.
$$x_1 + 2x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

٤-١٧ استخدم خوارزمية السمبلكس المحسنة (r.s.m.) لإيجاد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\max \quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
s. t.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = 1,2,3$$

٤-١٨ باستخدام طريقة السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_2 + x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4 \\ & x_1 + x_2 + x_3 \leq 9 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

٤-١٩ باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 4 \\ & 2x_1 + 3x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 7 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

٤-٢٠ باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\begin{aligned} \min \quad & -2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.} \quad & \end{aligned}$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -4$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 9$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 \leq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

٤-٢١ باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$\max \quad 2x_1 + x_2$$
$$\text{s. t.}$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 3$$
$$x_1 + 5x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$4x_1 + x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

٤-٢٢ باستخدام خوارزمية السمبلكس المحسنة أوجد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الآتية:

$$5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4 \max$$
$$\text{s. t.}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

٤-٢٣ حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس المحسنة:

x_4	1	2	-1	1	0	0	4
x_5	1	1	1	0	1	0	6
x_6	2	0	1	0	0	1	8
	2	-1	1	0	0	0	0

٤-٢٤ الجدول الإبتدائي والحالي لبرنامج خطي هما على الترتيب:

x_4	2	c	d	1	0	6
x_5	-1	3	e	0	1	1
	a	1	-2	0	0	0

x	g	2	-1	0.5	m	f
x	h	i	1	0.5	1	p
	n	q	j	k	b	9

أوجد جميع المجاهيل من a الى q. (مساعدة: إستخدم $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \mathbf{x_B}$ ، $\mathbf{c_B^T B^{-1} b} = z$ ، $\mathbf{r_N} = \mathbf{c_N} - \mathbf{c_B^T B^{-1} N}$ ، $\mathbf{B^{-1} N} = \mathbf{N}^*$)

٤-٢٥ باستخدم طريقة السمبلكس المحسنة (r.s.m.) للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \le 7 \\
& 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \le 3 \\
& x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 8 \\
& \mathbf{x} \ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

أوجد $\mathbf{d}^{(3)}$ (أي حل البرنامج الى بداية الدورة الثالثة).