الباب الرابع

طريقه السمبلكس

Simplex Method

٤ ـ ١ مقدمة Introduction

سندرس في هذا الباب طريقة السمبلكس بشكل مفصل، حيث سندرس في البداية بعض المفاهيم الأساسية التي تمهد لطريقة السمبلكس مع بعض النظريات المتعلقة بها. ثم ندرس في الفصل الثالث من هذا الباب كيفية بناء خوارزمية السمبلكس وكيفية اختيار المتجه الداخل والخارج والعمليات المحورية ثم نعطي عدة أمثلة لبرامج خطية، إما أن تكون دالة الهدف فيها غير محدودة أو أن يكون الحل فيها غير وحيد. ثم ندرس في الفصل الرابع حالة البرنامج غير المنتظم وكيف نتخلص من هذه المشكلة باستخدام قاعدة بلاند. وفي

الفصل الخامس ندرس طريقة حل البرنامج الخطي بالمرحلتين وهذه الطريقة نستخدمها عندما لا يكون للبرنامج الخطي حل ابتدائي واضح، حيث نستخدم المرحلة الأول لإيجاد الحل الابتدائي. ثم نشرح في الفصل السادس طريقة السمبلكس المحسنة وهذه الطريقة تقوم بترتيب عمليات السمبلكس بشكل يتجنب حساب وتخزين المعلومات غير الضرورية.

٤-٢ مفاهيم أساسيه Basic concepts

سندرس في هذا الفصل الحل الأساسي المسموح به، وسنرى كيف أن كل حل أساسي مسموح به تقابله نقطة حدية من المنطقة المسموح بها كما سنوضح ذلك بمثال.

ليكن لدينا نظام المعادلات

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{4.1}$$

حيث $\mathbf{x}$ متجه له n مركبه و $\mathbf{b}$ متجه له m مركبه و $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m \times n$ $(m < n)$. ولنفرض أن رتبة $\mathbf{A}$ = رتبة $(\mathbf{A},\mathbf{b}) = m$ وأن المتجهات الـ m الأولى من المصفوفة $\mathbf{A}$ هي متجهات مستقلة خطيا.

إن طريقة السمبلكس تعتمد في حلها لمسألة البرنامج الخطي على توليد متوالية من الحلول المسموح بها والتي تنتهي عند الحل الأمثل. إن منطقة الحل تحوي عددا من النقاط الحدية، والحل عند كل دورة Iteration هو عبارة عن نقطة حدية (النقاط الحدية هي عبارة عن أركان منطقة الحل المسموح به) وبالتالي فإن $n-m$ من المتغيرات تأخذ قيما صفرية وتدعى المتغيرات غير الأساسية Nonbasic variables والمتغيرات الـ m الباقية لها قيم غير سالبه و تدعى المتغيرات الأساسية Basic variables. طريقة السمبلكس تعمل على تغيير منتظم متبادل بين المتغيرات الأساسية وغير الأساسية كي نصل إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطي المعطى.

يتم التوصل للحل الأمثل بعدد محدود من الخطوات بحيث تتناقص قيمة دالة الهدف في كل خطوة عن الخطوة التي سبقتها.

نجزئ المصفوفة $\mathbf{A}$ على الشكل

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B}, \mathbf{N}]$$

حيث $\mathbf{B}$، المصفوفة الأساسية، هي من النوع $m \times m$ و $\mathbf{N}$، المصفوفة غير الأساسية، هي من النوع $m \times (n-m)$. بالتالي يكون لنظام المعادلات $\mathbf{B}\mathbf{x_B} = \mathbf{b}$ حل وحيد حيث $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N})$ و $\mathbf{x_B}$ له m مركبه ويكون المتجه $\mathbf{x} = (\mathbf{x_B}, \mathbf{0})$ حلا للنظام $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

نعطي الآن تعريفا للحل الأساسي المسموح به Basic feasible solution موضحين المتغيرات الأساسية وغير الأساسية:

تعريف ٤- ٢-١

يدعى المتجه $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x_B}, \mathbf{x_N}\right)$ حيث $\mathbf{x_N} = \mathbf{0},\ \ \mathbf{x_B} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ حلا أساسيا بالنسبة لنظام المعادلات (4.1).

وإذا كان $\mathbf{x_B} \geq 0$ فإن $\mathbf{x}$ يدعى حينئذ حلا اسياسيا مسموحا به. أما مركبات المتجه $\mathbf{x_B}$ تدعى المتغيرات الأساسية أما مركبات المتجه $\mathbf{x_N}$ فتدعى المتغيرات غير الأساسية. إذا كان أحد مركبات المتجه $\mathbf{x_B}$ مساويا الصفر فإننا ندعو $\mathbf{x}$ حينئذ حلا غير نظامي.

إن فكرة الحل الأساسي المسموح به موضحة في المثال التالي:

مثال ٤-٢-٢

لتكن لدينا المنطقة المضلعة المعرفة بالمتباينات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\leq 2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

إن هذه المتباينات بعد إدخال المتغيرين الإضافيين x_3 و x_4 تتحول إلى نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1, x_2, x_1, x_4 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

لاحظ أن مصفوفة القيود هي:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

من خلال التعريف ٤-٢-١ نود التعرف على الامكانات المختلفة للمصفوفات الأساسية والحلول الأساسية المقابلة لها:

١. $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$

٢. $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4]$

٣. $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$

٤. $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$

٥. $\mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4]$

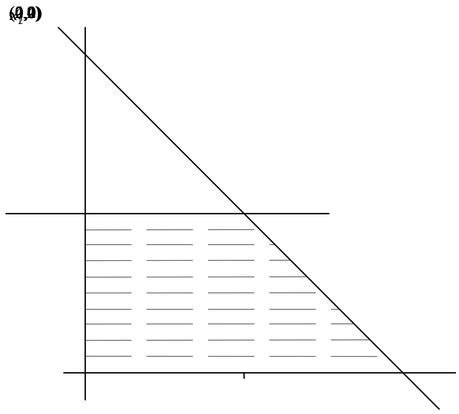
لاحظ أن الحلول التي حصلنا عليها، ماعدا الحل الرابع، هي حلول أساسيه مسموح بها أما الحل الرابع فهو أساسي ولكنه غير مسموح به. إذن فالحلول الأساسية المسموح بها بالنسبة لنظام المعادلات السابق هي:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad (4.3)$$

هذه النقاط تنتمي إلى الفضاء $\Re^4$. وعندما نستبعد المتغيرات الاضافية، أي عند إسقاط الحل الأساسي المسموح به على الفضاء $\Re^2$ نحصل على النقاط الأربع الآتية في المستوى:

$$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

وهي تمثل النقاط الحدية للمنطقة المحدبة المحددة بالمتباينات (4.2) والموضحة في الشكل التالي:



هذه النقاط هي النقاط الحدية لمنطقة الحل المسموح به، هذا وقد سبق لنا أن ذكرنا في الباب السابق أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي إنما يقع عند إحدى النقاط الحدية هذه.
من الواضح في هذا المثال أن عدد الحلول الأساسية المسموح بها المحتملة محدوده بعدد الطرق التي نختار فيها العمودين المستقلين خطيا من الأعمدة الأربعة في المصفوفة **A**. وبالتالي فإن عدد الحلول الأساسية المسموح بها أقل من أو تساوي

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

ونستبعد من هذه الامكانات الست واحدا ذلك لأنه غير مسموح به. ثم إن العمودين $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3$ لم يستخدما لتوليد مصفوفة أساسية ذلك لأنهما مرتبطان خطيا. وبالتالي فإننا نحصل على أربعة حلول أساسية مسموح بها. وبشكل عام فإن عدد الحلول الأساسية المسموح بها أقل من أو تساوي

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \qquad (4.4)$$

هنا طريقة أخرى لرؤية الحلول الأساسية والحلول الأساسية المسموح بها، إن كل قيد من قيود البرنامج الخطي من الممكن أن يرافق متغير محدد. فالقيد $x_1 \geq 0$ من الممكن أن يرافق x_1، و المستقيم $x_1 = 0$ هو حد نصف الفضاء المقابل لـ $x_1 \geq 0$. أيضا $x_1 + x_2 \leq 4$ من الممكن أن يرافق x_3، و المستقيم $x_1 + x_2 - 4 = x_3 = 0$ هو حد نصف الفضاء المقابل لـ $x_1 + x_2 \leq 4$. الشكل السابق يبين أنصاف الفضاءات الأربع، إن تقاطع كل مستقيمين يمثل حلاً أساسياً، أما المستقيمات فتمثل حلولاً غير أساسية. من الشكل يتضح أن هناك خمس تقاطعات تمثل خمسة حلول أساسية، لاحظ أن المستقيمين $x_4 = 0$ و $x_2 = 0$ متوازيان أي انه لا يوجد نقطة تقاطع بينهما وبالتالي لا يوجد حل أساسي مقابل لهذين المتغيرين. وبعد تحديد منطقة الحل المسموح به نستطيع التفريق بين الحلول الأساسية والحلول الأساسية المسموح بها.

في المثال التالي نبين فكرة الحل غير النظامي Degenerate solution

مثال ٤-٢-٣

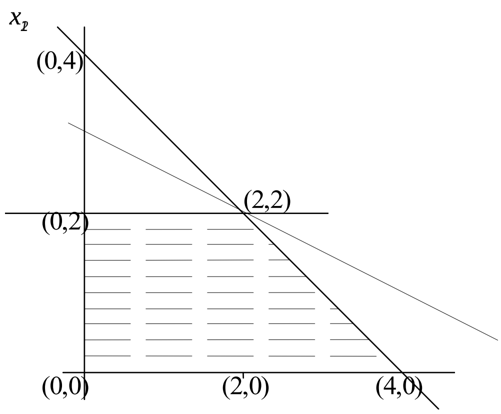
لتكن لدينا المنطقة المضلعة المعرفة بالمتباينات الآتية:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_2 &\le 2 \\ x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن هذه المتباينات بعد إدخال المتغيرات الإضافية x_3 ، x_4 و x_5 تتحول إلى نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 &= 6 \\ x_1, x_2, x_1, x_4, x_5 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن النظام السابق موضح في الشكل التالي، أن منطقة الحل المسموح بها هي نفس منطقة الحل في المثال ٤-٢-٢ السابق. وذلك لأن القيد $x_1 + 2x_2 \le 6$ الجديد زائد.



أن مصفوفة القيود هي:

$$\ddot{o}\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نحصل على الحل الأساسي المسموح به التالي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$:

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن الحل الأساسي المسموح به السابق غير نظامي وذلك لأن $x_3 = 0$.
بشكل مشابه نحصل على الحل الأساسي المسموح به التالي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4]$

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إن هذا الحل الأساسي المسموح به هو نفس الحل الأساسي المسموح به السابق عندما كانت $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$، كذلك لو بحثنا عن الحل الأساسي المسموح به المقابل للمصفوفة $\mathbf{B} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5]$ لحصلنا على

$$\mathbf{x_B} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x_N} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أن جميع الحلول الثلاثة السابقة وإن كانت مصفوفتها الأساسية مختلفة إلا أنها ممثلة بالنقطة الحدية $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2,2,0,0,0)$ إن هذه الحلول الثلاثة

الأساسية المسموح بها غير النظامية Degenerate تحتوي على متغير أساسي مساوٍ للصفر.
إن هذا المثال والمثال السابق أظهرا بشكل جلي الارتباط الوثيق بين الحلول الأساسية المسموح بها بالنسبة لنظام المعادلات وبين النقاط الحدية للمنطقة المحدبة المحددة بالمتباينات. نبرهن فيما يلي أن مجموعة النقاط الحدية مكافئ لمجموعة الحلول الأساسية المسموح بها

نظرية ٤-٢-٤
لتكن $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m\times n$ رتبتها تساوي m. ولتكن K المجموعة المحدبة المكونة من المتجهات $\mathbf{x}$ التي تحقق الشروط الآتية:

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b},\qquad \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \tag{4.5}$$

تكون النقطة $\mathbf{x}$ حدية بالنسبة للمجموعة المحدبة K إذا وإذا فقط كانت $\mathbf{x}$ حلا أساسيا مسموحا به.

البرهان:
ليكن $\mathbf{x}=\left(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0\right)$ حلا أساسيا مسموحا به لنظام (4.5) عندئذ يتحقق ما يلي:

$$x_1\mathbf{a}_1+x_2\mathbf{a}_2+\cdots+x_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}$$

حيث أن $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\ldots,\mathbf{a}_m$ (المتجهات الأول من المصفوفة $\mathbf{A}$) مستقلة خطيا.
لنفرض جدلا أن النقطة $\mathbf{x}$ ليست نقطه حدية، إذن يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}+\left(1-\lambda\right)\mathbf{z}\qquad 0<\lambda<1\qquad \mathbf{y},\mathbf{z}\in K\qquad \mathbf{y}\neq\mathbf{z}$$

بما أن $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ حلول مسموح بها، فبالتالي جميع مركبات تلك المتجهات غير سالبه، وبما أن $0<\lambda<1$ لذا فالمركبات الأخيرة للمتجهين $\mathbf{y},\mathbf{z}$ (والتي عددها يساوي $n-m$) تساوي الصفر. وعلى هذا فإن:

$$y_1\mathbf{a}_1+y_2\mathbf{a}_2+\cdots+y_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}$$
$$z_1\mathbf{a}_1+z_2\mathbf{a}_2+\cdots+z_m\mathbf{a}_m=\mathbf{b}$$

إذن

$$\left(y_1-z_1\right)\mathbf{a}_1+\left(y_2-z_2\right)\mathbf{a}_2+\cdots+\left(y_m-z_m\right)\mathbf{a}_m=\mathbf{0}$$

بما أن المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ مستقلة خطيا، إذن
$$y_i - z_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, m$$
وبالتالي فإن $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{z}$ وهنا يظهر التناقض، وعلى هذا فإن $\mathbf{x}$ نقطه حدية للمجموعة المحدبة K.
وبالعكس نفترض أن النقطة $\mathbf{x}$ نقطه حدية للمجموعة المحدبة K. سنبين الآن أنها حل أساسي مسموح به للنظام (4.5).
لنفترض أن المركبات غير الصفرية للمتجه $\mathbf{x}$ هي $x_1, x_2, \ldots, x_k$ إذن

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_k\mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \quad x_i > 0 \quad i = 1, \ldots, k \tag{4.6}$$
لكي نبين أن $\mathbf{x}$ حل أساسي مسموح به، علينا أن نثبت أن المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ مستقلة خطيا. لو كانت المتجهات مرتبطة خطيا لتحققت العلاقة الآتية:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0} \tag{4.7}$$

دون أن تكون جميع قيم الـ y_i صفرية. لنعرف المتجه $\mathbf{y}$ كما يلي

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k, 0, \ldots, 0)$$

بما أن $1 \le i \le k \quad x_i > 0$ إذن يمكن اختيار $\varepsilon > 0$ بحيث أن:
$$\mathbf{x} + \varepsilon\, \mathbf{y} \ge 0, \qquad \mathbf{x} - \varepsilon\, \mathbf{y} \ge 0$$
من (4.6) و (4.7) نحصل على

$$(x_1 - \varepsilon\, y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 - \varepsilon\, y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_k - \varepsilon\, y_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$
$$(x_1 + \varepsilon\, y_1)\mathbf{a}_1 + (x_2 + \varepsilon\, y_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_k + \varepsilon\, y_k)\mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

إذن $\mathbf{x} + \varepsilon\, \mathbf{y} \in K, \quad \mathbf{x} - \varepsilon\, \mathbf{y} \in K$ ولكن

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} - \varepsilon\ \mathbf{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x} + \varepsilon\ \mathbf{y}\right)$$

لذا فقد أمكن كتابة $\mathbf{x}$ على نحو يتعارض مع تعريف النقطة الحدية للمجموعة المحدبة K. وهذا يناقض الفرض، وبالتالي فإن $\mathbf{x}$ حل أساسي مسموح به للنظام (4.5). وبهذا ينتهي برهان النظرية.

□

لاحظ أن كل حل أساسي مسموح به يكافئ نقطة حدية، ولكن قد يوجد أكثر من حل أساسي مسموح به مقابل لنفس النقطة الحدية، وهذه الحالة تحدث عند وجود حلول غير منتظمة كما شاهدناها في المثال ٤-٢-٣.
لاحظنا من خلال الدراسة السابقة أن الحل الأمثل للبرنامج الخطي إنما يقع عند نقطة حدية للمنطقة المحدبة المحدودة بالمتباينات. كما بينت النظرية الأخيرة التقابل ببين النقط الحدية للمنطقة المحدبة وبين الحلول الأساسية لنظام المعادلات. نستدل من ذلك على أن البحث عن الحل الأمثل للبرنامج الخطي ينبغي أن يتم من خلال الحلول الأساسية لنظام المعادلات التابع للبرنامج الخطي. النظرية التالية تبين أن المنطقة المضلعة K المبينة في (4.5) لابد أن تحوي على الأقل حلا أساسيا مسموحا به واحدا وذلك إذا كانت غير خالية.

نظريه ٤-٢-٥

لدينا المنطقة المضلعة الآتية:

$$K = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}$$

حيث $\mathbf{A}$ مصفوفة من النوع $m \times n$ رتبتها تساوي m.

١. إذا كان للبرنامج الخطي حل مسموح به فهناك أيضا حل أساسي مسموح به.

٢. إذا كان للبرنامج الخطي حل امثلي مسموح به فهناك أيضا حل امثلي أساسي مسموح به.

البرهان:

١. لتكن $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ هي أعمدة المصفوفة $\mathbf{A}$ وليكن $\mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ حلا مسموحاً به. إن هذا الحل يحقق النظام الآتي:

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

لنفرض أن عدد المتغيرات الموجبة في الحل المسموح به يساوي p وأن هذه المتغيرات هي $x_1, x_2, \ldots, x_p$ إذن

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b} \tag{4.8}$$

فيكون لدينا الحالتان التاليتان:

الحالة الأولى: المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ مستقلة خطيا.

إذا كانت $p = m$ فإن الحل يكون أساسيا. أما إذا كانت $p < m$ فعندئذ يمكن أن نجد $m - p$ متجها من المتجهات المتبقية بحيث يصبح لدينا m متجها مستقلا. نعطي المتغيرات المقابلة لهذه المتجهات قيما صفرية فنحصل بذلك على حل أساسي مسموح به غير نظامي.

الحالة الثانية: المتجهات $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p$ مرتبطة خطيا.

في هذه الحالة توجد أعداد $y_1, y_2, \ldots, y_p$ أحدها على الأقل موجب بحيث أن:

$$y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0} \tag{4.9}$$

من المعادلتين (4.8) و (4.9) نحصل على:

$$\left(x_1 - \varepsilon\, y_1\right)\mathbf{a}_1 + \left(x_2 - \varepsilon\, y_2\right)\mathbf{a}_1 + \cdots + \left(x_p - \varepsilon\, y_p\right)\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$$

بما أن أحد قيم y_i موجب لذا فإن أحد هذه الأقواس على الأقل سيتناقض مع تزايد قيمة ε. وبإمكاننا زيادة قيمة ε بحيث يصبح أحد هذه الأقواس مساويا الصفر، فإذا اخترنا

$$\varepsilon = \min\left\{\frac{x_i}{y_i}, \quad y_i > 0\right\}$$

فإن $\mathbf{x}-\varepsilon\,\mathbf{y}$ يكون حلا مسموحا به وعدد متغيراته $p-1$ على الأكثر. نكرر ما سبق إلى أن نحصل على حل مسموح به تكون المتجهات المقابلة له مستقلة خطيا، وبذا نعود للحالة الأولى.

٢. يتم برهان الجزء الثاني من النظرية بشكل مشابه للجزء الأول.

□

٤-٣ خوارزمية السمبلكس Simplex algorithm

لنفرض أن البرنامج الخطي مصاغ بالشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.10}$$

من الواضح أنه يمكننا إيجاد جميع حلول النظام $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ ثم إهمال تلك الحلول التي لا تحقق الشرط $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ ، وتعويض الحلول المتبقية في دالة الهدف ومن ثم اختيار الحل الأمثل الذي يعطينا القيمة الصغرى. إلا أن عدد الحلول الممكنة كما هو واضح من الصيغة (4.4) هو عدد كبير حتى لأرقام صغيره. فعلى سبيل المثال إذا كان $m=10,\ \ n=20$ فإن: $\binom{20}{10}=184756$ وهذا يظهر جليا عدم فعالية هذه الطريقة لحل المسائل العملية. إن حل المسألة (4.10) حلا عمليا يتم باستخدام طريقة السمبلكس و التي تبدأ بحل أساسي مسموح به ثم نعمل على إيجاد حل أساسي آخر مسموح به تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل من قيمتها عند الحل السابق. بمعنى إنها تقوم بالانتقال من حل إلى آخر محافظه على الشرط $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ وبحيث نجعل قيمة دالة الهدف تتناقص حتى تصل إلى قيمتها الصغرى.

نفترض مبدئيا أن هناك حلا أساسيا ابتدائيا مسموحا به (سنوضح فيما بعد كيفية الحصول على هذا الحل). وسنقوم فيما يلي بشرح للخطوات التي تؤدي للحل الأمثل.

خوارزمية ٤-٣-١ (خوارزمية السمبلكس)

أولا: اختيار المتغير الداخل إلى الأساس:

سنوضح فيما يلي كيفية التحكم في اختيار المتجه الداخل إلى الأساس والذي سينقلنا من حل أساسي مسموح به إلى حل أساسي آخر مسموح به تكون عنده قيمة دالة الهدف أقل من قيمتها عند الحل السابق.

لنرمز لمصفوفة المتجهات الـ m الأولى من المصفوفة $\mathbf{A}$ بالرمز $\mathbf{B}$ (المصفوفة الأساسية) ولمصفوفة باقي المتجهات بالرمز $\mathbf{N}$ أي أن $\mathbf{A}=[\mathbf{B},\mathbf{N}]$ وليرمز $\mathbf{x_B}$ لمتجه المتغيرات الأساسية و $\mathbf{x_N}$ لمتجه المتغيرات غير الأساسية و $\mathbf{c_B}$ لمتجه المعاملات التابعة للمتغيرات الأساسية و $\mathbf{c_N}$ لمتجه المعاملات التابعة للمتغيرات غير الأساسية. وبناء على ذلك فإن المسألة (4.10) تصاغ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c_B}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_B}+\mathbf{c_N}^{\mathbf{T}}\mathbf{x_N} \\ \text{s. t.} \quad & \\ & \mathbf{Bx_B}+\mathbf{Nx_N}=\mathbf{b} \\ & \mathbf{x_B},\mathbf{x_N}\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{4.11}$$

إن الحل الأساسي المقابل للمصفوفة $\mathbf{B}$، والذي نفترض أنه مسموح به، نحصل عليه بجعل $\mathbf{x_N}=\mathbf{0}$ ومن ثم نحل نظام المعادلات $\mathbf{Bx_B}=\mathbf{b}$ أي أن $\mathbf{x_B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$. إن قيمة دالة الهدف بالنسبة لهذا الحل الأساسي هي:

$$z_o=\mathbf{c}_\mathbf{B}^T\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$$

نحصل على صياغة عامه للمتجه $\mathbf{x_B}$ من خلال الشرط الأول للمعادلة (4.11) كما يلي:

$$\mathbf{x_B}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}$$

بتعويض ذلك في دالة الهدف نجد:

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\left(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Nx_N}\right)+\mathbf{c}_\mathbf{N}^\mathbf{T}\mathbf{x_N} \\ z &= \mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}+\left(\mathbf{c}_\mathbf{N}^\mathbf{T}-\mathbf{c}_\mathbf{B}^\mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)\mathbf{x_N} \\ z &= z_o+\sum_{j\in\Re} r_j x_j \end{aligned} \tag{4.12}$$

حيث ترمز $\Re$ لمجموعة أدلة المتغيرات غير الأساسية و $r_j = c_j - u_j$ حيث $u_j = \left(\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N}\right)_j = \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^T \mathbf{B}^{-1} a_j$ وبالنظر إلى المعادلة الأخيرة من (4.12) فإننا نجد أن قيمة z تعطى بدلالة المتغيرات غير الأساسية، وإن عناصر الصف الممثل لها (وهو الأخير في الجدول) ما هي إلا $r_j = c_j - z_j$. وإذا كانت $\mathbf{B}$ هي المصفوفة الأساسية فان الجدول المقابل لها هو:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{I} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{N}} = \mathbf{c}_{\mathbf{N}}^T - \mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{N} & \mathbf{0} & -\mathbf{c}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{T}}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

إن المعادلة (4.12) ترشدنا إلى طريقه تحسين الحل الأساسي الأول المسموح به. نختار المتجه $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ المقابل للمتغير غير الأساسي x_k بحيث تكون قيمة المقدار r_k سالبه ثم نحاول إدخال $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ إلى المصفوفة الأساسية بجعل قيمة x_k تتزايد (تصبح موجبة) مع الإبقاء على بقية المتغيرات غير الأساسية مساويه الصفر فتتناقص قيمة دالة الهدف z عن قيمتها الأصلية لتصبح:

$$z = z_{\text{o}} + r_k x_k$$

نظرية ٤-٣-٢ شرط الأمثلية Optimality Condition

إذا كان $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الناتج هو حل أمثلي، أي أن قيمة دالة الهدف عند أي حل آخر مسموح به ستكون أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند ذلك الحل.

البرهان: بما أن أي حل مسموح به سيحقق الشرط $x_i \geq 0$ وبما أن الفرض ينص على أن $r_j \geq 0$ عند حل ما z^* لذا فإننا نستنتج من العلاقة (4.12) أن:

$$z - z^* \geq 0$$

أي أن الحل $\mathbf{x}^*$ الذي يتحقق من أجله $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية هو حل أمثلي.

□

نظرية ٤-٣-٣ وحدانية الحل الأمثل:

إذا كان $r_j > 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية فإن الحل الأمثل يكون حينئذ وحيدا.
أما إذا كان $r_j \geq 0$ لكل المتغيرات غير الأساسية وكان $r_k = 0$ لأحد هذه المتغيرات، فإن جميع القيم المسموح بها لـ x_k سوف تؤدي إلى عدد لانهائي من الحلول الأمثلية.
ثانيا: اختيار المتجه الخارج من الأساس:
نفترض أنه لدينا حل أساسي منتظم بمعنى أن المتغيرات الأساسية جميعها موجبة $x_i > 0, \; i = 1,\ldots,m$. إذا كان المتجه $\mathbf{a_k}$ حيث $k > m$ هو المتجه الذي سيدخل الى الأساس فكيف يمكن اختيار المتجه الخارج من الأساس الذي سيحل محله بحيث نحصل على حل أساسي جديد يحقق $\mathbf{x} \geq 0$.
بما أن المتجهات الـ m الأولى هي المتجهات الأساسية (مستقلة خطيا) فإن المتجهات $\mathbf{a}_k : k = m+1,\ldots,n$ يمكن جعلها كتركيب خطي من باقي المتجهات أي إن:

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \cdots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_1 y_{1k} + \mathbf{a}_2 y_{2k} + \cdots + \mathbf{a}_m y_{mk}$$

بضرب العلاقة الثانية بـ $\delta \geq 0$ وطرح الناتج من العلاقة الأولى نحصل على:

$$(x_1 - \delta y_{1k})\mathbf{a}_1 + (x_2 - \delta y_{2k})\mathbf{a}_2 + \cdots + (x_m - \delta y_{mk})\mathbf{a}_m + \delta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}$$

إذا جعلنا قيمه δ تتزايد من الصفر تدريجيا فإن معامل $\mathbf{a}_k$ يأخذ في الزيادة، وبفرض أن $\mathbf{a}_s$ سيخرج من الأساس وسيحل محله $\mathbf{a}_k$، فإن اختيار δ على النحو التالي:

$$\delta = \min_i \left\{ \frac{x_i}{y_{ik}}, y_{ik} > 0 \right\} = \frac{x_s}{y_{sk}} \qquad (4.13)$$

سوف يجعل أحد المعاملات ينعدم ونحصل على حل أساسي مسموح به جديد.
إذا كان هناك اكثر من دليل i يؤدي إلى قيمة واحدة لـ δ فإن ذلك يعني أن الحل الجديد غير منتظم.

وإذا لم تكن هناك قيمه موجبة لأي من y_{ik} فإن ذلك يعني أن ليس هناك من حل أساسي مسموح به محدود، بمعنى أن دالة الهدف تصل في هذه الحالة إلى قيمة غير محدودة.

ثالثا: العلاقات المحورية

بما أن مجموعة المعادلات $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ مستقلة خطيا، لذا يمكننا باستخدام العمليات الأولية على المصفوفات كتابة هذه المجموعة من المعادلات على الشكل الآتي:

$$\begin{array}{lllll} y_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{1,n}x_n & +x_1 & & & = y_{1,0} \\ y_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{2,n}x_n & & +x_2 & & = y_{2,0} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ y_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{m,n}x_n & & & +x_m & = y_{m,0} \end{array} \qquad (4.14)$$

المتغيرات الأساسية هي $x_1, x_2, \ldots, x_m$ أما المتغيرات غير الأساسية فهي $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ وبالتالي:

يمكن كتابة المعادلات السابقة على الشكل الجدولي الآتي:

$$\begin{array}{ccccccccc} y_{1,m+1} & \cdots & y_{1,n} & 1 & 0 & \cdots & 0 & & y_{1,0} \\ y_{2,m+1} & \cdots & y_{2,n} & 0 & 1 & \cdots & 0 & & y_{2,0} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{m,m+1} & \cdots & y_{m,n} & 0 & 0 & \cdots & 1 & & y_{m,0} \end{array}$$

بافتراض أن أحد المتغيرات الأساسية سوف يصبح متغيرا غير أساسي وسيحل محل متغير غير أساسي, ما هي التغيرات التي يجب إجراؤها على الشكل القياسي حينئذ؟

بما أن المتجهات الأولى التي عددها m هي التي تكون الأساس لذا فإن أي متجه آخر يمكن كتابته على شكل تركيب خطي من هذه المتجهات: