الباب الثالث

هندسة وجبر البرمجة الخطية والصياغة القياسية

Geometry, Algebra and Standard Form of Linear Programming

٣-١ مقدمة Introduction

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية، ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي. ولذلك سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأمثل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية. سندرس في هذا الباب بعض أساسيات التحليل المحدب وطريقة حل البرنامج الخطي هندسيا. ومن ثم سنعطي فكرة عن الحل الهندسي وننتقل إلى الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

٣-٢ المجموعات المحدبة Convex sets

تعريف ٣-٢-١

تدعى المجموعة الجزئية $C \subset \Re^n$ محدبة إذا تحقق مايلي:

$$\forall\ \lambda \in [0,1] \quad \forall\ x_1, x_2 \in C \text{ فإن } \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$$

لاحظ أن $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين x_1, x_2 . وبالتالي فإن تحدب C يعني هندسياً بأنه لأي نقطتين x_1, x_2 في C فإن القطعة المستقيمة الواصله بين هاتين النقطتي تنتمي إلى C . إن المجموعة $\{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\}$ هي مجموعه محدبة وكذلك $\{\mathbf{x}: \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ هي مجموعه محدبة. إذا كانت $K_1, K_2, \ldots, K_r$ مجموعات محدبة في $\Re^n$ عندئذ تكون المجموعة الآتية:

$K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_r$.

أيضا محدبة. المستوى H في $\Re^n$ هو مجموعة محدبة.

٣-٣ المستوى الفوقي ونصف الفضاء Hyperplane and halfspace

إن المستوى الفوقي في $\Re^n$ هو تعميم لفكرة الخط المستقيم في $\Re^2$ وكذلك لفكرة المستوي في $\Re^3$.

تعريف ٣-٣-١

المستوى الفوقي H في $\Re^n$ هو مجموعة لها الشكل التالي:

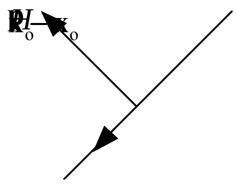
$$H = \{\mathbf{x}: \mathbf{p}^T\mathbf{x} = k\} \tag{3.1}$$

بحيث أن $\mathbf{p}$ هو متجه غير صفري في $\Re^n$ و k عدد ثابت.

إن المتجه $\mathbf{p}$ عمودي على H.

لتكن $\mathbf{x}_o \in H$ وبالتالي $\mathbf{p}^T\mathbf{x}_o = k$ وبما أن لكل $\mathbf{x} \in H$ يكون $\mathbf{p}^T\mathbf{x} = k$ لذا بطرح المعادلتين نحصل على $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = 0$. أي أنه يمكن تمثيل المستوى الفوقي H بمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة $\mathbf{p}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o) = 0$ بحيث أن $\mathbf{x}_o$ هي أي نقطه ثابتة في H. إن فوق المستوى مجموعة محدبة. الشكل

التالي يوضح المستوى الفوقي والمتجه $\mathbf{p}$ مع ملاحظة أن $\mathbf{p}$ عمودي على $\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\text{o}}$ لجميع $\mathbf{x}\in H$.



إن المستوى الفوقي H يقسم $\Re^n$ إلى منطقتين تسمى كل واحدة منهما نصف فضاء وبالتالي فإن نصف الفضاء هو عبارة عن مجموعة النقاط التي على الشكل التالي:

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T\mathbf{x}\geq k\right\}$$

أيضا من الممكن تمثيل نصف الفضاء بالمجموعة التالية:

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T\mathbf{x}\leq k\right\}$$

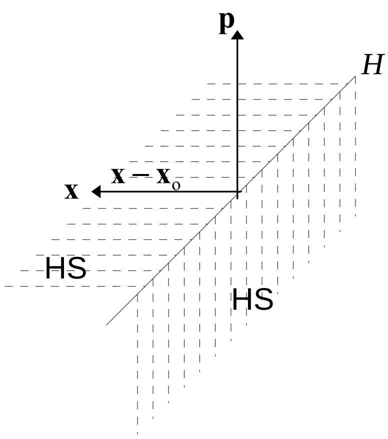
إن اتحاد المجموعتين السابقتين هو $\Re^n$ وبالرجوع إلى النقطة الثابتة $\mathbf{x}_{\text{o}}$ فإن نصف الفضاء يمكن أن يمثل بـ

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\text{o}}\right)\geq 0\right\}$$

أو

$$\left\{\mathbf{x}:\mathbf{p}^T\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}_{\text{o}}\right)\leq 0\right\}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



إن المستوى الفوقي وأنصاف الفضاءات هي مجموعات محدبة.

٣-٤ المخروطات المحدبة Convex cones

إن المخروطات المحدبة هي مجموعات خاصة ومهمة من المجموعات المحدبة.

تعريف ٣-٤-١

المخروط المحدب K هو مجموعة تحقق الخاصية التالية:

$$\lambda x \in K, \quad \forall x \in K \quad and \quad \forall \lambda \geq 0$$

من الملاحظ أن المخروطات المحدبة دائما تحوي نقطة المركز وذلك بجعل $\lambda = 0$ ، وكذلك إذا أعطينا أي نقطه $x \in K$ فإن نصف المستقيم λx ينتمي إلى K . وبالتالي فإن المخروط المحدب هو عبارة عن مجموعه محدبة تتكون بشكل كامل من أنصاف مستقيمات منبعثة من المركز.

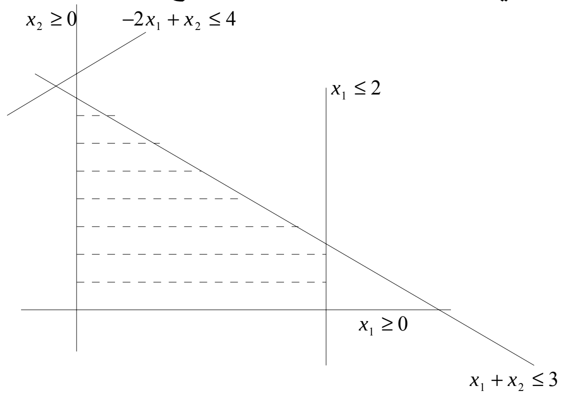
٣-٥ مخروط المنطقة المضلعة Polyhedral Cones

مجموعة المنطقة المضلعة هي عبارة عن تقاطع عدد منتهى من أنصاف الفضاءات، وبما أن أنصاف الفضاءات يمكن أن تمثل بواسطة متباينات من النوع $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i$ فإن المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بواسطة نظام متباينات من النوع $i = 1,\ldots,m$ $\mathbf{a}_i^T\mathbf{x} \le b_i$. وبالتالي فإن مجموعة المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بالمجموعة $\{\mathbf{x}: \mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$ حيث $\mathbf{A}$ هي مصفوفة $m\times n$، سنعطي الآن مثالا يوضح المنطقة المضلعة.

ليكن لدينا أنصاف الفضاءات التالية:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 &\le 4 \\
x_1 + x_2 &\le 3 \\
x_1 &\le 2 \\
x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

إن تقاطع الخمسة أنصاف فضاءات هذه يعطي المنطقة المخططة في الشكل التالي وهي منطقة مضلعة، من الواضح أنها منطقه محدبة.



٣-٦ النقاط الحدية Extreme points

مفهوم النقطة الحدية يلعب دورا رئيسا في نظرية البرمجة الخطية. في البداية نعطي التعريف التالي:

تعريف ٣-٦-١

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ نقاطا من مجموعة $C \subset \Re^n$. يقال إن النقطة x هي تركيب محدب من النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_m$ إذا أمكن كتابة x على النحو التالي:

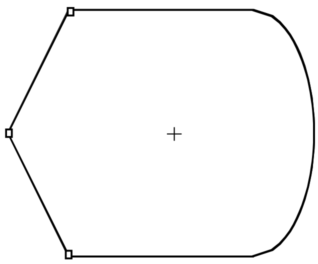
$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m \tag{3.2}$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ أعداد غير سالبه وتحقق الشرط التالي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \mathrm{L} + \lambda_m = 1$$

تعريف ٣-٦-٢

يقال إن النقطة x في مجموعة محدبة C نقطه حدية لـ C إذا كان $\lambda \in (0,1)$ وكان $x_1, x_2 \in C$ وتحقق الشرط التالي $x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ فإن $x = x_1 = x_2$.



▫ نقطة حدية

\+ نقطة غير حدية

الشكل أعلاه يوضح بعض النقاط الحدية في مجموعة محدبة.

نظرية ٣-٦-٣

إذا كانت K منطقه مضلعة محدودة وكانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ هي نقاطها الحدية. عندئذ يمكن كتابة أي نقطه $x \in K$ على شكل تركيب محدب من النقاط الحدية.

٣-٧ الحل الهندسي Geometric Solution

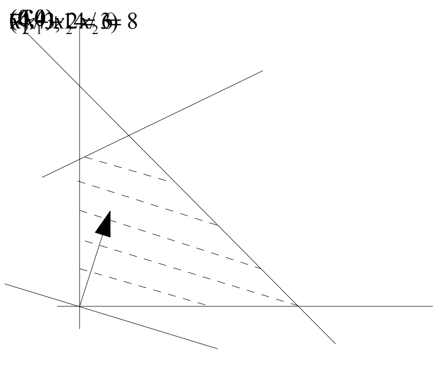
سنعالج في هذا الفصل حل البرامج الخطية البسيطة بطريقة هندسية وهذه الطريقة سوف تساعد على فهم البرنامج الخطي وطريقة حله. سنورد في البداية مثالا يوضح طريقة الرسم وسنشرح الخطوات التي يتم اتباعها.

مثال ٣-٧-١

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -x_1 - 3x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& x_1 + x_2 \le 6 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 8 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

في البداية نحدد منطقة الحلول المسموح بها Feasible solutions وهي تلك التي تحقق المتباينات أو شروط البرنامج الخطي. لتحديد منطقة الحلول المسموح بها نرسم تلك المتباينات فنحصل على الشكل التالي:



إن المنطقة هي منطقة الحلول المسموح بها Feasible solutions. إن الشرطين الأول والثاني يمثلان المنطقة الواقعة أسفل المستقيمين $x_1 + x_2 = 6$ و $-x_1 + 2x_2 = 8$ على الترتيب. لاحظ أن كل قيد من قيود البرنامج الخطي يمثل نصف فضاء. إن منطقة الحلول المسموح بها هي عبارة عن تقاطع أنصاف الفضاءات الممثلة لتلك المتباينات وهي منطقة مضلعة. إن

الحل الأمثل هو الحل الذي يحقق جميع شروط البرنامج الخطي (أي أنه حل مسموح به) تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل ما يمكن. للحصول على الحل الأمثل نرسم المستقيم الممثل لدالة الهدف ذات القيمة الصفرية (يمر بنقطة الأصل) ثم نأخذ مستقيمات موازية له تتحرك في اتجاه المتجه $-\mathbf{c}$ على ألا تغادر هذه المستقيمات المنطقة المسموح بها (إنظر المستقيمات المنقطة) فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل عند تقاطع المستقيمين الأول والثاني عند النقطة $(4/3,14/3)$ وهي أحدى النقاط الحدية الأربعة.

مثال ٣-٧-٢

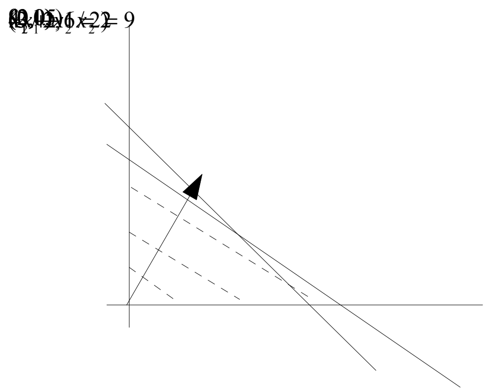
لدينا المنطقة المضلعة التالية:

$$x_1 + x_2 \le 2$$
$$4x_1 + 6x_2 \le 9$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

أوجد النقاط الحدية. ثم أوجد الحل الأمثل هندسيا علما أن دالة الهدف هي

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$ ،

إن الشكل الهندسي لهذا البرنامج الخطي يأخذ الشكل التالي:



إن المنطقة المضلعة هي المنطقة الواقعة بين المستقيمات الأربعة والمستقيم المتقطع يرمز إلى تزايد دالة الهدف ومن الواضح أنه موازي للمستقيم الممثل

بالشرط $4x_1 + 6x_2 \le 9$ وبالتالي فإن هناك عددا لانهائي من الحلول تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3/2, 1/2)$ و $(0, 1.5)$ ، لاحظ أن ميل المستقيم $4x_1 + 6x_2 = 9$ يساوي ميل دالة الهدف.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية:

نظرية ٣-٧-٣ (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\max \ (\text{or min}) \qquad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

s. t.

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} \begin{cases} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{cases} \tag{3.3}$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة.

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجودا عند نقطة حدية من هذه المنطقة.

البرهان: (مقصور على المنطقة المحدودة)

لنفترض أن $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$ هي النقاط الحدية للمنطقة المسموح بها K ولنفترض أن هذه النقاط قد رقمت بحيث أن:

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}_i) \le f(\mathbf{x}_m) \qquad i = 1, \ldots, m \tag{3.4}$$

علما أن f هي دالة الهدف للبرنامج الخطي. لنفترض أن $\mathbf{x} \in K$ نقطة اختيارية عندئذ يمكن كتابتها كتركيب محدب على النحو التالي:

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m \tag{3.5}$$

حيث a_i أعداد غير سالبه، $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$.

إن:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= f(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m) \\ &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \end{aligned} \tag{3.6}$$

وذلك لأن f دالة خطية وبما أن $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1$ إذا

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1) &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(\mathbf{x}_1) \\ &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_1) \\ &\le a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) = f(\mathbf{x}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

كما أن:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= a_1 f(\mathbf{x}_1) + a_2 f(\mathbf{x}_2) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \\ &\le a_1 f(\mathbf{x}_m) + a_2 f(\mathbf{x}_m) + \cdots + a_m f(\mathbf{x}_m) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) f(\mathbf{x}_m) = f(\mathbf{x}_m) \end{aligned} \tag{3.8}$$

وعلى هذا فإن:

$$f(\mathbf{x}_1) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_m) \tag{3.9}$$

لأية نقطه $\mathbf{x} \in K$ ، مما يعني أن دالة الهدف f تأخذ قيمتها العظمى عند النقطة الحدية $\mathbf{x}_m$ وتأخذ قيمتها الصغرى عند النقطة الحدية $\mathbf{x}_1$ وهذا يثبت النظرية.

□

لتطبيق هذه النظرية نأخذ المثال ٣-٧-٢. من الممكن الحصول على الحل الأمثل بعد الحصول على جميع النقاط الحدية في المنطقة المضلعة ومن ثم بتعويض هذه النقاط في دالة الهدف عن:

$$\begin{aligned} z_0 &= -1\times 0 - 3\times 0 = 0 \\ z_A &= -1\times 6 - 3\times 0 = -6 \\ z_B &= -1\times 4/3 - 3\times 14/3 = -46/3 \\ z_c &= -1\times 0 - 3\times 4 = -12 \end{aligned}$$

من الواضح أن النقطة B تعطي أقل قيمة لدالة الهدف. إن جميع الحلول المسموح بها تقع في منطقة محدبة في هذا المثال المنطقة محدودة وقد تكون

في بعض الحالات غير محدودة وقد يكون الحل في هذه الحالة غير نهائي، إن أي حل أمثلي لابد أن يكون عند أحد النقاط الحدية. في بعض الحالات قد يكون الحل الأمثل غير وحيد وذلك عندما يكون ميل دالة الهدف مساويا لميل أحد مستقيمات الشروط. أخيرا قد لا يوجد حل للبرنامج الخطي وذلك عندما تكون منطقة الحلول المسموح بها خاليه.
كذلك من الممكن تطبيق النظرية على مثال ٣-٧-٢ ومن ثم حساب قيم النقاط الحدية ومن ثم بتعويضها في دالة الهدف.

٣-٨ نظرة تمهيدية جبرية للبرنامج الخطي وطريقه السمبلكس

Algebraic view

حتى الآن كانت دراستنا مقصورة على الحل الهندسي للبرنامج الخطي، ومن الواضح أن هذه الطريقة محدودة بالمسائل البسيطة حيث عدد المتغيرات ثلاثة أو أقل. إن طريقه السمبلكس والتي سوف نعطي تفصيلا كاملا لها في الباب القادم هي طريقة جبرية أكثر فعالية لحل البرنامج الخطي. سوف ندرس في هذا الفصل بعض الأساسيات الجبرية والتي سوف تستخدم في طريقه السمبلكس.

نظام المعادلات الخطي هو مجموعة من m من المعادلات الخطية في n مجهول كالتالي:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

حيث $m \le n$. يكتب هذا النظام بشكل مصفوفي على النحوا الآتي:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \tag{3.11}$$

من المعلوم أنه إذا كان، في المصفوفة $\mathbf{A}$ ، m عموداً مستقلاً خطياً فإنه يمكن إعادة كتابة النظام السابق على الشكل القياسي الآتي Canonical Form:

$$
\begin{array}{llll}
x_1 & & +y_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{1,n}x_n & = y_{1,0} \\
& x_2 & +y_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{2,n}x_n & = y_{2,0} \\
& \ddots & \vdots & \vdots \\
& & x_m + y_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+y_{m,n}x_n & = y_{m,0}
\end{array}
$$

مثال ٣-٨-١

النظام التالي هو نظام قياسي:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 0x_2 + x_3 + 2x_4 + 0x_5 &= 6 \\
-x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 + 0x_5 &= 2 \\
4x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 5x_4 + x_5 &= -3
\end{aligned}
$$

إن المتغيرات x_2, x_3, x_5 تسمى المتغيرات الأساسية حيث معامل x_3 يساوي واحدا في المعادلة الأولى وصفرا في باقي المعادلات وكذلك معامل x_2 يساوي واحدا في المعادلة الثانية وصفرا في باقي المعادلات وكذلك معامل x_5 يساوي واحدا في المعادلة الثالثة وصفرا في باقي المعادلات.

إن مغزى الصياغة القياسية لنظام معادلات خطية هو أنه من الممكن الحصول على حل لهذا النظام بسهولة، وذلك بجعل المتغيرات غير الأساسية في الصياغة القياسية تساوي الصفر، وبجعل المتغيرات الأساسية تأخذ قيم الطرف الأيمن. في المثال ٣-٨-١ إذا جعلنا المتغيرات غير الأساسية x_1 و x_4 تساوي الصفر فإننا نجد أن $x_2 = 2, x_3 = 6$ و $x_5 = -3$ وبذا نحصل على الحل $(0,2,6,0,-3)$ لنظام المعادلات في المثال ٣-٨-١.

الحل الأساسي لنظام معادلات من الشكل القياسي هو الحل الذي تكون فيه المتغيرات غير الأساسية مساوية للصفر، و المتغير الأساسي يأخذ قيمة الطرف الأيمن للمعادلة.

سوف نرى في الباب القادم، وذلك عند استخدام طريقة السمبلكس، كيف نستخدم المعادلات الخطية بالصياغة القياسية بشكل متكرر. وفي كل مرحلة يكون هناك حل أساسي يؤدي في النهاية بنا إلى الحل الأمثل وذلك إن وجد.

إن عملية الاختزال أو المحورية Pivoting هي التي تحولنا من نظام معادلات قياسي إلى آخر وبالتالي من حل أساسي إلى آخر. سوف نبين هنا عمليات الاختزال على الصف في النظام (3.10):

أولا: ضرب أي معادلة من (3.10) في ثابت غير صفري k

$$\begin{aligned} a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s \\ ka_{s1}x_1 + ka_{s2}x_2 + \cdots + ka_{sn}x_n &= kb_s \end{aligned} \tag{3.12}$$

ثانيا: ضرب معادلة من (3.10) ولتكن

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n = b_r$$

في ثابت k و إضافتها إلى معادلة أخرى

$$\begin{aligned} a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n &= b_s \\ \left(ka_{r1} + a_{s1}\right)x_1 + \cdots + \left(ka_{rn} + a_{sn}\right)x_n &= kb_r + b_s \end{aligned} \tag{3.13}$$

مثال ٣-٨-٢ :

سوف نستخدم في هذا المثال عمليات الاختزال لنبين أن النظام:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\,x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{3.14}$$

والنظام:

$$\begin{aligned} x_1 \quad -x_2 \qquad\quad &= 19/6 \\ -2x_2 \quad +x_3 &= 17/3 \end{aligned} \tag{3.15}$$

متكافئان، لاحظ أن النظام (3.15) من النمط القياسي. في البداية سوف نجعل المتغير x_1 أساسي وذلك بضرب المعادلة الأولى من (3.14) في -2 وإضافتها إلى المعادلة الثانية فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\,x_3 &= 6 \\ 6x_2 - 3x_3 &= -17 \end{aligned} \tag{3.16}$$

والذي يعطي المتغير الأساسي x_1. الآن نجعل x_3 أساسيا وذلك بضرب المعادلة الثانية من (3.16) في $-1/3$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 1/2\,x_3 &= 6 \\ -2x_2 + x_3 &= 17/3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

ومن ثم ضرب المعادلة الثانية من (3.17) في $-1/2$ وإضافتها إلى المعادلة الاولى فنحصل على:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 19/6 \\ -2x_2 + x_3 &= 17/3 \end{aligned} \tag{3.18}$$

وهو نفس النظام (3.15). في العمليات المحورية في المثال ٣-٨-٢ اخترنا معادلة ومن ثم متغيرا ليكون متغيرا أساسيا. إن معامل هذا المتغير الأساسي يسمى العنصر المحوري ففي المثال السابق كان 1 هو العنصر المحوري لـ x_1 و -3 هو العنصر المحوري لـ x_3.

إن استخدام المصفوفات أكثر ملاءمة لعمل العمليات المحورية من نظام المعادلات، وذلك لأن العمليات المحورية تستخدم فقط معاملات المتغيرات وبالتالي من الممكن أن نستبدل نظام المعادلات بالمصفوفة التي تحوي هذه المعاملات. إن موقع كل عنصر في المصفوفة يقابل موقع المعامل للمتغيرات في نظام المعادلات. سوف نضع النظام (3.14) على شكل مصفوفة ونضع الطرف الأيمن للنظام في العمود الأخير من المصفوفة والعنصر بين قوسين هو العنصر المحوري:

$$\begin{bmatrix} (1) & -2 & 1/2 & 6 \\ 2 & 2 & -2 & -5 \end{bmatrix} \tag{3.19}$$

من هذه المصفوفة نحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.16):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/2 & 6 \\ 0 & 6 & (-3) & -17 \end{bmatrix}$$

العنصر بين قوسين هو العنصر المحوري وبعد اجراء العمليات المحورية نحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.17):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1/2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 17/3 \end{bmatrix}$$

ثم نجعل العناصر في العمود المحوري المقابل للعنصر المحوري أصفارا فنحصل على المصفوفة التالية وهي تقابل النظام (3.18):

$$.\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 19/6 \\ 0 & -2 & 1 & 17/3 \end{bmatrix}$$

٣-٩ الصياغة القياسية للبرنامج الخطي

Standard form for linear programming

لاحظنا من النماذج السابقة أن الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لداله خطيه (تدعى داله الهدف) تخضع متغيراتها لشروط خطيه على شكل متباينات أو معادلات. ومهما اختلفت صياغة البرنامج الخطي فإنه يمكن التعبير عنه في كل الأحوال بالصياغة القياسية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\quad x_i \geq 0 \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned} \tag{3.20}$$

ونعني بذلك أن نضام المعادلات (3.20) قياسياً (انظر الفصل ٣-٨)، المعاملات a_{ij}, b_j, c_i هي أعداد ثابتة، بينما x_i هي المتغيرات التي يراد تعيينها. ومن الممكن التعبير عن الصياغة القياسية (3.20) بشكل مختصر على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
&\min \quad f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \\
&\text{s. t.} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\
&\qquad\quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

ملاحظه: اذا كانت دالة الهدف تعظيمية (max.) فيمكن اعادتها إلى دالة هدف تصغيرية (min.) وذلك بجعل $z' = -z$.

مثال ٣-٩-١:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned}
&\text{max.} \quad z = 3x_1 - 2x_2 \\
&\text{s. t.} \\
&\quad 2x_1 - x_2 \leq 1 \\
&\quad 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\
&\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الذي يمكن تحويله للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned}
\text{min.} \quad & z' = -3x_1 + 2x_2 \\
\text{s. t.} \quad & \\
& 2x_1 - x_2 \le 1 \\
& 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\
& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

إن اعظم قيمة لـ z تقابل اصغر قيمة لـ z' فأعظم قيمة لـz تساوي سالب أصغر قيمة لـz'. وللمسألتين الحل الأمثلي نفسه.

٣-١٠الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي

Non Canonical form for linear programming

قبل الشروع في دراسة المسألة المعروضة نود أن نستعرض أشكالا أخرى غير قياسية ونوضح كيفية إعادتها إلى الشكل القياسي:

المتغيرات المكملة The Slack Variables

إذا كان البرنامج الخطي مصاغا على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
\text{min} \quad & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{s. t.} \quad & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

فإنه يمكن إعادته إلى الشكل القياسي وذلك بإدخال متغيرات جديده

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$$

ندعوها متغيرات إضافية فتتحول المتباينات إلى معادلات مما يجعل عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات و بالتالي لا يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات السابقة، ويكون الشكل الجديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
&x_i \ge 0 \qquad i = 1, \ldots, n+m
\end{aligned}
$$

المتغيرات الزائدة Surplus Variables

هي حاله معاكسة للحالة السابقة ويكون البرنامج الخطي المصاغ على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
&x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

هذا البرنامج يمكن إعادته إلى الشكل القياسي بإدخال متغيرات جديده نسميها متغيرات زائدة، وذلك كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s. t.} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \\
&x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n+m
\end{aligned}
$$

المتغيرات الحرة Free Variables

إذا كان البرنامج الخطي مكتوبا بالصياغة القياسية إلا أن أحد المتغيرات x_j لم يفترض فيه أن يكون غير سالب أي أنه متغير حر، فهناك طريقة لتحويله إلى الصيغة القياسية نستعرضها فيما يلي:

يمكن استبدال المتغير x_j بمتغيرين جديدين غير سالبين μ_j, v_j وذلك بأن نكتب

$$x_j = \mu_j - v_j ,$$

وبالتالي فإن البرنامج الخطي الآن ممثل بالمتغيرات الـ $n+1$ وهي

$$x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \mu_j, v_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$$

وذلك بعد حذف x_j وإضافة المتغيرين μ_j, v_j غير السالبين إلى البرنامج الخطي.

تمارين الباب الثالث

٣-١ إعتبر المنطقه المضلعة التالي:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\le 1 \\ 8x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

أوجد النقاط الحدية.

٣-٢ في التمرين السابق إذا علمت أن

$$\max \quad 2x_1 + 3x_2$$

هي دالة الهدف أوجد الحل الأمثل هندسيا.

٣-٣ باستخدام واحد من من المعادلات الـ m والتي معامل x_j فيها لا يساوي الصفر على سبيل المثال

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

أوجد طريقة آخرى للتخلص من المتغير الحر x_j.

٣-٤ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\min \quad |x_1| + |x_2| + |x_3|$$
s. t.
$$x_1 + x_2 \le 1$$
$$2x_1 + x_3 = 3$$

٣-٥ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\min \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
s. t.
$$2 \le x_1 + x_2 \le 3$$
$$4 \le x_1 + x_3 \le 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

٣-٦ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\max \quad x_1 + 4x_2 + 3x_3$$
s. t.
$$2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 - x_3 = 1$$
$$x_2, x_3 \ge 0$$

٣-٧ حل البرنامج في التمرين ٢-٢ هندسيا.

٣-٨ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\min \quad x_1 + x_2 + x_3$$
s. t.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$$
$$x_1 \ge 1, \quad x_2 \ge 2, \quad x_3 \ge 1$$

٣-٩ حل البرنامج التالي هندسيا

$$\min \quad 3x_1 - x_2$$

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.} \quad & \\
-3x_1 + x_2 &\le 1 \\
-x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_1 - 2x_2 &\ge -2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

٣-١٠ عرف مايلي النقطة الحرجة، المنطقة المضلعة، ثم بين كيف نغير في المتغيرات الحره لنحول البرنامج الخطي الى الصورة القياسية.

٣-١١ إثبت أنه إذا كانت المنطقة المسموح بها للبرنامج الخطي

$$\min \ \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \quad \text{s. t.} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0},$$

٣-١٢ محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل متواجد عند نقطة حرجة (حدية) من هذه المنطقة.