الباب السابع

الديناميكا الحرارية الإحصائية للحالات المجهرية

Statistical Thermodynamics of Microstates

الباب السابع

الديناميكا الحرارية الإحصائية للحالات المجهرية

Statistical Thermodynamics of Microstates

في هذا الباب سوف نستعرض التعريف الإحصائي للإنتروبي وذلك باستخدام تعريفنا للحالات المجهرية. ومن ثم نعرض حساب الإنتروبي لأنظمة بسيطة تحتوي على عدد بسيط من الجسيمات ومستويات الطاقة. وسوف نستعرض التبريرات لهذا التعريف.

كنا قد تعرضنا بالباب الثاني لتعريف الإنتروبي على أنه مقياس لدرجة عشوائية النظام. وذكرنا أن عشوائية جزيئات الغاز تكون أكبر من عشوائيتها في الحالة السائلة (لنفس المادة)، وأيضاً عشوائية جزيئات الحالة السائلة أكبر من عشوائية جزيئات الحالة الصلبة لنفس المادة. وهذا بالطبع ناتج من مدى ترتيب الجزيئات بالمادة.

ونود أن ننوه هنا أن الشرح السابق شرح كيفي (نوعي) وليس كميا أو مقداريا ، بمعنى أنه لم ينتج عن طريق الحسابات الرياضية أو المعادلات المشتقة. بالتالي فنحن نأمل في إيجاد نموذج رياضي (أو معادلة رياضية) يعتد به لتفسير الإنتروبي بطريقة يسهل التعامل معها ويمكن تطبيقها في الدراسات المختلفة.

ولقد كان العالم بولتزمان هو أول من اقترح الربط بين مبدأ الإنتروبي "S" وبين عدد الحالات المجهرية الكلية للنظام "Ω" بالصورة الرسمية:

$$S = k_B \ln \Omega, \qquad (1)$$

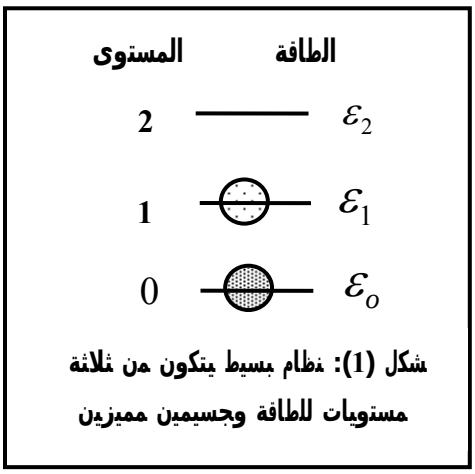
حيث k_B هو ثابت بولتزمان وأن S و Ω يعتبران من خواص الحالة للنظام. فما هو تعريف الحالات المجهرية للنظام؟ هذا ما سوف نوضحه في الفصل التالي. ولكن قبل توضيحه لنا هنا ملاحظتان:

1- المعادلة (1) افتراضية (Hypothetical) ولا يوجد لها اشتقاق نظري، وبالتالي سوف نفترض أنها حقيقية. ودرجة صحتها سوف تعتمد على نتائجها ومقارنتها بالنتائج المعملية المدونة.

2- تم تعريف ثابت بولتزمان k_B لأول مرة من خلال هذه المعادلة.

I– الحالات المجهرية للنظام (Microstates of a system)

قبل أن نبدأ بتعريف معنى الحالة المجهرية للنظام دعونا نوضح أولاً ماذا تعني كلمة *حالة النظام* :" *<u>حالة النظام تُعرف تحديداً بأنها كيفية ملء مستويات الطاقة لهذا النظام</u>*". لتوضيح الصورة، دعونا نعتبر نظاماً بسيطاً، كماهو موضح في الشكل (1)، يتكون من ثلاثة مستويات للطاقة، ε_i , $i = 0,1,2$ ، وجسيمين مميزين. في هذا النظام، دعونا نعرف حالة النظام بالأرقام $(1,1,0)$ وهذه الأرقام من اليسار لليمين تدل على أنه يوجد جسيم بمستوى الطاقة الأول (ε_0) وجسيم بمستوى الطاقة الثاني (ε_1)، والمستوى الثالث للطاقة (ε_2) يترك فارغاً. وفي حالة أنه تم إثارة أحد الجسيمين نحصل على حالات النظام بالأرقام $(1,0,1)$ أو $(0,1,1)$.



شكل (1): نظام بسيط يتكون من ثلاثة مستويات للطاقة وجسيمين مميزين

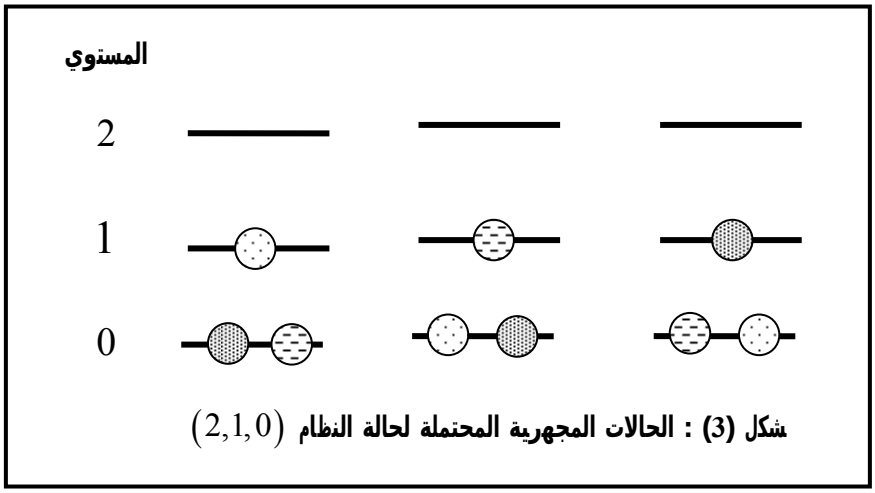
والآن نحن بصدد تعريف الحالة المجهرية لحالة النظام $(1,1,0)$، وكما هو مبين في الشكل (2)، يتكون من حالتين مجهريتين، وهما الحالتان المحتملتان الناتجتان من تبديل الجسيمين بالمستوى الأول والثاني لهذا النظام.

شكل (2): الحالتان المجهريتان المحتملتان لحالة النظام $(1,1,0)$

ونستطيع الآن تحديد التعريف الرسمي للحالة المجهرية كما يلي: "الحالة المجهرية هي ترتيب الجسيمات المميزة خلال حالة معرفة (معطاة) للنظام" بالتالي فإن عدد الحالات المجهرية الكلية، ω ، هي عدد الطرق الواضحة لترتيب فئة من الجسيمات المميزة لتحقيق حالة عينية معينة.

مثال: ماهو عدد الحالات المجهرية لحالة النظام $(2,1,0)$ الذي يتكون من ثلاثة مستويات للطاقة وثلاثة جسيمات مميزة؟

الحل: المطلوب هنا أن نقوم بوضع جسيمين بالمستوى الأول وجسيم واحد بالمستوى الثاني وترك المستوى الثالث فارغاً. وبتبديل الأجسام الثلاثة على مستويات الطاقة الأولى والثانية فقط، كما هو موضح في شكل (3)، نجد أننا سوف نحصل على ثلاث حالات مجهرية فقط. هذا مع إهمال ترتيب الجسيمات بكل مستوى.



شكل (3) : الحالات المجهرية المحتملة لحالة النظام $(2,1,0)$

وقبل أن نسترسل بالشرح دعونا نسترجع أحد النظريات الإحصائية المهمة وهي:

نظرية: مع وجود الشرط $N = \sum_j n_j$ فإن عدد الطرق لتوزيع عدد N من الجسيمات المميزة على عدد j من المستويات بحيث يوضع n_1 من الجسيمات في المستوى الأول، و n_2 من الجسيمات في المستوى الثاني، وهكذا حتى نصل إلى وضع n_j من الجسيمات في المستوى الأخير j هو:

$$\omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{j} n_i!} \qquad (2)$$

الإثبات:

نبدأ أولاً بالمستوى الأول، فنجد أن عدد الطرق لاختيار n_1 من N ووضعها في هذا المستوى هو:

$$\omega_1 = \binom{N}{n_1} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}$$

وبالمستوى الثاني، نجد أن عدد الطرق لاختيار n_2 من $(N-n_1)$ ووضعها في هذا المستوى هو:

$$\omega_2 = \binom{N-n_1}{n_2} = \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!}$$

وبالمستوى الثالث، نجد أن عدد الطرق لاختيار n_3 من $(N-n_1-n_2)$ ووضعها في هذا المستوى هو:

$$\omega_3 = \binom{N-n_1-n_2}{n_3} = \frac{(N-n_1-n_2)!}{n_3!(N-n_1-n_2-n_3)!}$$

ونظل على نفس النمط حتى نصل للمستوى الأخير. وحيث إن هذه الاختيارات عمليات منفصلة فإن العدد الكلي يصبح:

$$\omega\{n_i\} = \omega_1 \times \omega_2 \times \omega_3 \times \cdots \times \omega_j = \frac{N!}{n_1!n_2!\cdots n_j!} = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{j} n_i!}$$

حيث الرمز $\prod$ يدل على المضروب اللانهائي للأعداد، بمعنى أن:

$$\prod_{i=1}^{r} n_i! = n_1! \times n_2! \cdots\cdots \times n_r!$$

وهذا هو المطلوب إثباته.

ملاحظة مهمة: في دراستنا بالباب السابق عرفنا القيمة ω_i، التي تعبر عن عدد الطرق المجهرية المختلفة لحالة عينية معينة، بأنها "احتمالية الديناميكا الحرارية" (Thermodynamic Probability) **أو "الثقل الإحصائي"** (Statistical weight). **وتأخذ** ω_i القيم من صفر إلى قيم فلكية، ولذلك فهي تختلف عن الاحتمالية الحقيقية p_i والتي تعرف بالعلاقة:

$$p_i = \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{j} \omega_i}, \qquad 0 \le p_i \le 1 \qquad (3)$$

ومجموعها الكلي يعطي:

$$\sum_{i=1}^{j} p_i = \sum_{i=1}^{j} \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^{j} \omega_i} = \frac{\sum_{i=1}^{j} \omega_i}{\sum_{i=1}^{j} \omega_i} = 1$$

مثال: ماهو عدد الحالات المجهرية لحالة النظام $(4,3,2,1,0)$**؟**

الحل: من الحالة $(4,3,2,1,0)$ **نجد أن عدد المستويات هي خمسة، وعدد الجسيمات** "N" **تحسب من الترتيب المعطى وهو:**

$$N = \sum_{n_i=1}^{5} n_i = 4+3+2+1+0 = 10$$

وباستخدام القانون الإحصائي نجد أن عدد الحالات المجهرية لهذه الحالة هي:

$$\omega\{n_i\} = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} = \frac{10!}{4!3!2!1!0!} = 12600$$

مثال: احسب الإنتروبي للمثال السابق.

الحل: باستخدام القانون:

$$S = k_B \ln \omega\{n_i\}$$
$$= \left(1.38\times10^{-23}\,\mathrm{Jk^{-1}}\right)\times\ln(12600) = 1.30\times10^{-22}\ \mathrm{Jk^{-1}}$$

تعليق: بالطبع فإن قيمة الإنتروبي هنا صغيرة جداً. ولكن إذا ضربنا هذا الرقم بعدد أفوجادرو، وهو عدد الجسيمات بالمول الواحد، وقسمناه على عدد الجسيمات بالمثال وهو "$N = 10$" **فإننا سنحصل على الإنتروبي لكل مول من الجسيمات وهو** $7.8\ \mathrm{Jk^{-1}mol^{-1}}$.

والآن قبل أن نبدأ بمثال أخر دعونا نتحقق من بعض خواص الإنتروبي الإحصائية:

1- الخاصية الأولي تنص على أن:

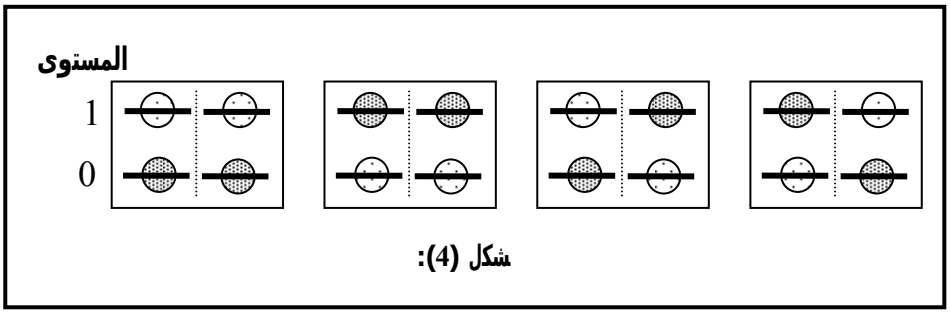
$$\lim_{T\to 0} S = 0$$

ونعلم إنه عند درجات الحرارة المنخفضة، والتي تقترب من درجة الصفر المطلق، $T \to 0$، نجد أن جميع الجسيمات تتجمع بالمستوى الأرضي (وهو أدنى مستوى). وحينما تصبح الجسيمات بمستوى وحيد، فإن عدد الحالات المجهرية الكلية، Ω ، تصبح 1، بالتالي فإن:

$$\lim_{T\to 0} S = k_B \ln\Omega = k_B \ln 1 = 0$$

وهذا يوضح أن التعريف الإحصائي متوافق مع القانون الثالث للديناميكا الحرارية.

2- الخاصية التجميعية للإنتروبي $(\text{Extensive "Additive" property})$**، وتعني أنه إذا تضاعف حجم النظام فإن الإنتروبي أيضاً تتضاعف بنفس القيمة. ولدراسة هذه الصفة دعونا نضاعف حالة النظام البسيطة** $(1,1,0)$ **التي تتكون من ثلاثة مستويات وجسيمين مميزين. وسوف نكتفي باستعمال مستويين فقط حيث إن المستوى الثالث فارغ.**



شكل (4):

وبمضاعفة حجم النظام فإننا نضاعف أيضاً عدد الجسيمات والمستويات، فنحصل على نسختين

متطابقتين من الجسيمات ومن المستويات. مع ملاحظة أننا سوف نتعامل مع كل نسخة على

حدة، ولن نسمح بتبادل الجسيمات بين النسخ المختلفة. وكما يتضح من شكل(4) فإننا حصلنا على أربع حالات مجهرية. بالتالي:

فإنه لجسيمين نجد أن الإنتروبي:

$$S = k_B \ln 2$$

ولأربعة جسيمات نجد أن الإنتروبي:

$$S = k_B \ln 4 = k_B \ln 2^2 = 2k_B \ln 2$$

ولعدد N من النسخ نجد:

$$S = k_B \ln 2^N = Nk_B \ln 2$$

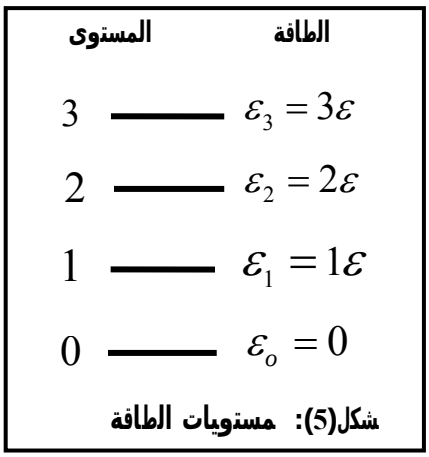
من هذا المثال تتضح صفة التضاعف للحالات المجهرية وصفة التجميع للإنتروبي، بمعنى:

$$\Omega_{total} = \Omega_1 \times \Omega_2$$

$$S_{total} = S_1 + S_2,$$

مثال: ادرس نظاما بسيطا، كما هو موضح في شكل (5)، يتكون من ثلاثة جسيمات "$N = 3$" مميزة وأربعة مستويات للطاقة تعطي بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i\ \varepsilon \text{ Joule}, \qquad i = 0,1,2,3$$



شكل(5): مستويات الطاقة

مع اعتبار الشرط أن الطاقة الكلية $U = 3\varepsilon$ J .

الحل: نستطيع أن نميز بين الجسيمات الثلاثة بإعطائها الرموز A, B, C مع الأخذ في الاعتبار الشروط (القيود) التالية:

$$\sum_{i=0}^{3} n_i = 3, \qquad U = \sum_{i=0}^{3} n_i \varepsilon_n = 3\varepsilon,$$

وباستخدام الرموز التالية:

k تعبر عن ترقيم الحالات العينية، n_i عدد الجسيمات بالمستوى i، ω_k احتمالية الديناميكا الحرارية، p_k الاحتمالية الحقيقية، نستطيع تكوين الجدول (1):

جدول (1): توزيع الحالات التي تحقق شروط المثال السابق

	الحالات العينية				الحالات المجهرية						
k	n_o	n_1	n_2	n_3	n_o	n_1	n_2	n_3	U (J)	$\omega_k \{n_i\}$	p_k
1	2	0	0	1	AB AC BC	0 0 0	0 0 0	C B A	3ε	3	$\frac{3}{10}$
2	1	1	1	0	A B C A B C	B C A C A B	C A B B C A	0 0 0 0 0 0	3ε	6	$\frac{6}{10}$
3	0	3	0	0	0	ABC	0	0	3ε	1	$\frac{1}{10}$

ومن الجدول(1) نجد أن عدد الحالات العينية هي ثلاث $k = 1, 2, 3$، وعدد الحالات المجهرية الكلية هي:

$$\Omega = \sum_k \omega_k \{n_i\} = 10 .$$

ويوجد بالجدول الحالة العينية $(1,1,1,0)$، انظر الترقيم العيني $k=2$، ولها أعلى عدد من الحالات المجهرية وهي $\omega_2=6$ ولهذا فإن الحالة $(1,1,1,0)$ تسمى أعلى احتمالية عينية (Most probable macrostate).

ولنا هنا وقفة لنستخلص بعض النتائج من الجدول (1) وهي:

1- بالرغم من بساطة الأعداد (الجسيمات والمستويات) فإن الحالة $(1,1,1,0)$، التي تتميز بأعلى عشوائية ممكنة، لها أعلى احتمالية عينية.
2- نظراً للقيود المعطاة بالمثال فإنه يوجد أيضاً العديد من الطاقات التي لم ندرسها، وتبدأ من الطاقة 0ε للحالة $(3,0,0,0)$ وتنتهي بالطاقة 9ε للحالة $(0,0,0,3)$. هذه الحالات تعتبر من الحالات النظامية (غير العشوائية) ولذا نجد أن لها اقل حالة مجهرية وهي الواحد.
3- لعدد كبير جداً من الجسيمات في هذا النظام نجد أن الحالة $(1,1,1,0)$ يظهر لها أكبر عدد من الحالات المجهرية وبالتالي تكون الحالة المحتملة لاتزان النظام.
4- سوف يستخدم الرمز $\tilde{n}$ للتعبير عن فئة الأعداد للحالة ذات أعلى احتمالية عينية، ولمثالنا هنا نجد أن $\tilde{n}\equiv\{1,1,1,0\}$.

وقد رأينا سابقاً بالديناميكا الحرارية أن النظام يميل دائما إلى حالة الاتزان وبالتالي فإن الإنتروبي تزداد. وعند الاتزان تماماً تأخذ الإنتروبي قيمة عظمى. وبالاستقراء نجد أن نموذج بولتزمان الإحصائي يقترح علينا أن النظام يتغير تلقائياً من حالات ذات احتمالية عينية منخفضة إلى حالات ذات احتمالية عينية مرتفعة (أعداد كبيرة من الحالات المجهرية). من هنا نستطيع أن نؤكد أن القانون الثاني للديناميكا الحرارية هو نتيجة منطقية لنظرية الاحتمالات. "ولذا فإن العالم يتغير كما نراه لأنه يبحث عن حالة أعلى احتمالية! وهي حالة الاتزان! أو الحالة العشوائية! وسوف نستعرض مثالا آخر لنوضح إجابة السؤال: ما هي الحالة المفضلة للنظام؟

مثال: نظام بسيط يتكون من ستة جسيمات "$N=6$" ومستويات تُعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \times 10^{-20} \text{ Joule}, \qquad i = 0,1,2,3,4$$

إذا استطعنا ترتيب الجسيمات بحيث إن المجموع الكلي للطاقة "U" يساوي 4×10^{-20} J. احسب عدد الحالات المجهرية التي تحقق هذه الشروط.

الحل: **لحل هذا المثال يجب أن نحدد مستويات الطاقة ونحدد عدد تباديل الجسيمات الستة بحيث تتحقق الشروط المعطاة كما بالجدول (2). ومن الجدول نجد أن عدد الحالات العينية هي خمس حالات فقط.**

جدول (2) : جميع الحالات العينية التي تحقق شروط المثال السابق

الطاقة (10^{-20} Joule)	**الحالات العينية**				
4	●				
3		●			
2			●●	●	
1		●		●●	●●●●
0	●●●●●	●●●●	●●●●	●●●	●●
U (10^{-20} J)	4	3+1	2×2	2+1+1	4×1
k	1	2	3	4	5

دعونا ننظر بتمعن إلى نتيجة المثال السابق. بالرغم من أننا حصلنا على خمسة توزيعات عينية مختلفة لها نفس عدد الجسيمات ولها أيضاً نفس الطاقة $U\,(4\times10^{-20}\text{ J})$، ولكننا نود أن نعرف: ما هو عدد الحالات المجهرية لكل حالة عينية؟ من معلوماتنا السابقة للديناميكا الحرارية فنحن نتوقع أن أي نظام يتجه للتقليل (minimize) من طاقة هلمهولتز الحرة، ولذا يجب أن نتأكد من هذه المعلومة، وسوف نحتفظ بالحجم ثابتاً حتى لا تتغير مستويات الطاقة بتغير الحجم.

مثال: **للنظام السابق، عين عدد الحالات المجهرية لكل توزيع وأوجد التوزيع الذي يقلل من طاقة هلمهولتز الحرة "$F = U - TS$" عند درجة حرارة الغرفة (298.15 K).**

الحل: باستخدام حل المثال السابق والقانون:

$$\omega_k = \frac{6!}{n_0!n_1!n_2!n_3!n_4!}$$

نستطيع تكوين الجدول (3):

جدول (3): الكميات الفيزيائية التي تحقق شروط المثال

k	$\{n_0, n_1, n_2, n_3, n_4\}$	ω_k	$S\,(10^{-23}\ \mathrm{JK^{-1}})$	$U\,(10^{-20}\ \mathrm{J})$	$F\,(10^{-20}\ \mathrm{J})$
1	$\{5,0,0,0,1\}$	6	2.47	4.00	3.26
2	$\{4,1,0,1,0\}$	30	4.70	4.00	2.60
3	$\{4,0,2,0,0\}$	15	3.74	4.00	2.89
4	$\{3,2,1,0,0\}$	60	5.65	4.00	2.32
5	$\{2,4,0,0,0\}$	15	3.74	4.00	2.89

ويتضح من الجدول (3) أن الحالة العينية "$k=4$" التي لها أعلى عدد من الحالات المجهرية، ولها أيضاً أعلى قيمة للإنتروبي S وأقل قيمة لطاقة هلمهولتز F.

تعليق مهم: لعدد بسيط من الجسيمات نجد أنه من السهل استخدام الطريقة الموضحة في المثال السابق لإيجاد التوزيعات المختلفة، ومنها نحسب أعلى توزيع إحتمالي الذي تكون له أقل طاقة حرة. ولكن للأسف فإن هذه الطريقة لا تصلح للتعامل مع نظام حقيقي (نظام عيني) له أعداد فلكية من الجسيمات ومن مستويات الطاقة. ومن حسن حظنا أن عالماً مثل بولتزمان قد وُفق في إيجاد معادلة لحساب التوزيع الإحصائي لأعداد كبيرة من الجسيمات على مستويات الطاقة. وقد بني بولتزمان توزيعه الإحصائي على الأسس التالية:

1- إيجاد النهاية العظمى لإنتروبيا النظام، مع التقيد

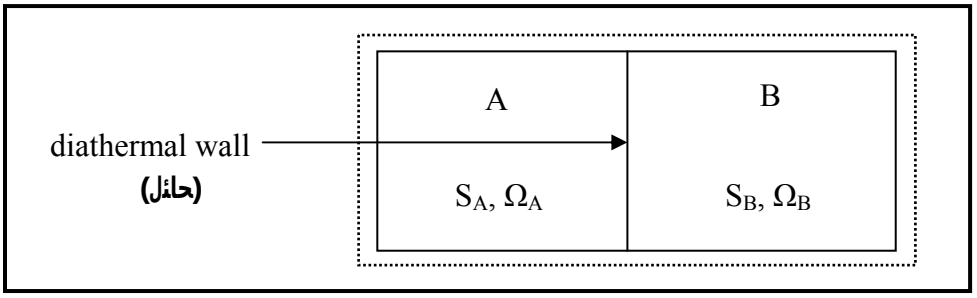
i) بأن عدد الجسيمات N يظل ثابتا

ii) وأن الطاقة الداخلية للنظام U تظل ثابتة.

وهذا ما سوف نتعرض له في الباب التالي.

واجب منزلي: استنتج العلاقة $S = k_B \ln \Omega$

الحل: سنفترض، كما بالشكل السابق، نظامين A, B منفصلين تماما بواسطة حائل. وسنفترض أن لكل نظام منهما الإنتروبي والحالات المجهرية الخاصة به، مثل S_A, Ω_A و S_B, Ω_B. وسنفترض أن النظامين تم خلطهما بإزالة الحائل. ولكننا نعلم أن الإنتروبي هي كمية شاملة، ومنها نضع:



$$S_{total} = S_A + S_B \qquad \text{(I)}$$

ولكننا نعلم أيضاً أن عدد الحالات المجهرية هي كميات تضاعفية بمعنى أن:

$$\Omega_{total} = \Omega_A \times \Omega_B \qquad \text{(II)}$$

سنفترض الآن S هي دالة في المتغير Ω بالصورة:

$$S = f(\Omega) \qquad \text{(III)}$$

من (I) نجد

$$f(\Omega_{total}) = f(\Omega_A) + f(\Omega_B) \qquad \text{(IV)}$$

ومن (II) نجد

$$f(\Omega_{total}) = f(\Omega_A \times \Omega_B) \qquad \text{(V)}$$

ومن (IV) و (V) نجد

$$f(\Omega_A)+f(\Omega_B)=f(\Omega_A\times\Omega_B) \qquad \text{(VI)}$$

المعادلة (VI) **لا تتحقق إلا إذا استخدمنا الدالة اللوغاريتمية بالشكل:**

$$S = k_B \ln\Omega$$

وهو المطلوب.

II– أمثلة منوعة

1- افترض وجود كرتين متطابقتين (وغير مميزتين) ويراد وضعهما في أربعة أماكن منفصلة هي (A,B,C,D) **. احسب عدد الحالات المجهرية.**

الحل

بترتيب الكرات كما بالجدول التالي نجد أن عدد الحالات العينية هي 10. مع وجود الشرط بأن عدد الكرات بكل حالة العينية يجب أن تكون 2 (لاحظ هنا أن التجميع أفقيا).

k				
1				●●
2			●●	
3		●●		
4	●●			
5			●	●
6		●		●
7		●	●	
8	●			●
9	●		●	
10	●	●		
	A	B	C	D

2- افترض وجود جسيمين متطابقين (ومميزين) ويراد وضعهما في ثلاثة مستويات للطاقة تعطي بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \times \varepsilon, \qquad i = 0,1,2$$

إذا استطعنا ترتيب الجسيمات بحيث إن المجموع الكلي للطاقة $U = 2\varepsilon$.

أ- احسب عدد الحالات المجهرية،

ب- الإنتروبي،

ت- إذا وضع جسم مميز آخر بطاقة صفر، اثبت أن الإنتروبي سوف يزداد بالقيمة 1.63 .

الحل

أ- نكون الجدول التالي بحيث إن عدد الجسيمات هو 2 والمجموع الكلي للطاقة هو $U = 2\varepsilon$ فنجد أن عدد الحالات العينية هو 2 . وبحساب عدد الحالات المجهرية لكل حالة نجد أن عددهما هو1 و2.

	الحالات العينية	
ε_i	1	2
2		$\otimes$
1	$\oplus$ $\otimes$	
0		$\oplus$
ω_i	$\frac{2!}{2!0!0!} = 1$	$\frac{2!}{1!0!1!} = 2$

ويصبح المجموع الكلي للحالات المجهرية هو:

$$\Omega_1 = \omega_1 + \omega_2 = 1 + 2 = 3 .$$

ب- الإنتروبي للنظام يحسب كالتالي:

$$S_1 = k_B \ln \Omega_1 = \left(1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}\right) \ln 3$$
$$= 1.5 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$$

ت- وعند وضع جسم مميزآخر، ⊙ ، بالمستوى ذي الطاقة صفر، كما بالجدول التالي، نجد أن المجموع الكلي للحالات المجهرية هو $\Omega_2 = \omega_1 + \omega_2 = 3 + 3 = 6$ **:**

	الحالات العينية	
ε_i	1	2
2		⊕
1	⊕ ⊗	
0	⊙	⊗ ⊙
ω_i	$\frac{3!}{2!1!0!} = 3$	$\frac{3!}{2!0!1!} = 3$

والإنتروبي لهذه الحالة:

$$S_2 = k_B \ln \Omega_2 = \left(1.38 \times 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}\right) \ln 6$$
$$= 2.5 \times 10^{-23}\ \text{JK}^{-1}$$

ومنها نجد النسبة:

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\ln 6}{\ln 3} = 1.63$$

تمارين عامة

1- افترض وجود أربعة جسيمات متطابقة (ومميزة) ويراد وضعهما في أربعة مستويات للطاقة تعطى بالعلاقة:

$$\varepsilon_i = i \times \varepsilon, \qquad i = 0,1,2,3$$

إذا استطعنا ترتيب الجسيمات بحيث إن المجموع الكلي للطاقة $U = 6\varepsilon$ **.**

أ- اوجد الخمس حالات العينية ورتبها بحسب الحالات المجهرية،

ب- اثبت أن عدد الحالات المجهرية الكلية $= 44$ **.**

ث- اثبت أن متوسط الإسكان للكميات الأربع هو $0.91, 0.91, 1.09, 1.09$ **.**