الباب السابع عشر

تطبيقات إحصاء فيرمي – ديراك

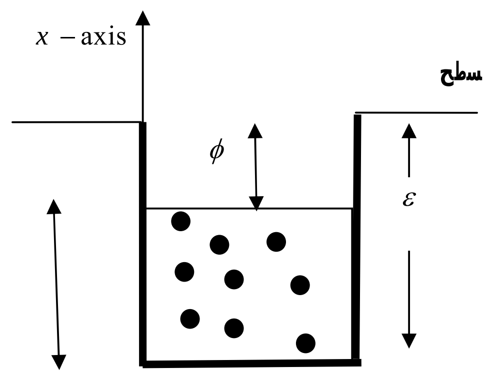
Applications of Fermi – Dirac statistics

الباب السابع عشر

تطبيقات إحصاء فيرمي – ديراك

Applications of Fermi – Dirac statistics

لقد تم إثبات صحة إحصاء فيرمي – ديراك عن طريق تطبيقه على مسائل متعددة في الفيزياء، ومنها المواد الموصلة وشبه الموصلة وفائقة التوصيل. على سبيل المثال الفيزيائي إلكترونات التوصيل بالمعادن. تاريخياً فإن النظرية الإلكترونية للمعادن والتي تم تطويرها بواسطة العالمين درود ولورينتز حيث اعتبرا أن الالكترونات كغاز داخل المعادن تخضع لقوانين الإحصاء التقليدي (ماكسويل- بولتزمان). ولقد نجح هذا النموذج النظري في تفسير بعض الظواهر مثل الخواص الكهربائية والحرارية للمعادن. ولكنه فشل في التفسير الكمي لبعض الخواص الفيزيائية، كما ذُكر سابقاً لحساب الحرارة النوعية للمعادن، حيث وجد أن الحرارة النوعية للمعادن عند درجة حرارة الغرفة هي $(3R)$ وليست $(\frac{9}{2}R)$. وقد تم حل هذا اللغز بواسطة العالم سمرفيلد الذي افترض أن إلكترونات المعادن تخضع لقوانين إحصاء فيرمي – ديراك. وهناك أيضاً بعض الظواهر الخلابة والتي تُظهر خواص إلكترونات التوصيل بالمعادن مثل ظاهرتي الانبعاث الالكتروني الحراري والانبعاث الكهربائي الضوئي (Photoelectric emission). وذلك ناتج من أنه عند درجة حرارة الغرفة لا يوجد انبعاث تلقائي للإلكترونات، لذلك نستطيع القول إن الالكترونات داخل المعدن تصبح حبيسة لجهد التجاذب مع الأيونات. وتصبح الالكترونات حبيسة حائل جهد بئري ارتفاعه ε، انظر الشكل (1). ولا يستطيع أي من الالكترونات الهرب من الحائل إلا إذا كانت طاقتها الكلية أكبر من ε. وبالرغم من أن ظاهرتي الانبعاث الالكتروني الحراري والانبعاث الكهربائي الضوئي يعتبران ظواهر غير متزنة حرارياً، فإننا نستطيع حساب كثافة التيار الإلكتروني بفرض أن إلكترونات المادة في حالة اتزان شبه ساكن.



شكل (1): دالة الشغل ϕ لمعدن تمثل ارتفاع السطح عن طاقة فيرمي

I– الانبعاث الالكتروني الحراري (Thermoionic Emission)

يتم تعريف الانبعاث الالكتروني الحراري على أنه: "عملية تحرر إلكترونات المادة (معادن وفلزات وأشباه الموصلات) من سطوحها نتيجة لاكتسابها طاقة حرارية". ولتتحرر الالكترونات من الأسطح يجب إعطاؤها طاقه "ε" أكبر من $\varepsilon_f + \phi$. ويعتبر هذا الشرط ضرورياً ولكنه غير كاف، حيث يمكننا إعطاء طاقة كافية للجسيم ولكنه يتحرك باتجاه مضاد لاتجاه خروجه من السطح. ولحساب كثافة تيار الالكترونات المحررة من المعدن فإننا نستطيع تطبيق إحصاء فيرمي. ولاستخدامه نلاحظ أولاً: أنه وبالرغم من الضغط الكبير الواقع على سطح المعدن من الداخل نتيجة حركة الإلكترونات، كما رأينا سابقاً، إلا أنها تصبح حبيسة ولا تستطيع الهرب من سطح المعدن نتيجة التجاذب الكولومي بين الالكترونات والأيونات داخل المعدن. وبارتفاع درجة الحرارة عن الصفر المطلق، نجد أن بعض الالكترونات القريبة من طاقة فيرمي تكتسب هذه الطاقة الحرارية وتصعد لمستويات أعلى من مستوى طاقة فيرمي. وهذا يعني أن أقل طاقة لازمة لتحرير أي إلكترون من المعدن عند درجة الحرارة تُعطى بالعلاقة:

$$\phi = \varepsilon - \mu(T) + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}, \qquad (1)$$

حيث ϕ هي دالة الشغل (Work function) للمعدن. وتُعرف ϕ بأنها أقل طاقة يكتسبها الإلكترون للتحرر من سطح المعدن، وبالطبع فهي تعتمد على طبيعة المعدن. والدالة ϕ أيضاً

تعبر عن ارتفاع سطح المعدن بالنسبة إلى مستوى طاقة فيرمي. و ε هي الطاقة المطلوبة لتحرير إلكترون المستوى الأرضي للمعدن (وتسمى طاقة الترابط "Binding energy").

ولحساب كثافة تيار الالكترونات المحررة، يجب أن نعرف عددهم. ولحساب عدد الالكترونات المحررة دعونا نأخذ اتجاه الانبعاث هو الاتجاه الموجب للمحور السيني، $x-$axis، العمودي على سطح المعدن. وسوف نفترض التالي:

1- سطح الانبعاث سنأخذه مستوياً.

2- الإلكترونات التي تنجح في الهروب من سطح المعدن، $x=0$، نتيجة التسخين هي تلك التي لها كمية حركة خطية p_x بحيث يتحقق الشرط: $\frac{p_x^2}{2m}>\varepsilon$

بالتالي فإن عدد الالكترونات التي تتحرر من سطح المعدن لوحدة الحجوم "$n=\frac{N}{V}$" باتجاه المحور السيني هي:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{1}{V}\int g(p)f(p)d\mathbf{p} \tag{2}$$

حيث $f(p)$ هي دالة فيرمي و

$$g(p)d\mathbf{p}=\frac{2V}{h^3}d\mathbf{p} \tag{3}$$

لذلك:

$$n=\frac{N}{V}=\frac{2}{h^3}\int\frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}d\mathbf{p} \tag{4}$$

وبمعلومية أن حجم العينة:

$$V=Al_x=A\mathrm{v}_x t \tag{5}$$

حيث A هي مساحة سطح المعدن و l_x هي ارتفاعه، v_x هي سرعة الإلكترون في اتجاه المحور السيني، و t هو الزمن اللازم لتحرك الإلكترون مسافة l_x. ولذلك نجد أن عدد الالكترونات التي تتحرر من سطح المعدن، باتجاه المحور السيني، لوحدة السطوح والزمن (n') تعطى بالعلاقة:

$$n'=n\,\mathrm{v}_x=\frac{2}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\sqrt{2m\varepsilon}}^{\infty}\frac{\mathrm{v}_x}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}dp_x\,dp_y\,dp_z\,, \tag{6}$$

ومن التعويض $\varepsilon=\frac{p_x^2}{2m}$ نجد أن:

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_x} dp_x = \frac{2p_x}{2m} dp_x = \mathrm{v}_x dp_x \tag{7}$$

ولذلك فإن:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{2}{h^3} \int \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} dp_y dp_z , \\ &= \frac{2}{h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\varepsilon'}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} dp_y dp_z \\ &= \frac{2}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[1+e^{\beta(\varepsilon'-\varepsilon_f)}\right] dp_y dp_z \end{aligned} \tag{8}$$

ومن المعادلة:

$$\varepsilon' - \varepsilon_f = \phi + \frac{p_y^2 + p_z^2}{2m}, \tag{9}$$

وباستخدام مفكوك اللوغاريتم $\ln[1-x] \approx x$, في الحالة $x << 1$ نجد أن:

$$\begin{aligned} n' &= \frac{2}{\beta h^3} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta\phi-\beta(\frac{p_y^2+p_z^2}{2m})} dp_y dp_z \\ &= \frac{2}{\beta h^3} e^{-\beta\phi} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\frac{p_y^2}{2m})} dp_y}_{2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi m/\beta}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\frac{p_z^2}{2m})} dp_z}_{2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi m/\beta}} \\ &= \frac{4\pi m}{\beta^2 h^3} e^{-\beta\phi} \end{aligned} \tag{10}$$

وتُعرف لكثافة التيار المنبعث باتجاه المحور x (J_x) بالعلاقة:

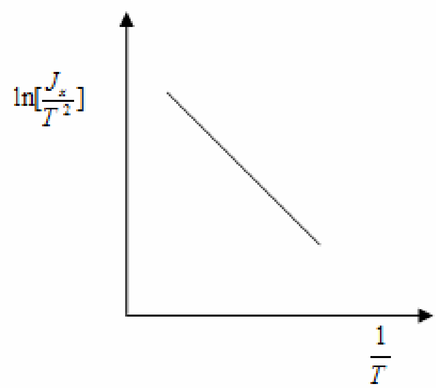
$$\begin{aligned} J_x &= en' = \frac{4\pi me}{h^3} (k_B T)^2 e^{-\beta\phi} \\ &= aT^2 e^{-\phi/k_B T} , \end{aligned} \tag{11}$$

حيث:

$$a = \frac{4\pi m e k_B^2}{h^3} = 1.2\times10^6 \ \ \mathrm{A\ m^{-2}K^{-2}}$$

والمعادلة (11) تسمى صيغة رتشاردسون- دخمان Richardson – Dushman formula . مع ملاحظة أنه لم يأخذ في هذا الاشتقاق احتمال انعكاس الالكترونات من سطح المعدن.

ولحساب دالة الشغل ϕ عملياً تستخدم المعادلة (11) حيث يتم قياس J_x عند درجات الحرارة المختلفة، ثم ترسم العلاقة بين $\ln[\frac{J_x}{T^2}]$ و $\frac{1}{T}$، كما هو موضح في شكل (2) لنحصل على علاقة خطية. وميل الخط المستقيم يعبر عن قيمة الثابت $-\frac{\phi}{k_B}$.



شكل (٢): العلاقة بين $\ln[\frac{J_x}{T^2}]$ و $\frac{1}{T}$ لصيغة رتشاردسون – دخمان

II– أشباه الموصلات (Semiconductor)

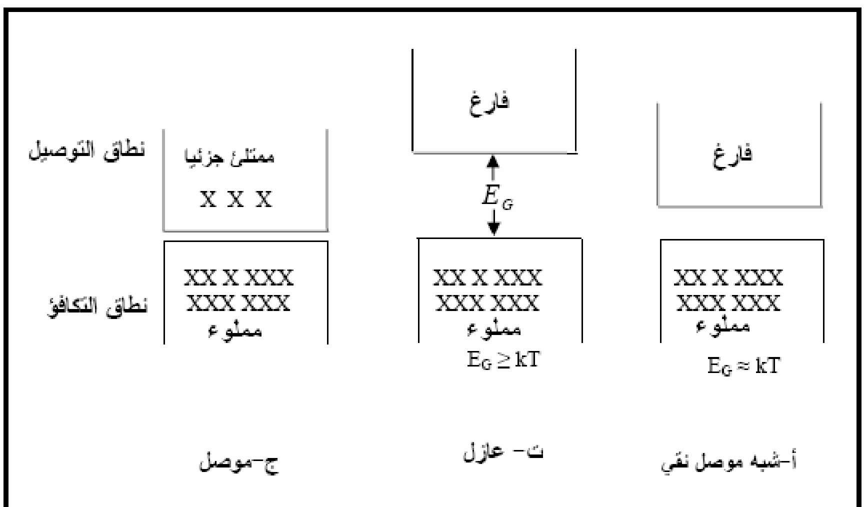
تعرف أشباه الموصلات بأنها مواد عازلة ولكنها تكتسب صفات الموصلات بارتفاع درجات الحرارة. ومن أشباه الموصلات ما هو ذاتي، تتكون من مواد نقية ولا يوجد بها شوائب، والأخرى مطعمة بمواد مختلفة. وأشباه الموصلات لها تطبيقاتها المهمة في الصناعة والحياة العامة.

وتقسم المواد من حيث قدرتها على توصيل التيار الكهربائي إلى ثلاثة أقسام :

1. الموصلات : **conductors**
2. العازلات : **insulators**
3. أشباه الموصلات : **semiconductors**

في المواد الموصلة، مثل النحاس، نجد أن نطاق التكافؤ مملوء بالإلكترونات بينما يكون نطاق التوصيل فارغاً او مملوء جزئياً بالإلكترونات عند درجة الحرارة العادية، انظر الشكل (3) ج.

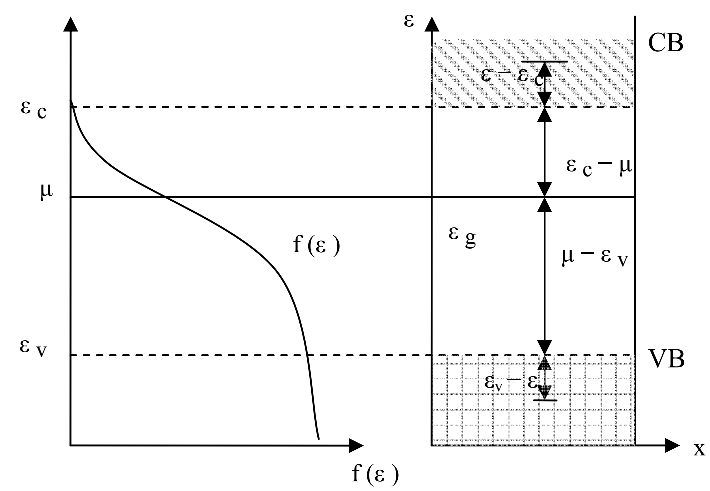
وتكون الفجوة بين نطاق التوصيل ونطاق التكافؤ صغيرة جدا. وهكذا تتميز المواد الموصلة بقدرتها على التوصيل. أما في المواد العازلة، مثل الزجاج، يكون عدد الالكترونات الحرة فيها قليل ويكون نطاق التكافؤ مملوء بالإلكترونات ونطاق التوصيل خالياً تماما منها وتكون الفجوة بينهما كبيرة جدا، $E_g >> k_B T$، كما بالشكل (3) ت. لهذا لا يمكن السماح للإلكترونات بالانتقال من نطاق التكافؤ إلى نطاق التوصيل في درجات الحرارة العادية حيث يلزم الالكترونات مقدار كبير من الطاقة لتتحرر وتنتقل إلى نطاق التوصيل، نظراً لكبر الفجوة. أما في أشباه الموصلات، مثل مادة الجرمانيوم، فتكون قريبة الشبه في توزيع الذرات من المواد العازلة حيث أن نطاق التكافؤ مملوء في حين أن نطاق التوصيل يكون فارغاً ولكن الفجوة بينهما صغيرة نسبيا، $E_g \sim k_B T$، كما هو موضح في شكل(3) أ. وعند رفع درجة حرارة المادة فإنها تكتسب طاقة تمكن إلكتروناتها من التحرر والانتقال من نطاق لأخر فتزيد من قدرتها على التوصيل.



شكل (3): تقسيم المواد من حيث قدرتها على التوصيل الكهربائي

جدول(1): مقارنة لبعض الصفات المختلفة لكل من المواد الموصلة والعازلة وأشباه الموصلات

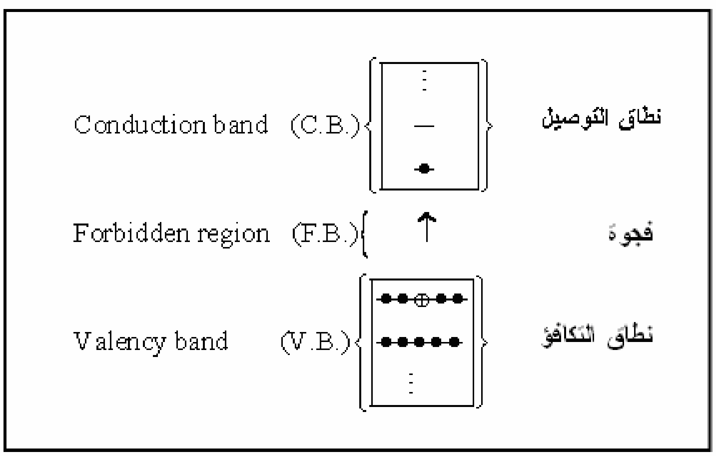
أشباه الموصلات	المواد العازلة	المواد الموصلة	وجه المقارنة
الجرمانيوم - السيلكون - كبريتيد الرصاص	الزجاج - الخزف - الكوارتز - البورسلين	الفلزات (الفضة - النحاس - الحديد - الرصاص)	أمثلة
$\left(10^{-5}-10^{+4}\right)$	$\left(10^{6}-10^{16}\right)$	$\left(10^{-5}-10^{-8}\right)$	المقاومة النوعية (ρ) $(\Omega.\mathrm{m})$ أوم . متر
مملوء بالإلكترونات	مملوء بالإلكترونات	مملوء بالإلكترونات	نطاق التكافؤ
خالى من الالكترونات تماما فى درجة الصفر المطلق	خالى من الالكترونات الحرة عند درجات الحرارة العادية	مملوء جزئيا بالإلكترونات عند درجات الحرارة الاعتيادية	نطاق التوصيل
$(0.2 \rightarrow 2.5)$	$(5\sim)$	$(0.01\sim)$	طاقة الفجوة $\left(E_g\right)$ (eV)
تنخفض المقاومة بشكل كبير	تنخفض المقاومة ولكنها تظل كبيرة لدرجة أن المادة الصلبة تنصهر قبل أن تصبح موصلة	تزداد المقاومة	تأثير رفع درجة الحرارة على المقاومة



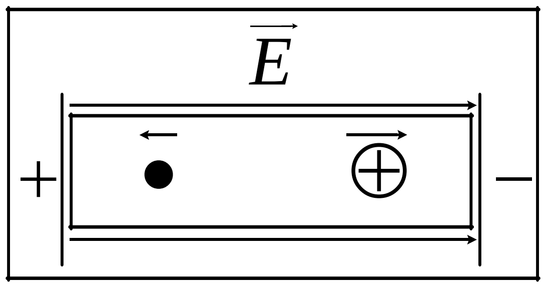
شكل(4): توزيع دالة فيرمي حيث يقع مستوى فيرمي μ داخل فجوة الطاقة

نموذج مبسط لحساب معامل التوصيل الكهربي لأشباه الموصلات

سوف نتعامل هنا مع أشباه الموصلات الذاتية، والتي تتكون من مواد نقيـة ولا يوجـد بهـا شوائب، وهي متعادلة كهربياً. ولأشباه الموصلات الذاتية، وبارتفاع درجة الحرارة لقيمة معينة وبتأثير الاهتزازات الشبكية، نجد أنه بانتقال إلكترون (•) من نطـاق التكـافؤ إلـى نطـاق التوصيل فإنه يترك مكانه فراغاً (hole ⊕) موجباً، انظر الشكل التالي.



وبانعدام المجال الكهربي الخارجي نجد أن الالكترونات والفراغات تتحرك باتجاهات عشوائية ولا ينتج عنها أي تيار كهربي. وبوجود مجال كهربي خارجي $\left(\vec{E}\right)$ نجد أن الالكترونات والفراغات يبدآن في التسارع وتزداد سرعتاهما في اتجاهين متضادين باتجاه أقطاب المجال الكهربي كما بالشكل المرافق.



لكن الزيادة في السرعة هذه لن تكون غير محدودة، حيث أنها تصطدم بعوائق كثيرة مثل أنويه الذرات والشوائب الموجودة بالمادة. وباعتماد سرعة الالكترونات والفراغات على متوسط المسار الحر "λ" (Mean free path) نجد انه للحصول على تيار كهربي يجب على الالكترونات والفراغات أن تكتسب سرعة متوسطة أكبر مما يفقد خلال التصادمات. هذه السرعة المكتسبة بتأثير المجال الكهربي الخارجي تسمى سرعة الانسياق (Drift velocity) وسوف نرمز لها بالرمز $\left(\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{d}}\right)$ وهي تتناسب مع شدة المجال الكهربي الخارجي $\left(\vec{E}\right)$، بمعنى أن:

$$\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{d}} \propto \vec{E}$$
$$= \mu \vec{E} \qquad (1)$$

حيث الثابت μ يسمى معامل الحركية للجسيمات حاملة الشحنة، وهي الالكترونات السالبة أو الفراغات الموجبة. وللتبسيط فإن μ سوف تسمى "الحركية"، وتُعرف $\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{d}}$ بسرعة الانسياق التي يكتسبها الجسيم الحامل للشحنة مقسومة على وحدة شدة المجال الكهربي.

في أشباه الموصلات الذاتية، نجد أن الالكترونات تتحرك في نطاق التوصيل شبه الخالي، والفراغات الموجبة تتحرك في نطاق التكافؤ المملوء. لذلك نجد أن الخواص الفيزيائية مثل الحركية والموصلية والكتلة تختلف من نوعية الجسيم حامل الشحنة.

وللتعامل رياضياً مع المسألة، دعونا نعرف الكميات التالية:

$n_e, \mu_e, \mathrm{v}_{\mathrm{de}}$ هي بالترتيب، من اليسار، السرعة الانسياقية والحركية وتركيز (كثافة) الالكترونات في نطاق التوصيل.

$n_h, \mu_h, \mathrm{v}_{\mathrm{dh}}$ هي بالترتيب، من اليسار، السرعة الانسياقية والحركية وتركيز (كثافة) الفراغات في نطاق التكافؤ.

حيث استخدمنا الدليل السفلي e للتعبير عن الإلكترون و h للتعبير عن الفراغ الموجب.

ومنها نجد أن كثافة التيار لكل من الالكترونات والفراغات تحسب من العلاقة:

$$J_e = n_e e\, \mathrm{v}_{\mathrm{de}} E = n_e e\, \mu_{\mathrm{e}} E \qquad (2)$$

$$J_h = n_h e\, \mathrm{v}_{\mathrm{dh}} E = n_h e\, \mu_{\mathrm{h}} E \qquad (3)$$

وبالمقارنة بقانون أوم الذي يعرف بالصورة:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \qquad (4)$$

حيث σ تعبر عن معامل التوصيل الكهربي للمادة، نجد أن معامل التوصيل لكل من الالكترونات والفراغات تحسب من العلاقة:

$$\sigma_e = n_e e\, \mu_{\mathrm{e}} \qquad (5)$$

$$\sigma_h = n_h e\, \mu_{\mathrm{h}} \qquad (6)$$

ويكون معامل التوصيل الكهربي الكلي للمادة هو:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_e + \sigma_h \\ &= e\left(n_e\, \mu_{\mathrm{e}} + n_h\, \mu_{\mathrm{h}}\right) \end{aligned} \qquad (7)$$

ولأشباه الموصلات الذاتية نعلم أن:

$$\begin{aligned} & n_e = n_h = n_i \\ & \Rightarrow \sigma = e n_i \left(\mu_e + \mu_h\right) \end{aligned} \qquad (8)$$

ومن المهم أن نلاحظ أنا هنا قد أخذنا في الاعتبار انسياق الشحنات، والذي ينتج عنه ما يسمى " *تيار انسياقي*" ، نتيجة لتأثير المجال الكهربي الخارجي. وقد تم إهمال أي تأثيرات أخرى مثل الانتشار **Diffusion** ، الناتج من التدرج في تركيز المواد المضافة إلى أشباه الموصلات الذاتية، وينتج عنه ما يسمى " *تيار انتشاري*" .

إذا افترضنا أن معامل الحركية لحامل الشحنة لا يعتمد على درجة الحرارة، نجد أن معامل التوصيل الكهربي للمواد يظهر اعتماده على درجة الحرارة نتيجة لتغير التركيز في حوامل

الشحنات، n_i ، مع درجة الحرارة. ومن السهل إثبات أن:

$$n_i = 2\frac{\left(2\pi k_B T\right)^{3/2}}{h^3}(m_e^* m_h^*)e^{-\beta\varepsilon_g/2} \qquad (9)$$

حيث m_e^* هي كتلة الإلكترون المؤثرة (Effective electron mass) و m_h^* هي كتلة الفراغ المؤثرة (Effective hole mass). و T هي درجة الحرارة المطلقة.

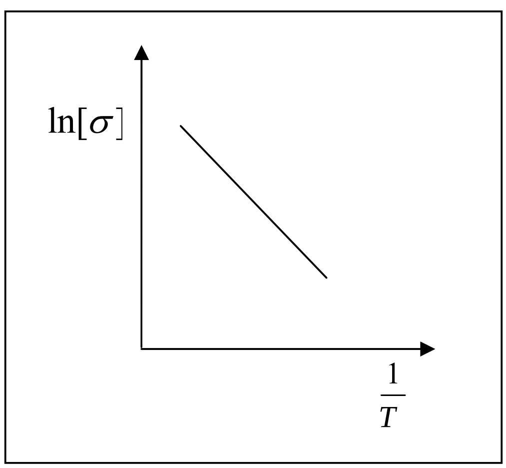
بالتعويض من (9) في (8) نحصل على:

$$\sigma = e\left(\mu_e + \mu_h\right)2\frac{\left(2\pi k_B T\right)^{3/2}}{h^3}(m_e^* m_h^*)e^{-\beta\varepsilon_g/2} \qquad (10)$$

وبأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين بالمعادلة (10) نحصل على:

$$\ln\sigma = -\left(\frac{\varepsilon_g}{2k_B}\right)\frac{1}{T} + \frac{3}{2}\ln T + \text{constant} \qquad (11)$$

والحد الأول من الطرف الأيمن للمعادلة (11) هو الأكبر والأهم من حيث القيمة. وبرسم المتغير $\ln\sigma$ مع المتغير $\frac{1}{T}$ نحصل على خط مستقيم ميله هو $\left(\frac{\varepsilon_g}{2k_B}\right)$ ومنه يحدد قيمة ε_g لأشباه الموصلات.



نموذج مطور لحساب معامل التوصيل الكهربي لأشباه الموصلات

طور العالم فيرمي النموذج المبسط لحساب معامل التوصيل الكهربي لأشباه الموصلات وذلك باستخدام دالة فيرمي بالصورة:

$$f_e(\varepsilon) = \frac{n(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}+1}, \tag{12}$$

وبمعلومية ε_F و T نجد أن عدد الالكترونات بنطاق التوصيل هي:

$$N_e = \sum_{CB} f_e(\varepsilon) \tag{13}$$

وعدد الفراغات بنطاق التكافؤ هي:

$$\begin{aligned} N_h = 1 - N_e &= \sum_{VB}\left[1 - f_e(\varepsilon)\right] \\ &= \sum_{VB} f_h(\varepsilon) \end{aligned} \tag{14}$$

حيث

$$f_h(\varepsilon) \equiv 1 - f_e(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_F-\varepsilon)}+1} \tag{15}$$

تعطي احتمالية أن مستوى الطاقة (ε) قد فقد إلكترون، أو بتعبير مكافئ أن مستوى الطاقة (ε) مملوء بفراغ موجب.

وتعرف كثافة المستويات بالشكل السابق بالقيم:

$$\left.\begin{aligned} g_e(\varepsilon) &= 4\pi V\left(\frac{2m_e}{h^2}\right)^{3/2}(\varepsilon-\varepsilon_c)^{1/2} \qquad && \varepsilon > \varepsilon_c \\ g(\varepsilon) &= 0 && \varepsilon_v < \varepsilon < \varepsilon_c \\ g_h(\varepsilon) &= 4\pi V\left(\frac{2m_h}{h^2}\right)^{3/2}(\varepsilon_v-\varepsilon)^{1/2} && \varepsilon < \varepsilon_v . \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

ومنها نجد أن كثافة الالكترونات في نطاق التوصيل n_e تحسب كالتالي:

$$\begin{aligned} n_e \equiv \frac{N_e}{V} &= \frac{1}{V}\int_{\varepsilon_c}^{\infty} f_e(\varepsilon) g_e(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi\left(2m_e^{*3}\right)^{1/2}}{h^3}\int_{\varepsilon_c}^{\infty}\frac{(\varepsilon-\varepsilon_c)^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\varepsilon_F)}+1} d\varepsilon \end{aligned} \tag{17}$$

وقد استخدمنا النهاية الصغرى للتكامل وهي ε_c لأن الالكترونات الحرة توجد فقط عندما $\varepsilon > \varepsilon_c$. حيث أننا اعتبرنا أن $\varepsilon_g > k_B T$ ، لذلك فإنه لجميع القيم نجد أن القيمة الأسية كبيرة وبالتالي يمكن إهمال القيمة +1 في البسط بحيث نضع:

$$e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/k_B T}+1 \approx e^{(\varepsilon-\varepsilon_F)/k_B T} \qquad (18)$$

لنجد أن:

$$\begin{aligned} n_e &= \frac{8\pi\left(2m_e^{*3}\right)^{1/2}}{h^3} e^{\beta\varepsilon_F} \int_{\varepsilon_c}^{\infty} (\varepsilon-\varepsilon_c)^{1/2} e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon \\ &= \frac{8\pi\left(2m_e^{*3}\right)^{1/2}\left(k_B T\right)^{3/2}}{h^3} e^{-\beta(\varepsilon_c-\varepsilon_F)} \underbrace{\int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \end{aligned} \qquad (19)$$

حيث استخدمنا التعويض $x = \left(\varepsilon-\varepsilon_c\right)/k_B T$. وتبسط المعادلة (19) إلى:

$$n_e = n_c e^{-\beta(\varepsilon_c-\varepsilon_F)}, \qquad n_c = 2\left(\frac{2\pi m_e^* k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \qquad (20)$$

حيث n_c تعرف بالتركيز الكمي لالكترونات التوصيل وهى:

$$\begin{aligned} n_c &= \frac{2\left(2\pi m_e^* k_B T\right)^{3/2}}{h^3} \\ &= 4.82\times10^{15}\left(\frac{m_e^*}{m_e}\right)^{3/2} T^{3/2}. \end{aligned} \qquad (21)$$

بالنسبة للفراغات الموجبة، فإن احتمال وجود فراغ كاحتمال عدم وجود إلكترون، ولذلك للفراغات، نجد أن دالة التوزيع:

$$n_h(\varepsilon) = 1 - n_e(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_F-\varepsilon)}+1} \qquad (22)$$

لذلك فإن كثافة الفراغات في نطاق التكافؤ n_h تحسب كالتالي:

$$n_h = \frac{N_h}{V} = \frac{1}{V}\int_{\varepsilon_V}^{0} f_h(\varepsilon) g_h(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi\left(2m_h^{*3}\right)^{1/2}}{h^3}\int_{-\infty}^{0}\frac{(\varepsilon_v-\varepsilon)^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon_F-\varepsilon)}+1}d\varepsilon$$

$$\approx \frac{8\pi\left(2m_h^{*3}\right)^{1/2}}{h^3}\int_{-\infty}^{0}(\varepsilon_v-\varepsilon)^{1/2}e^{-\beta(\varepsilon_F-\varepsilon)}d\varepsilon$$

$$n_h = \frac{8\pi\left(2m_h^{*3}\right)^{1/2}}{h^3}e^{-\beta(\varepsilon_v-\varepsilon_F)}\int_{-\infty}^{0}(\varepsilon_v-\varepsilon)^{1/2}e^{-\beta(\varepsilon_v-\varepsilon)}d\varepsilon$$

$$= n_v e^{-\beta(\varepsilon_v-\varepsilon_F)}, \qquad n_v = \frac{2\left(2\pi m_h^{*3} k_B T\right)^{3/2}}{h^3} \tag{23}$$

حيث n_v تعرف بالتركيز الكمي لفراغات نطاق التكافؤ. حقيقةً فإن نهاية التكامل السفلى للمعادلة (23) ليست القيمة $-\infty$ تحديداً، ولكن حيث أن نطاق التكافؤ عريض جداً بالنسبة للقيم المؤثرة بأعلى الشريط، بالتالي يمكن استخدام الحد $-\infty$. وبالنسبة لأشباه الموصلات الذاتية فإن الطريقة الوحيدة للحصول على إلكترون في نطاق التوصيل هو انتزاعه من نطاق التكافؤ، لذلك يجب أن نساوي:

$$n_e = n_h = n_i(T) \tag{24}$$

حيث $n_i(T)$ هو تركيز الحامل الذاتي (Intrinsic carrier concentration) ويعطى بالمعادلة:

$$n_e \times n_h = n_i^2 = n_v n_c e^{-\beta(\varepsilon_c-\varepsilon_v)} = n_v n_c e^{-\beta\varepsilon_g} \tag{25}$$

والمعادلة (25) لا تحتوي على μ ولذلك فإن $n_i(T)$ تعتبر كمية ثابتة عند درجة حرارة ثابتة.

ومن (25) نجد أن:

$$n_i(T) = \frac{2}{h^3}\left(2\pi m_e k_B T\right)^{3/2}\left(\frac{m_e^* m_h^*}{m_e^2}\right)^{3/4} e^{-\beta\varepsilon_g/2} \tag{26}$$

ومن المعادلتين (20) و(23) نجد أن النسبة $\frac{n_e}{n_h}$ تعطي:

$$\frac{n_e}{n_h} = \frac{n_c}{n_v} = e^{-2\varepsilon_F+\beta(\varepsilon_c+\varepsilon_v)}$$

ومنها نجد أن:

$$\begin{aligned}\varepsilon_F &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_c + \varepsilon_v) + \tfrac{1}{2} k_B T \ \ln\left(\frac{n_v}{n_c}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_c + \varepsilon_v) + \tfrac{3}{4} k_B T \ \ln\underbrace{\left(\frac{m_h^*}{m_e^*}\right)}_{\approx 1} \\ &\simeq \tfrac{1}{2}(\varepsilon_c + \varepsilon_v) \qquad (27)\end{aligned}$$

من المعادلة (27) نلاحظ التالي:

1- مستوى طاقة فيرمي يقع بمنتصف الفجوة ومكانه يعتمد بطريقة خطية على درجة الحرارة المطلقة.

2- عند تحقق الشرط $\varepsilon_g = \varepsilon_c - \varepsilon_v$ فإن:

$$\varepsilon_F = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_c + \varepsilon_v) = \varepsilon_v + \tfrac{1}{2}\varepsilon_g ,$$

ولذاك فإن مستوى فيرمي يقع بمنتصف الفجوة تماماً وقيمته لا تعتمد على درجة الحرارة.

والجدول 2 يعطينا بعض القيم لبعض الكميات الفيزيائية

جدول(2): القيم العملية لبعض الكميات الفيزيائية لمادتي الجرمانيوم و السيليكون

الكميةالفيزيائية	الرمز	جرمانيوم (Ge)	سيليكون (Si)
كتلة الإلكترون المؤثرة	m_e^*	$0.22\ m_e$	$1.08\ m_e$
كتلة الفراغ المؤثرة	m_h^*	$0.37\ m_e$	$0.59\ m_e$
الحركية للإلكترونات	μ_e	0.38	0.14
الحركية للفرغات	μ_h	0.20	0.05
طاقة الفجوة (عند 77 °K)	ε_g (eV)	0.73	1.147
طاقة الفجوة (عند 300 °K)	ε_g (eV)	0.66	1.1
الكثافة الذاتية (عند 300 °K)	$n_i\ (m^{-3})$	1.01×10^{16}	2.37×10^{19}

III - تطور حياة النجوم

"Stellar evolution"

في مراحل العمر الأولى لتكون النجوم تتجمع كمية مهولة من الغازات (سحب غازية، سدم)، غالباً ما تتكون من غاز الهيدروجين ذي مناطق مختلفة الكثافة. و تنكمش السحب على بعضها البعض تحت الضغط الناتج عن الجاذبية (Gravitational pressure)، وهو ضغط سالب يؤدي الى تقويض (تقليص) السحابة. ومع هذا التقاص يزداد تصادم الغازات فيما بينها بسرعات كبيرة ويسخن الغاز حتى يصبح حار جداً إلى درجة أن تندمج ذرات الهيدروجين عند تصادمها لتكون ذرات الهيليوم، وهي مرحلة ولادة النجم. وهذا التفاعل يشبه القنبلة الاندماجية الهيدروجينية وهي التي تجعل النجم مشعاً. وهذه الحرارة الإشعاعية تزيد من ضغط الغازات للخارج. وعندما يتزن الضغطان، التجاذبي (Gravitational) والحراري (Thermal)، يتوقف الغاز عن التقاص وتبقى النجوم مستقرة لفترة طويلة. ومع التقدم في عمر النجوم نجد أن الهيدروجين ينضب، ويصبح الضغط الحراري غير كافي لتحمل ضغط الجاذبية فيبدأ النجم في التقاص. ولأن عملية التقاص هذه تحدث أديباتيكياً فإننا نجد أن ديناميكية التقاص تتسبب في تسخين الهيليوم لدرجة أنه يبدأ في الظهور أنواع جديدة من الاحتراق النووي. فعلى سبيل المثال تظهر هنا معادلتان نوويتان مهمتان، هما:

$$^{4}\text{He}+{}^{4}\text{He} \rightarrow {}^{8}\text{Be}+ \gamma - 95 \text{ keV},$$

$$^{4}\text{He}+{}^{8}\text{Be} \rightarrow {}^{12}\text{C}+ \gamma + 7.4 \text{ keV},$$

فالمعادلة النوويه الأولى تحتاج لدرجات حرارة مرتفعة لبدء التفاعل، بينما الثانية تبدأ في تسخين النجم، وذلك بالإضافة إلى العمليات الأخرى والتي تحتوي على إنتاج العناصر الثقيلة مثل الأوكسوجين والنيتروجين. وفي آخر الأمر، ومع استهلاك الهيليوم وتكون العناصر الثقيلة، تقف العمليات حول عنصر الحديد، حيث لا يتبقى أي عمليات نووية مولدة للحرارة (Exothermic). وعند الوصول إلى هذه المرحلة فإنه لا يوجد أي عائق لتقاص النجم ماعدا ضغطاً يسمى ضغط غاز فيرمي (Degeneracy pressure) وهو المسئول الأخير عن مقاومة التقاص.

ويمكن تقدير هذا الضغط إذا اعتبرنا الفرضين التاليين:

1- أن كثافة المادة ثابتة (لا تعتمد على نصف القطر)

2- وأن النجم كروي الشكل.

في هذه الحالة نجد أن طاقة الجهد الجاذبي تحسب بالمعادلة:

$$dU_g = -G\frac{\left(\frac{4}{3}\pi r^3\rho\right)\left(4\pi r^2\rho dr\right)}{r} = -G\frac{\left(4\pi\rho\right)^2\left(r^4 dr\right)}{3}$$

حيث إن القوس الأول بالمعادلة العلوية يمثل كتلة كرة نصف قطر r والقوس الثاني هو كتلة القشرة ذو السمك dr والتي تبعد مسافة r من المركز. وتكامل المعادلة الأخيرة يعطي:

$$U_g = -G\frac{\left(4\pi\rho\right)^2}{3}\int_0^R r^4 dr = -G\frac{\left(4\pi\rho\right)^2 R^5}{15}$$

ومن تعريفنا للكثافة ρ، نجد أن:

$$\left(\frac{4}{3}\pi R^3\rho\right) = M = Nm_n$$

حيث m_n هي كتلة النيوكلون (بروتون أو نيوترون). وبالتعبير عن الكثافة والجهد بدلالة الحجم V، مع العلم أن $\rho = \frac{Nm_n}{V}$ و $R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$، نجد أن:

$$U_g = -\frac{3}{5}G\,(Nm_n)^2\left(\frac{4\pi}{3V}\right)^{1/3}$$

والآن، بمساواة ضغط الجاذبية (وهو ضغط بإشارة سالبة، يميل إلى تقليص النجم) وهو:

$$P_g = -\frac{\partial U_g}{\partial V} = \frac{1}{5}G\,(Nm_n)^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}V^{-4/3}$$

بضغط غاز فيرمي $\left(\text{Degeneracy pressure}\right)$ (الذي يميل إلى مقاومة التقلص) وهو:

$$P_{deg} = \frac{\hbar^2\pi^3}{15m_e}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{5/3} = \frac{\hbar^2\pi^3}{15m_e}\left(\frac{3N_e}{\pi}\right)^{5/3}V^{-5/3} *$$

حيث N_e هو عدد الإلكترونات، وسوف نأخذ عددها تقريباً بنصف عدد النيكلونات، أي $N_e \sim \frac{N}{2}$، فنجد أن حالة الاتزان بين الضغطين، أي $P_g = P_{deg}$، يتحقق عندما:

$$V^{1/3} = \frac{3\pi\hbar^2}{4Gm_e m_n^2 (2N)^{1/3}}$$

أو عندما يكون نصف القطر الحرج للنجم هو:

$$R^* = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \frac{3\left(3\pi^2\right)^{1/3}\hbar^2}{8Gm_e m_n^2 N^{1/3}} **$$

واجب منزلي:

أ- بمعلومية أن كتلة شمسنا هي $M_\odot = 2\times10^3$ kg، اثبت أن $R^* = 7\times10^3$ km.

ب- قدر متوسط طاقة الحركة لكل من الإلكترون والبروتون وقارنها مع طاقة السكون.

$$\text{Ans}: \frac{\langle E\rangle_e}{m_e c^2} = 0.23, \quad \frac{\langle E\rangle_n}{m_n c^2} = 1.7\times10^{-7}$$

النجوم النيترونية (Neutron stars)

هي نجوم معظم تكوينها من النيوترونات، ولذلك فإن كتلتها "M_n" تصبح أضعاف كتلة الشمس. وبالنسبة للعمر، فتعتبر في مرحلة الشيخوخة. ونجد أن عدد النيترونات تبدأ في الازدياد مع زيادة تقلص النجوم تبعاً للمعادلة:

$$e^- + p \rightarrow n + h\nu$$

حتى يتم تحول جميع الإلكترونات والبروتونات إلى نيوترونات. وحيث أن سرعة النيترونات أقل كثيراً من سرعة الضوء، فإن قوانين النسبية لآينشتاين لا تطبق عليها. ونستطيع تقدير نصف قطر النجم الحرج وذلك عند تساوي ضغط الجاذبية مع ضغط غاز فيرمي وذلك بوضع كتلة النيوترون موضع كتلة الإلكترون بالمعادلة R^* واستخدام التعويض $N_e = N$ بمعادلة P_g بدلاً من $N_e \sim \frac{N}{2}$ لنحصل على نصف القطر الحرج للنجم النيتروني بالعلاقة:

$$R_n^* = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \frac{\left(81\pi^2\right)^{1/3}}{16}\frac{\hbar^2}{Gm_n^3 N^{1/3}}$$

واجب منزلي: للنجم النيتروني ذي النسبة $M_n / M_\odot = 7$، اثبت أن $R_n^* = 6.5$ km!!.

الأقزام البيضاء (White dwarf)

نجم وصل إلى مرحلة الوهن. يتكون كليةً في الغالب من إلكترونات. وكتلة النجم أكبر قليلاً من كتلة الشمس ولكن حجمه أكبر قليلاً من حجم الأرض، وكثافته مرتفعة جداً.

هذا النوع من النجوم يكون درجة حرارة قلبه (مركزه) مرتفعة جداً نتيجه للاندماج النووي، وتصل إلى القيمة 10^7 K. وتصبح كل الذرات في حالة تأين كامل، مخلفةً وراءها سحابة مهولة من الإلكترونات الحرة. والنجوم في حالة الشيخوخة ينضب فيها الهيدروجين، وتتوقف العملية الاندماجية النووية، ويبدأ النجم في الانكماش. وبينما تقل الطاقة التثاقلية تكتسب الإلكترونات والأيونات طاقة حركية أعلى. وفى نجوم الأقزام البيضاء نجد أن عملية الانكماش نتيجة الجاذبية يعادلها ضغط غاز فيرمي الإلكتروني.

هناك أقزام بيضاء معروفة، أولها هو الشعرى اليمانية "Sirius (B)" من كوكبة الكلب الأكبر "Ganis major". وضغط الغاز الإلكتروني بها يمكن تقديره من معادلة الغاز المثالي لفيرمي وهي:

$$P_{deg} = \frac{2}{5}\left(\frac{N}{V}\right)\varepsilon_F \qquad\qquad T << T_F$$

وباستخدام القيم المميزة للنجم وهي:

$$\text{Mass "}M = 2.09\times10^{30}\text{ kg"}$$

$$\text{Radius "}R = 5.57\times10^{6}\text{ m"}$$

$$\text{Volume "}V = 7.23\times10^{20}\text{ m}^3\text{"}$$

مع وجود الافتراضات التالية:

1- الاندماج النووي قد توقف، بمعنى أن كل نويات الهيدروجين تحولت إلى نويات الهيليوم في قلب النجم.

2- غاز الهيليوم كله قد تأين، بمعنى أن كل ذرة هيليوم تعطينا إلكترونين.

3- عدد النيكلونات بالنجم تساوي كتلة النجم مقسمة على وزن النيوكلون الواحد.

لذلك فإن:

$$1.26\times10^{57} = \frac{2.09\times10^{30}}{1.66\times10^{-27}} = \text{عدد النيكلونات}$$

وحيث أن عدد الإلكترونات بذرة الهيليوم هو اثنان، أي نصف عدد النيكلونات، لذلك فإن عدد الإلكترونات يصبح: $N = 0.63\times10^{57}$. بالتالي فإن طاقة فيرمي تصبح:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{3\mathrm{N}}{8\pi\mathrm{V}}\right)^{2/3} = 5.33\times10^{-14}\ \mathrm{J} = 0.33\ \mathrm{MeV}.$$

ومنها فإن درجة حرارة فيرمي للقزم الأبيض تكون:

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} = 3.9\times10^{9}\ \mathrm{K}$$

وحيث إن درجة حرارة مركز القزم الأبيض هي 10^7 K، فمعنى ذلك أننا يجب أن نتعامل مع إلكترونات القزم الأبيض من خلال نظرية ميكانيكا الكم على أنها غاز فيرمي في درجة الصفر المئوي.

وكتقريب مقبول، فإن ضغط سحابة الإلكترونات (غاز فيرمي) يحسب من خلال المعادلة:

$$P_{deg} = \frac{2}{5}\left(\frac{N}{V}\right)\varepsilon_F = \frac{2}{5}\left(\frac{0.63\times10^{57}}{7.23\times10^{20}}\right)(5.33\times10^{-14}) = 1.8\times10^{22}\ \mathrm{Pa}$$

$$= 1.8\times10^{17}\ \mathrm{atm!!!}$$

وهذا الضغط المهول كافي، وهو الوحيد المتبقي، لمقاومة الضغط التجاذبي لتقلص النجم.

واجب منزلي: اثبت أن نصف القطر الحرج للقزم الأبيض يعطى بالعلاقة:

$$R^*_{wd} = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} = \frac{\left(81\pi^2\right)^{1/3}}{16}\frac{\hbar^2}{Gm_e^3N^{\ 1/3}}$$

ومنها تحقق من أن: $R^*_{wd} \approx 7\times10^{6}$ m.

جدول (3): درجات الحرارة التقريبية المميزة لغاز فيرمي لبعض الحالات

$T_F\,(\mathrm{K})$	الجسيمات	حالة المادة
0.3	ذرات	سائل الهيليوم ^{3}He
10^4	إلكترونات	المعادن
10^9	إلكترونات	نجوم الأقزام البيضاء
10^{11}	نيكلونات	مادة نووية
10^{12}	نيترونات	نجوم نيترونية

الثقب الأسود (Black hole)

منطقة في منظومة الزمكان لها صفات شاذة، أي تخالف القواعد والقوانين الفيزيائية، وقوة جاذبية جبارة يستحيل على أي شئ الإفلات من جاذبيتها بما في ذلك أشعة الضوء. لذلك تبدو هذه المنطقة غير مرئية. وهي تعتبر من النجوم التي أفلت. بالطبع لحساب شروط عدم إفلات الضوء من الثقب الأسود يتطلب منا أن نتعامل مع الفوتون كجسيم له كتلة تثاقلية. بالطبع هذا يتيح لنا حساب طاقة الإفلات لأسرع جسيم معروف لنا. وعندما تتساوى طاقة الهروب مع طاقة الفوتون، نستطيع أن نقول أن هناك ثقب أسود.

ونستطيع أن نحسب نصف القطر الحرج للثقب الأسود من علاقة إزاحة الجاذبية الحمراء:

$$f = f_o\left[1 - G\,\frac{M}{rc^2}\right]$$

نستطيع أن نسأل متى نحصل على ثقب أسود؟ والإجابة واضحة أنه عندما تكون f مساويةً للصفر. وبمساواة المعادلة الأخيرة بالصفر نجد أن:

$$f = f_o\left[1 - G\,\frac{M}{R^*c^2}\right] = 0 \quad \Rightarrow \quad R^* = \frac{GM}{c^2}$$

وهذا معناه، انه بانكماش النجم إلى نصف القطر الحرج R^* فإن الضوء لن يستطيع الهرب من جاذبية النجم.

وقد حسب شفارتزشيلد نصف القطر الحرج للثقب الأسود بمعادلات النسبية العامة ووجد أن سرعة الهروب تعرف بالصورة:

$$\mathrm{v}_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

وهي القيمة الكلاسيكية لهروب جسم من كوكب كالأرض. وللتعامل مـع الـضوء يـتم تغيـر $\{\mathrm{v}_{\text{escape}} \to c\}$ لنجد أن نصف القطر الحرج هو:

$$R^* = \frac{2GM}{c^2}$$

ومن هنا نجد أن نصف القطر الحرج يعتمد على كتلة النجم فقط.

نجم نيتروني (Neutron star)

نجم وصل إلى مرحلة الشيخوخة. يتكون كلية فى الغالب من نيترونات، وهو صغير الحجم لا يزيد قطره عن بضعة أميال وكثافته

نجم وصل إلى مرحلة الشيخوخة. يتكون كلية فى الغالب من نيترونات، وهو صغير الحجم لا يزيد قطره عن بضعة أميال وكثافته مرتفعة جداً.

الفزم الأبيض (White dwarf)

نجم وصل إلى مرحلة الوهن. يتكون كليةً في الغالب من إلكترونات، وكتلته أكبر قليلاً من كتلة الشمس ولكن حجمه أكبر قليلاً من حجم الأرض وكثافته مرتفعة جداً.

Applications of Fermi – Dirac statistics