الباب السادس عشر

غاز فيرمي - ديراك المثالي

IDEAL FERMI – DIRAC GASES

الباب السادس عشر

غاز فيرمي - ديراك المثالي

Ideal Fermi – Dirac Gase

I – دالة فيرمي

كما ذكرنا سابقاً أن جسيمات فيرمي- ديراك المثالية، مثل الإلكترونات أو البروتونات .... والتي يتكون منها غاز فيرمي، هي جسيمات غير مميزة ولها حركة مغزلية تساوي أنصاف أعداد صحيحة فردية من القيمة $\hbar$ وتخضع لمبدأ الاستبعاد لباولي. وينص هذا المبدأ على أنه لا يجوز لأكثر من جسيم واحد إشغال أي مستوى طاقة. وتعتبر الجسيمات مثالية إذا أهملنا طاقة التفاعل بينهما. وقبل أن نبدأ في سرد خصائص غاز فيرمي، نود أن نوضح الفروق الأساسية بين غاز فيرمي وبين الغاز العادي ألا وهما:

1. **غاز فيرمي يمكن أن يكون له شحنة كهربية بينما الغاز العادي متعادل.**
2. **كثافة الجسيمات في غاز فيرمي كبيرة ~ 10^{29} لكل m^3، بينما كثافة الذرات والجزيئات في الغاز العادي تصل إلى ~ 10^{24} لكل m^3.**

ولدراسة خصائص جسيمات فيرمي، نجد أنها تتبع توزيع فيرمي- ديراك الأكثر احتمالاً وهو:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{n_i^*}{g_i} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1} \tag{1}$$

حيث الرمز n_i^* يمثل عدد جسيمات الفيرميون التي لها الطاقة ε_i و g_i هي درجة الانتماء وهى تعبر عن عدد المستويات التي تنتمي لنفس الطاقة ε_i.

ولدالة متصلة فإن المعادلة (1) تأخذ الصورة:

$$f(\varepsilon) = \frac{n(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}, \tag{2}$$

$f(\varepsilon)$ تسمى "دالة فيرمي" وتعطينا احتمالية أن أي مستوى طاقة، محدد بالقيمة ε، سـوف يملأ بجسيم واحد من الفيرميون. مع وجود الشرط $0 \le f(\varepsilon) \le 1$.

ملاحظات مهمة:

1- نظراً لوجود $+1$ في مقام المعادلتين (1) و(2) فإنه لا يوجد شروط معينة على قيم μ. لذلك فإن μ تأخذ القيم الموجبة أو السالبة.

2- إذا كانت $\varepsilon = \mu$ فإن الدالة $f(\varepsilon)$ تأخذ القيمة $\frac{1}{2}$ لأي درجة حرارة.

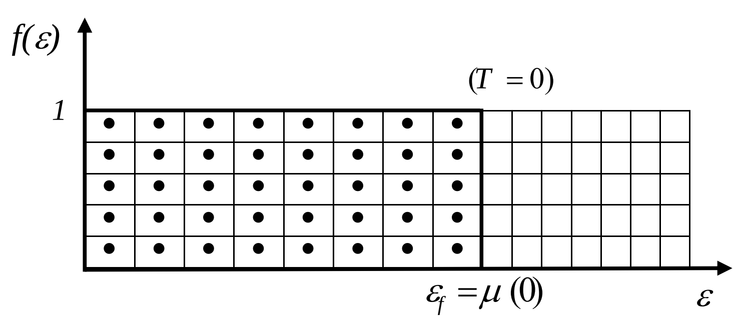
3- μ هي الجهد الكيميائي، وهي دالة في درجة الحرارة للنظام. وقيمة μ عند درجة حرارة الصفر المطلق تعرف بالرمز $\mu(0)$، وتساوي طاقة فيرمي ε_F. $\mu(0)$ تكتب أيضاً برموز مختلفة منها μ_o أو ε_F. وطاقة فيرمي تعبر عن أعلى مستوى طاقة يتم إشغالها بواسطة جسيمات فيرمي عند درجة الصفر المطلق، بالتالي فهي لا تعتمد على درجة الحرارة للنظام.

4- عند درجة حرارة الصفر المطلق، $T = 0$، نجد أن:

$$\frac{\varepsilon - \mu(0)}{k_B T} = \begin{cases} -\infty & \text{if} \quad \varepsilon < \mu(0) \\ \infty & \text{if} \quad \varepsilon > \mu(0) \end{cases}$$

ولذلك يعبر عن دالة فيرمي بالصورة الرياضية، انظر الشكل (1):

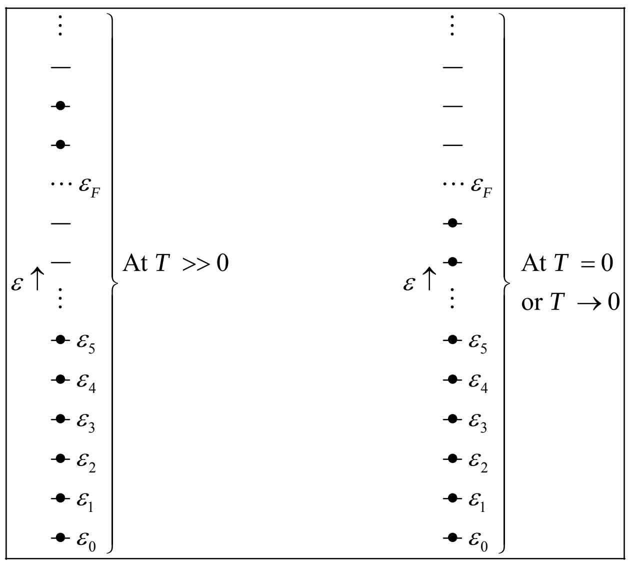
$$f(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \varepsilon < \mu(0) \\ 0 & \text{if} \quad \varepsilon > \mu(0) \end{cases} \tag{3}$$



شكل (1) دالة فيرمي عند درجة الصفر المطلق.

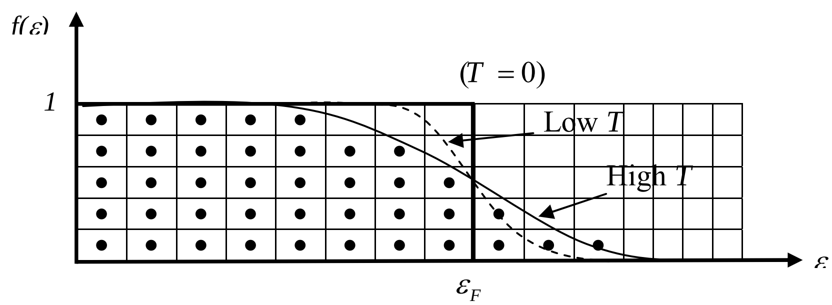
الشكل (1) يوضح المعادلة (3)، والتي تخبرنا بأنه عند درجة الصفر المطلق فإن جميع مستويات الطاقة ε، حيث $0 < \varepsilon \leq \mu(0)$، سوف تُملأ تماماً بجسيمات الفيرميون. وجميع المستويات ذات الطاقة $\varepsilon > \mu(0)$ سوف تصبح فارغة. وتبعاً لمبدأ الاستبعاد

لباولي فإن الجسيمات وعددها N سوف ترص بالترتيب في أقل مستويات للطاقة وعددها N، انظر الشكل 2-أ. وبالتالي فإن غاز الفيرميون سوف يصبح له طاقة حتى عند درجة الصفر المطلق.



شكل 2-أ تراص جسيمات فيرمي عند $T \to 0$، ب- عند $T >> 0$

وإذا رفعنا درجة الحرارة عن الصفر المطلق فإن جسيمات فيرمي القليلة والقريبة من مستوى طاقة فيرمي سوف تكتسب طاقة حرارية تجعلها ترتفع إلى المستويات الأعلى الفارغة والقريبة من مستوى طاقة فيرمي، كما بالشكل 2- ب. من هذا نجد أن عدداً قليلاً من الإلكترونات سوف تتأثر بارتفاع درجة الحرارة، وهذا يجعل التغيرات الفيزيائية لا تتأثر كثيراً بارتفاع درجة الحرارة، انظر الشكل (3).



شكل (3) دالة فيرمي عند ثلاث درجات حرارة مختلفة

5- إذا كانت $\mu\beta << 0$ فإن $e^{\beta(\varepsilon-\mu)} >> 1$، وتؤول دالة فيرمي إلى دالة التوزيع التقليدية لماكسويل، انظر شكل (3).

لذلك فإن عدد جسيمات الفيرميون الكلية بالنظام يمكن حسابها كالتالي:

$$N = \begin{cases} \int_0^{\mu_o} g(\varepsilon) d\varepsilon & \text{if} \quad T = 0 \\ \int_0^{\mu_o} g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon & \text{if} \quad T \neq 0 \end{cases} \tag{4}$$

حيث كثافة المستويات $g(\varepsilon)$ يعبر عنها بالمعادلة:

$$g(\varepsilon) = g_s 4\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon},$$
$$= G_s V \sqrt{\varepsilon}, \tag{5}$$

حيث استخدمنا $G_s = g_s 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2}$. وتعبر g_s عن درجة الانتماء. في حالة الإلكترونات نجد أن $s = \frac{1}{2}$ و $g_s = (2s+1) = 2$.

ومن تغيير درجات الحرارة نستطيع أن نصل إلى التصنيف التالي:

$$T=\begin{cases} 0 & \mu(0)>0,\quad \varepsilon<<\mu(0) & \text{Very low temperature} & \text{Completely degenerate} \\ T<<T_F & \mu(0)>0 & \text{Low temperature} & \text{Strongly degenerate} \\ T\approx T_F & \mu(0)=0 & \text{Intermediate temperature} & \text{Slightly degenerate} \\ T>>T_F & \mu(0)<0 & \text{High temperature} & \text{Classical limit} \end{cases}$$

بالنسبة للحالة الأخيرة، وهي عندما $T>>T_F$، فإن توزيع فيرمي سوف يؤول إلى توزيع ماكسويل- بولتزمان التقليدي، ولا داعي هنا لعرضه مرة أخرى. نود التنبيه هنا أن لفظ degenerate ليس له أية صلة بالمعني انتماء كما عرف بميكانيكا الكم بالباب السادس. وتربط الكلمة هنا بمدى امتلاء مستويات الطاقة أسفل مستوى فيرمي .وسوف نستعرض هنا خواص غاز الفيرميون في الحالات المختلفة.

II – غاز ذو مستويات ممتلئة تماماً $T=0$

(Completely degenerate gas)

عند درجات الحرارة المنخفضة جداً، أو عند درجة حرارة الصفر المطلق ($T=0$)، نجد أن جميع مستويات الطاقة، أسفل مستوى طاقة فيرمي $\mu(0)$، تصبح ممتلئة كما يتضح بالشكل 2-أ. في هذه الحالة نجد أن العدد الكلي لجسيمات الفيرميون يحسب باستخدامنا للمعادلتين (3) و(4) كالتالي:

$$N=\int_0^{\mu_o} g(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon, \qquad f(\varepsilon)=1$$

$$=G_s V\int_0^{\mu_o}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon=\frac{2\pi}{3}G_s V\,\mu_o^{3/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{N=\frac{2}{3}G_s V\,\mu_o^{3/2}} \qquad (6)$$

ومنها نجد أن طاقة فيرمي هي:

$$\boxed{\mu_o\equiv\varepsilon_F\equiv\mu(0)=\frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi g_s}\frac{N}{V}\right)^{2/3}} \qquad (7)$$

من المعادلة (7) يتضح أن طاقة فيرمي لا تعتمد على حجم العينة فقط أو شكلها ولكن تعتمد على الكثافة الحجمية ($\frac{N}{V}$) للجسيمات والتي تدل على مدى تزاحم الجسيمات بجوار بعضها

البعض داخل المادة. ومن الملائم أيضاً أن نُعرف درجة حرارة فيرمي "T_F" بالعلاقة $T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B}$. وهى درجة الحرارة التي تفصل بين السلوك التقليدي للكميات الفيزيائية لجسيمات الفيرميون عندما $T >> T_F$ والسلوك الكمي عندما $T << T_F$. ويمكن التعبير عنها كالتالي:

$$T_F = \frac{\mu_o}{k_B} = \frac{h^2}{2mk_B}\left(\frac{3}{4\pi g_s}\frac{N}{V}\right)^{2/3} \qquad (8)$$

مثال: احسب μ_o و T_F وسرعة الإلكترونات v_F لعنصر البوتاسيوم إذا علمت أن كثافته هي $\rho = 0.86\times10^3\ \text{kg/m}^3$ ووزنه الذري هو $M = 39\ \text{kg/kmole}$. ملحوظة: اعتبر أنه يوجد إلكترون حر لكل ذرة أحادية التكافؤ (كذرة البوتاسيوم) .

الحل: باعتبار أنه يوجد إلكترون حر لكل ذرة أحادية التكافؤ، فإن الكثافة تحسب من العلاقة:

$$\frac{N}{V} = \frac{N_a\rho}{M} = \frac{(6.02\times10^{26}\ \text{electrons/kmole})(0.86\times10^3\,\text{kg/m}^3)}{39\ \text{kg/kmole}}$$
$$= 1.33\times10^{28}\ \text{electrons/m}^3,$$

ومن المعادلة (5) نجد أن طاقة فيرمي للإلكترونات ($g_s = 2$) هي:

$$\mu_o = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{3}{\pi}\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.62\times10^{-34}\ \text{J.s})^2}{8\left(9.11\times10^{-31}\ \text{kg}\right)}\left(\frac{3}{\pi}\times1.33\times10^{28}\ \frac{\text{electronss}}{\text{m}^3}\right)^{2/3}$$
$$= 3.28\times10^{-19}\ \text{J} = 2.05\ \text{eV}$$

ولذلك فإن درجة حرارة فيرمي هي:

$$T_F = \frac{\mu_o}{k_B} = \frac{2.05\ \text{eV}}{8.617\times10^{-5}\ \frac{\text{eV}}{\text{K}}} = 2.3\times10^4\ \ \text{K}$$

ودرجة الحرارة المرتفعة هذه تَعني أننا يجب أن نتعامل مع معدن البوتاسيوم بقوانين ميكانيكا الكم حتى عند درجة حرارة الغرفة.

ولحساب سرعة الإلكترونات، نستخدم العلاقة:

$$\mu_o = \frac{p_f^2}{2m} \quad \Rightarrow \quad p_F^2 = 2m\,\mu_o \quad \Rightarrow \quad (mv_F)^2 = 2m\,\mu_o$$

فنجد أن:

$$\mathrm{v}_F^2 = \frac{2\mu_o}{m} = \frac{2\mu_o c^2}{mc^2} = \frac{2(2.05\ \mathrm{eV})\times(3.0\times10^8\ \mathrm{m/s})^2}{(0.511\times10^6\ \mathrm{eV})}$$

$$= 7.22\times10^{11}\ \mathrm{m^2/s^2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{v}_F = 8.5\times10^5\ \mathrm{m/s}$$

من هنا نلاحظ أن سرعة الإلكترونات، في المعادن، عند درجة الصفر المطلق تصل إلى أكثر من عشرة أضعاف سرعة الصوت.

وسوف نستعرض بالتالي أهم الخواص الفيزيائية للمستويات الممتلئة تماماً وهي:

i – حساب الطاقة الداخلية

تحسب الطاقة الداخلية كالتالي:

$$U_o = \int_0^{\mu_o} \varepsilon g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon$$

$$= G_s V \int_0^{\mu_o} \varepsilon^{3/2}\, d\varepsilon = \frac{2}{5} \underbrace{G_s V\, \mu_o^{3/2}}_{=\frac{3}{2}N \text{ from eq.(4)}} \mu_o$$

$$= \frac{3}{5} N\, \mu_o$$

$$\Rightarrow \boxed{U_o = \frac{3}{5} N\, \mu_o} \tag{9}$$

ii – حساب الإنتروبي

$$S_o = 0, \tag{10}$$

حساب معادلة الحالة – iii

$$\Omega_o = -PV = U_o - S_o - \mu_o N = -\frac{2}{5}\mu_o N\,, \qquad (11)$$

حساب الضغط – iv

$$P = -\frac{\Omega_o}{V} = \frac{2}{5}\mu_o\left(\frac{N}{V}\right)$$
$$= 2.71\times 10^7 \rho \text{ (atm for electrons)} \qquad (12)$$

من هنا نجد أن جسيمات الفيرميون تمارس ضغطاً كبيراً بداخل المعدن، $\left(\approx 10^6 \text{ atm}\right)$، حتى عند درجة الصفر المطلق. بمعرفة هذا الضغط الهائل، يجب هنا أن نُدرك ونُقدر دور جهد التوتر السطحي الذي يحول دون هروب (تبخر) الإلكترونات من المعدن. وبمعنى آخر فإن قوة كولوم الجاذبة بين الأيونات سوف تعادل ضغط الجسيمات. مع ملاحظة أنه عند درجة حرارة الصفر المطلق تكون قيمة μ_o موجبة وكبيرة.

III – غاز ذو مستويات شبه ممتلئة ($T \ll T_F$)

$\left(\text{Strongly degenerate gas}\right)$

في هذه الحالة نجد أن بعض المستويات القريبة من مستوى طاقة فيرمي تصبح فارغة، ولذلك فإن العدد الكلي لجسيمات الفيرميون يحسب باستخدامنا للمعادلتين (2) و(5) كالتالي:

$$N = \int_0^\infty g(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon = G_s V \int_0^\infty \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{(\varepsilon - \mu(T))/k_B T} + 1}$$
$$= G_s V \left(k_B T\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{(x - x_o)} + 1} \qquad (13)$$

حيث استخدمنا التعويضات $x = \varepsilon / k_B T$ و $x_o = \mu(T)/k_B T$. وهدفنا الآن هو الحصول على علاقة لحساب $\mu(T)$ كدالة في درجة الحرارة المطلقة. ويمكن حساب $\mu(T)$ بطريقتين: الأولى بإجراء التكامل عددياً، والثانية نستخدم فيها تكامل سمرفيلد (انظر الملحق (A)) حيث:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{e^{(x-x_o)}+1} = \frac{2}{3}x_0^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8x_0^2}+\cdots\right] = \frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{k_BT}\right)^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^2+\cdots\right]$$

فنجد أن العدد الكلي لجسيمات فيرمي يأخذ الشكل:

$$N = \frac{2}{3}G_sV\,\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^2+\cdots\right] \qquad (14)$$

وباستخدام المعادلة (6) وهي:

$$N = \frac{2}{3}G_sV\,\mu_o^{3/2} \qquad (15)$$

نجد أن (14) تؤول إلى:

$$\mu_o^{3/2} = \mu^{3/2}(T)\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu}\right)^2+\cdots\right] \qquad (16)$$

وكتقريب أولي، وعند درجات الحرارة المنخفضة، نضع $\mu=\mu_o$ بالقوس المربع فنجد أن:

$$\mu_o^{3/2} = \mu^{3/2}(T)\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu_o}\right)^2+\cdots\right]$$

وباستخدام التعويض $\mu_o = k_BT_F$ نحصل على:

$$\mu_o^{3/2} = \mu^{3/2}(T)\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+\cdots\right]$$

والآن نستطيع حساب $\mu(T)$ بدلالة μ_o كالتالي:

$$\because\ \mu^{3/2}(T) = \mu_o^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mu_o}\right)^2+\cdots\right]^{-1}$$

$$\therefore\quad \mu(T) = \mu_o\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+\cdots\right]^{-2/3} \approx \mu_o\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+\cdots\right] \qquad (17)$$

وقد استخدمنا مفكوك ذات الحدين بالخطوة الأخيرة.

مثال: احسب $\mu(T)$ **لمعدن البوتاسيوم عند درجة حرارة** 3.0×10^3 K.

الحل: وجدنا لمعدن البوتاسيوم أن $T_F = 2.3\times10^4$ K **و** $\mu_o = 2.05$ eV **، لذلك:**

$$\mu(T) = \mu_o\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+\cdots\right]$$
$$= 2.05\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{3.0\times10^3}{2.3\times10^4}\right)^2+\cdots\right]$$
$$= 2.05\times0.986 \approx 2.02 \text{ eV}$$

ومن هذا المثال نلاحظ أن التغير بقيمة $\mu(T)$ **هو تغير طفيف نظراً لارتفاع درجة حرارة فيرمي** T_F**. ولذلك بالإمكان اعتبار** $\mu(T)=\mu_o$ **حتى في درجات الحرارة الاعتيادية.**

واجب منزلي: باستخدام تكامل سمرفيلد (انظر الملحق (A)**) اثبت أن الطاقة الداخلية تعطى بالعلاقة:**

$$U \approx \underbrace{\frac{3}{5}N\,\mu_o}_{U_o}\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2+\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{T}{T_F}\right)^4-\cdots\right] \qquad (18)$$

وكما هو متوقع، فإن المعادلة (18) تدل على أن الطاقة الداخلية للنظام تزداد بزيادة درجة الحرارة، وذلك ناتج من انتقال جسيمات الفيرميون إلى المستويات ذات الطاقات الأعلى.

---

i – حساب الحرارة النوعية

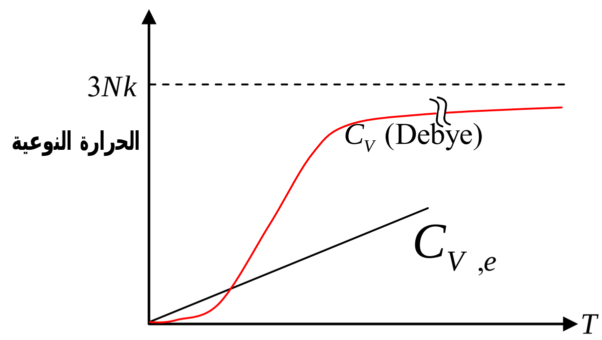
تحسب الحرارة النوعية الإلكترونية كالتالي:

$$C_{V,e} = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = \frac{5\pi^2}{12}U_o\left(\frac{T}{T_F^2}\right)+\cdots$$
$$\approx \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{Nk_B}{T_F}\right)T \qquad (19)$$

المعادلة (19) توضح أنه عندما $T << T_F$ فإن الحرارة النوعية لجسيمات فيرمي تتغير خطياً مع تغير درجة الحرارة. ولهذا فإن الحرارة النوعية الكلية للمعدن يمكن وضعها على الصورة:

$$\begin{aligned}(C_V)_{total} &= C_{V,e} + C_V\ (\text{Debye}) \\ &= AT + BT^3 \qquad (20)\end{aligned}$$

حيث الحد الأول الخطي يعبر عن الحرارة النوعية نتيجة للإلكترونات الحرة، والحد الثاني نتيجة نظرية ديباي لشبكية الجوامد، انظر الشكل (4) .



شكل (4) الحرارة النوعية للمعدن كدالة في درجة الحرارة

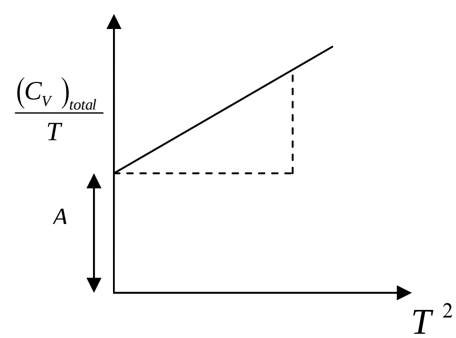
من المعادلة (20) نجد أن الحد الأول هو السائد عند درجات الحرارة المنخفضة جداً، ويهمل مع ارتفاع درجات الحرارة. ولقد كان الاعتقاد السائد سابقاً، وكان لغزاً حير العلماء لفترة طويلة، أن الحرارة النوعية للمعادن عند درجات الحرارة المرتفعة تساوي القيمة ($3\,Nk_B$)، كما للجسم الصلب، مضافاً إليها الحرارة النوعية للإلكترونات الحرة وهي($\frac{3}{2}\,Nk_B$) والمرتبطة بدرجات الحرية الانتقالية الثلاث. والمثال التالي يوضح لنا أن مشاركة الإلكترونات الحرة للحرارة النوعية الكلية هي كمية مهملة عند درجات الحرارة المرتفعة.

مثال: احسب الحرارة النوعية الإلكترونية للبوتاسيوم عند درجة حرارة الغرفة $T = 3.0\times10^2$ K، مع العلم أن $T_F = 2.3\times10^4$ K للبوتاسيوم.

الحل: الحرارة النوعية الإلكترونية للبوتاسيوم تحسب من القانون:

$$C_{V,e} = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{Nk_B}{T_F}\right)T = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{T}{T_F}\right)Nk_B$$
$$= 4.93\times\left(\frac{3.0\times10^2 \text{ K}}{2.3\times10^4 \text{ K}}\right)Nk_B$$
$$= 6.44\times10^{-2}\ Nk_B$$

وهذه القيمة الصغيرة، مقارنةً بالقيمة $3\,Nk_B$ عند درجة حرارة الغرفة، قد أوجدت تفسيراً للغز الذي حير العلماء فترة طويلة من الزمن.



شكل (5) العلاقة بين $\frac{(C_V)_{total}}{T}$ و T^2 لحساب الثوابت A, B

ولحساب الثوابت A, B عملياً، فإنه بقياس الحرارة النوعية الكلية $(C_V)_{total}$ عند درجات الحرارة المختلفة، ثم رسم العلاقة بين $\frac{(C_V)_{total}}{T}$ و T^2، كما في الشكل (5) نحصل على علاقة خطية. ومن تقاطع الخط المستقيم مع المحور الرأسي نوجد الثابت A وميل الخط المستقيم يعطي الثابت B. ومن العلاقة $A = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{Nk_B}{T_F}\right)$ نستطيع إيجاد درجة حرارة فيرمي T_F، ومنها نوجد طاقة فيرمي باستخدام $\varepsilon_f = k_B T_F$.

ii – حساب الإنتروبي

يحسب الإنتروبي كالتالي:

$$S = \int_0^T \frac{C_{V,e}}{T} dT$$
$$= \frac{\pi^2}{2} N k_B \left[\left(\frac{T}{T_F} \right) - \frac{\pi^2}{10} \left(\frac{T}{T_F} \right)^3 + \cdots \right] \qquad (21)$$

ومنها نجد أن $S = 0$ عند $T = 0$، كما يجب أن تكون، وهي مطابقة للقانون الثالث للديناميكا الحرارية.

iii – حساب دالة هلمهولتز

تحسب دالة هلمهولتز كالتالي:

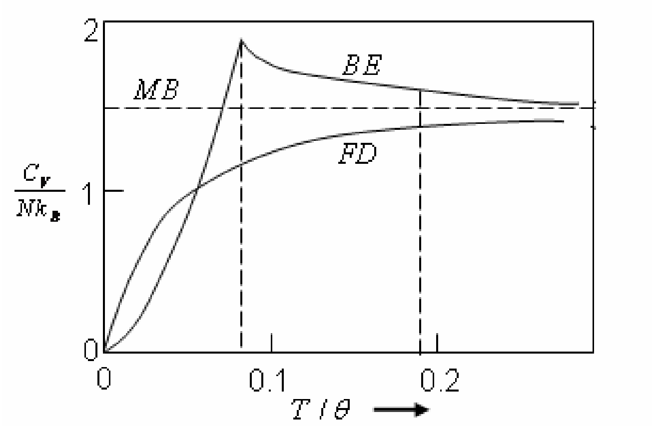
$$F = U - TS$$
$$= N k_B T_F \left[\frac{3}{5} - \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{T}{T_F} \right)^4 + \cdots \right] \qquad (22)$$

iv – حساب الضغط

يحسب الضغط كالتالي:

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N}$$
$$= \frac{2}{5} \frac{N k_B T_F}{V} \left[1 + \frac{5\pi^4}{12} \left(\frac{T}{T_F} \right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left(\frac{T}{T_F} \right)^4 + \cdots \right]$$
$$= \frac{2}{3} \frac{U}{V} \qquad (23)$$

والشكل (6) يوضح الفرق بين الحرارة النوعية لكل من التوزيعات الإحصائية الثلاثة.



شكل (6) مقارنة للحرارة النوعية تحت حجم ثابت ($\frac{C_V}{Nk_B}$) للتوزيعات الإحصائية الثلاثة:

ماكسويل – بولتزمان (MB) **بوز- أينشتين** (BE)**، فيرمي – ديراك** (FD)

تمارين عامة

1- احسب μ_o **و** T_F **وسرعة الإلكترونات** v_F **للألومنيوم إذا علمت أن كثافته هي** $\rho = 7.7\times10^3\ \text{kg/m}^3$ **ووزنه الذري هو** $M = 27\ \text{kg/kmole}$**.**

2- احسب $\mu(T)$ **و الحرارة النوعية الإلكترونية للألومنيوم عند درجة حرارة** $3.0\times10^3\ \text{K}$**.**

3- إذا عرفنا درجة الحرارة T_o **التي عندها يكون الجهد الكيميائي منعدم، اوجد العلاقة بين** T_o **ودرجة حرارة فيرمي** T_F**.**