4.3.3 القيم المميزة للمؤثر $\hat{L}^2$

نبدأ بالمؤثر $\hat{L}^2$ من المعادلة (4.4) في الإحداثيات الكروية ونجعله يؤثر على الدالة $|\theta,\varphi\rangle$ ونفترض أن:

$$\hat{L}^2|\theta,\varphi\rangle = c|\theta,\varphi\rangle = \hbar^2 l(l+1)|\theta,\varphi\rangle \quad (4.11)$$

ولكن

$$\hat{L}^2|\theta,\varphi\rangle = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]|\theta,\varphi\rangle \quad (4.12)$$

وباستخدام $|\varphi\rangle = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$ وفصل المتغيرات $|\theta,\varphi\rangle = |\theta\rangle|\varphi\rangle$ نجد أن

$$-\frac{\hbar^2}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]|\theta\rangle e^{im\varphi} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{\sqrt{2\pi}}|\theta\rangle e^{im\varphi} \quad (4.13)$$

وبحذف الدالة $|\varphi\rangle$ واستخدام قيمها المميزة من المعادلة $\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}|\varphi\rangle = -m^2|\varphi\rangle$ نجد أن:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]|\theta\rangle = 0 \quad (4.14)$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة ليجندر التفاضلية وحلها يعطى بدلالة دالة ليجندر المرتبطة $P_l^m(\cos\theta)$ بالشكل:

$$|\theta\rangle = C_{lm}P_l^m(\cos\theta) \quad (4.15)$$

حيث أن

$$P_l^m(x) = \left(1-x^2\right)^{|m|/2}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x), \qquad P_l^{-m}(x) = P_l^m(x)$$

و

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l\, l!}\frac{d^l}{dx^l}\left(x^2-1\right)^l, \qquad P_l(-x) = (-)^l P_l(x)$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$P_o(x)=1, P_1(x)=x\,, P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1),$$
$$P_1^1(x)=-\sqrt{1-x^2}\,, P_2^1(\cos\theta)=3\cos\theta\sin\theta$$

وباستخدام العلاقة العيارية لدالة ليجندر في الصورة:

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos\theta)P_{l'}^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=\frac{2}{2l+1}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\delta_{ll'}, \qquad \textbf{(4.16)}$$

بالإمكان حساب C_{lm} **حيث أن**

$$<\theta,\varphi|\theta,\varphi>=\frac{|C_{lm}|^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^\pi|P_l^m(\cos\theta)|^2\sin\theta d\theta=1 \qquad \textbf{(4.17)}$$

وبالتالى فإن

$$C_{l,m}=(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{2(l+m)!}}, \qquad \textbf{(4.18)}$$

ولهذا فإن:

$$\left|\theta,\varphi\right\rangle=(-1)^m\sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad \textbf{(4.19)}$$
$$\equiv Y_{l,m}(\theta,\varphi)$$

حيث $l\geq m$ **. وتعرف** $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ **بالدالة التوافقية الكروية المعيرة.**

واجب منزلي:

1- تحقق من النتائج التالية

l	m	$Y_{lm}(\theta,\varphi)$
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$

1	±1	$\mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$
2	0	$\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right)$

2- تحقق من أن

$$\begin{aligned}|\psi\rangle &= x+iy\\ &= r\sin\theta\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)\\ &= r\sin\theta\, e^{i\varphi}\\ &= -\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\, r\, Y_{1,1}\end{aligned}$$

مثال 4.3.1 : احسب $<\hat{L}_z>$ **و** $<\hat{L}_z^2>$ **للدالة المعيرة الآتية:**

$$\psi(r)=\frac{1}{2\sqrt{6}}\left[3|0,0\rangle+2|1,1\rangle-|1,0\rangle+\sqrt{10}\,|1,-1\rangle\right]$$

الحل: من الدالة المعيرة نجد أن السعات لكل دالة هي:

$$a_{0,0}=\frac{3}{2\sqrt{6}},\quad a_{1,1}=\frac{1}{\sqrt{6}},\quad a_{1,0}=-\frac{1}{2\sqrt{6}},\quad a_{1,-1}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{6}}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{aligned}\langle L_z\rangle &= \sum_i m_i\hbar\,|a_{l,m_i}|^2=(0\,\hbar)|a_{0,0}|^2+(0\,\hbar)|a_{1,0}|^2+(\hbar)|a_{1,1}|^2+(-\hbar)|a_{1,-1}|^2\\ &=(0\,\hbar)\left(\frac{9}{24}+\frac{1}{24}\right)+(\hbar)\left(\frac{4}{24}\right)+(-\hbar)\left(\frac{10}{24}\right)\\ &=-\frac{1}{4}\hbar,\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\langle \hat{L}_z^2\rangle &= \sum_i (m_i\hbar)^2\,|a_{l,m_i}|^2=(0\,\hbar)^2|a_{0,0}|^2+(0\,\hbar)^2|a_{1,0}|^2+(\hbar)^2|a_{1,1}|^2+(-\hbar)^2|a_{1,-1}|^2\\ &=\left(0\,\hbar^2\right)\left(\frac{9}{24}+\frac{1}{24}\right)+\left(\hbar^2\right)\left(\frac{4}{24}\right)+\left(\hbar^2\right)\left(\frac{10}{24}\right)\\ &=\frac{7}{12}\hbar^2\end{aligned}$$

مثال 4.3.2 : احسب مصفوفة كل من المؤثرات $\hat{L}_z$ و $\hat{L}^2$ للدالة $\left|l,m\right\rangle$ حيث $l=1$.

الحل:

$$\left(\hat{L}_z\right)=<m'|\hat{L}_z\,|m>=m\hbar\underbrace{<m'|m>}_{\delta_{m'm}}=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}|11>\\|10>\\|-1>\end{matrix}\qquad <11|\;<10|\;<1-1|$$

$$\left(\hat{L}^2\right)=<l'|\hat{L}^2\,|l>=l(l+1)\hbar^2\underbrace{<l'|l>}_{\delta_{l'l}}=2\hbar^2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}|11>\\|10>\\|-1>\end{matrix}\qquad <11|\;<10|\;<1-1|\;\frac{1}{2}$$

مثال 4.3.3 : للدالة $\left|l,m\right\rangle=(6-r)re^{-r/3}\cos\theta$ حدد قيم كل من m و l .

الحل: للتبسيط سوف نضع الدالة المعطاة في الصورة:

$$\left|l,m\right\rangle=\underbrace{(6-r)re^{-r/3}}_{f(r)}\underbrace{\cos\theta}_{f(\theta)}$$
$$=f(r)f(\theta)$$

وحيث أن الدالة المعطاة لا تعتمد علي الزاوية φ فإن $m=0$.

وكطريقة عامة، لإيجاد قيم m نستخدم العلاقة:

$$L_z\psi=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}f(r)f(\theta)=0$$
$$\Rightarrow\quad m=0$$

ولإيجاد قيم l نستخدم العلاقة:

$$\hat{L}^2\psi=\hat{L}^2f(r)\cos\theta=-\hbar^2f(r)\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\cos\theta$$
$$=\hbar^2 2f(r)\cos\theta$$

ونقارنها بالصيغة العامة:

$$\hat{L}^2\psi = l(l+1)\hbar^2\psi$$

لنجد أن $l=1$ **.**

مثال 4.3.4 : لمستوى يوصف بالدالة الموجية المتصلة:

$$\psi(\varphi) = A\sin^2\varphi$$

1- احسب الثابت A

$$\int\psi^2(\varphi)d\varphi = A^2\int_0^{2\pi}\sin^4\varphi\, d\varphi = A^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{\sqrt{3\pi}}$$

2- استخدم مفكوك $\sin^2\varphi$ **ومنها احسب قيم** m **المختلفة**

$$\sin^2\varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\right)^2 = \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}e^{\overbrace{2}^{m=2} i\varphi} - \frac{1}{4}e^{\overbrace{-2}^{m=-2} i\varphi}\right)$$

ومنها نجد أن السعات لكل دالة هي:

$$a_0 = \frac{2}{4}, \quad a_2 = -\frac{1}{4}, \quad a_{-2} = -\frac{1}{4}$$

ولحساب A **من معايرة الدالة نجد:**

$$\sum P_i = A^2\left(|a_0|^2 + |a_2|^2 + |a_{-2}|^2\right) = 1 \qquad \Rightarrow A^2\left(\frac{4}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) = 1$$

$$\Rightarrow A = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

3-احسب احتمالية وجود الجسيم لقيم m **المختلفة:**

نحسب احتمالية وجود الجسيم لقيم m **المختلفة كالتالي:**

$$P(m=0) = A^2 \times |a_0|^2 = \frac{8}{3}\times\frac{4}{16} = \frac{4}{16} = \frac{2}{3},$$

$$P(m=2) = P(m=-2) = A^2 \times |a_2|^2 = \frac{8}{3}\times\frac{1}{16} = \frac{1}{6}$$

ومن القيم السابقة نجد أن احتمالية وجود الجسيم لقيم m **المتصلة هي:**

$$P(m=0)=(2\pi)A^2\times\frac{4}{16}=(2\pi)\left(\frac{4}{3\pi}\right)\times\frac{4}{16}=\frac{2}{3},$$

$$P(m=2)=P(m=-2)=(2\pi)A^2\times\frac{1}{16}=(2\pi)\left(\frac{4}{3\pi}\right)\times\frac{1}{16}=\frac{1}{6}$$

حيث تعبر 2π عن الدورة الكاملة

3- احسب قيم $< L_z >, < L^2{}_z >$

$$\langle L_z\rangle=\sum_i m_i\hbar\,|a_{m_i}|^2=(0\,\hbar)^2|a_0|^2+(+\hbar)|a_2|^2+(-\hbar)|a_{-2}|^2$$
$$=(0\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}-2\times\frac{1}{6})\hbar=0,$$

و

$$\langle\hat{L}_z^2\rangle=\sum_i(m_i\hbar)^2|a_{m_i}|^2=(0\,\hbar)^2|a_0|^2+(2\,\hbar)^2|a_2|^2+(-2\hbar)^2|a_{-2}|^2$$
$$=(0^2\times\frac{2}{3}+2^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6})\hbar=\frac{4}{3}\hbar^2$$

مثال 4.3.5 : الهاملتونيان للجسم الجاسىء الدورانى (Rigid Rotator) يعطى بالعلاقة $\hat{H}=\frac{\hat{L}^2}{2I}$

حيث أن القيمة $|\hat{L}^2|$ تعطى بالعلاقة: $|\hat{L}^2|=\hbar^2 l(l+1)$ ويوصف بالدالة

$$|\theta,\varphi>=N\left[\underbrace{1}_{a_{0,0}}Y_{0,0}+\underbrace{(1+3i)}_{a_{1,-1}}Y_{1,-1}+\underbrace{2}_{a_{2,-1}}Y_{2,-1}+\underbrace{1}_{a_{2,0}}Y_{2,0}\right]$$

1. احسب N

باستخدام العلاقة $N^2\sum_{l.m}|a_{l,m}|^2=1$ نجد أن:

$$N^2\left[1+(1+3i)(1-3i)+4+1\right]=N^2\left[1+(1+9)+4+1\right]=1$$
$$\Rightarrow N=1/4$$

2. احسب احتمال وجود الجسم في المستوى $l=0$

$$P(l=0)=N^2|a_{0,0}|^2=\frac{1}{4^2}=1/16$$

3. احسب احتمال وجود الجسم في المستوى $m=0$

$$P(m=0)=N^2\left[|a_{0,0}|^2+|a_{2,0}|^2\right]=\frac{1+1}{4^2}=1/8$$

4. احسب احتمال وجود الجسم في المستوى $L_z=-\hbar$

$$P(L_z = -\hbar) = N^2\left[|a_{1,-1}|^2 + |a_{2,-1}|^2\right] = \frac{10+4}{4^2} = 7/8$$

5. احسب احتمال وجود الجسم في المستوى $L^2 = 6\hbar^2$

$$P(L^2 = 6\hbar^2 \Rightarrow l = 2) = N^2\left[|a_{2,-1}|^2 + |a_{2,0}|^2\right] = \frac{4+1}{4^2} = 5/16$$

6. احسب احتمال وجود الجسم في المستوى $E = 2\hbar^2/2I$

$$P(E = 2\hbar^2/2I \Rightarrow l = 1) = N^2\left[|a_{1,-1}|^2\right] = \frac{9+1}{4^2} = 5/8$$

7. احسب $< E >$

$$< E >= N^2\left[\frac{0(0+1)\hbar^2}{2I} + 10\frac{1(1+1)\hbar^2}{2I} + (4+1)\frac{2(2+1)\hbar^2}{2I}\right] = \frac{25}{16I}\hbar^2$$

4.4 المؤثرات التصاعدية والتنازلية

لقد عرفنا في الفصل السابق العلاقات الآتية

$$\hat{L}^2\left|l,m\right\rangle = l(l+1)\hbar^2\left|l,m\right\rangle$$

و

$$\hat{L}_z\left|l,m\right\rangle = m\hbar\left|l,m\right\rangle$$

للمؤثرين $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ ولكننا لم نحدد ما هو الارتباط بين قيمهم. ولكننا نعلم أيضاً من علاقات التلازم المختلفة

$$\left[\hat{L}_j, \hat{L}_k\right] = i\hbar\hat{L}_l, \quad (j,k,l \text{ cyclic}),$$

$$\left[\hat{L}^2, \hat{L}_j\right] = 0$$

أن قيم l و m يجب أن تكون قيماً حقيقية. ولإيجاد العلاقة بينهما سوف نعرف المؤثرات التصاعدية والتنازلية بالتالي:

$$\hat{L}_+ \equiv \hat{L}_x + i\hat{L}_y \qquad \textbf{(4.20)}$$

$$\hat{L}_- \equiv \hat{L}_x - i\hat{L}_y \qquad \textbf{(4.21)}$$

واجب منزلي: أثبت أن

$$\left[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm\right] = \pm\hbar\hat{L}_\pm, \quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm\right] = 0, \quad \left[\hat{L}_+, \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z, \quad \hat{L}_\pm^\dagger = \hat{L}_\mp$$