المتذبذب التوافقي الخطي

The Linear Harmonic Oscillator

تعتبر مسألة المتذبذب التوافقي الخطي من أهم المسائل التي تم حلها في مملكتي ميكانيكا الكم و الميكانيكا الكلاسيكية. وهو من الأمثلة الجيدة التي تستخدم لمعرفة الفرق بين النتائج بالمملكتين. وقد استخدمت مسألة المتذبذب التوافقي الخطي في حل وفهم ظواهر فيزيائية معقدة بمختلف فروع الفيزياء (كلاسيكية، ذرية، جزيئية، جسيمات أولية ونظرية الأوتار وغيرها) وأثبتت صحة فروضها. وفي هذا الباب سوف نستعرض أولاً كيف تعاملت النظرية التقليدية مع معادلات الحركة الاهتزازية لجسم. وبعدها نبدأ بالدخول ببساطة إلى طريقة تعامل ميكانيكا الكم مع المتذبذب، مع المقارنة، مع النظرة التقليدية. وسنرجئ الحل الرياضي إلى الملحق المرافق حتى لا نشتت القارئ بالصعوبات الرياضية لحل المعادلة التفاضلية للمتذبذب التوافقي.

نبدأ بالنظرة التقليدية للمسألة حيث إنه عند دراسة الحركة الاهتزازية، التوافقية، لجسم (مثلاً جسم معلق بزنبرك أو حركة جزيئات ثنائية الحركة) فإن أبسط الفروض هي:

1- أن الجسم يخضع لقوة إرجاع (Restoring Force) F_x تشده أو تدفعه إلى موضع اتزانه،

2- تتناسب هذه القوة مع إزاحة الجسم عن موضع الاتزان x، وتُعرف العلاقة بقانون هوك (Hook's Law) على الصورة:

$$F_x = -k\ x \tag{1}$$

حيث F_x هي القوة باتجاه x والثابت k هو ثابت التناسب. باستخدام قانون نيوتن نحصل على:

$$ma_x = -k\ x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2\ x \tag{2}$$

حيث $k = m\omega^2$ والمعادلة (2) لها الحل العام:

$$x = A\ \sin(\omega t + \theta) \tag{3}$$

حيث A و θ ثابتان يعينان بالشروط الحدودية للمسألة. الثابت A يعبر عن سعة الحركة الاهتزازية، أي أنه يتساوى مع النهاية العظمى للإزاحة x. وتعبر المعادلة (3) عن حركة توافقية خطية بسيطة لها تردد زاوي ω يعطى بالعلاقة:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

حيث ω هو التردد و T هو الزمن الدوري للمتذبذب.

ولحساب دالة الجهد V من المعادلة (1)، نستخدم علاقتها بالشغل W في المجال المحافظ بالشكل:

$$V = -W = -\int_0^x F_x\, dx = \frac{1}{2}kx^2, \tag{4}$$

المعادلة (4) تمثل معادلة قطع مكافئ.

وطاقة الحركة "K" عند إزاحة x تحسب كالتالي:

$$K = \frac{1}{2} m \, \mathrm{v}^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \theta)$$

$$= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \left[1 - \sin^2(\omega t + \theta) \right]$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A^2 - x^2 \right)$$

وتبعاً للميكانيكا التقليدية نجد أن الطاقة الكلية "E" للمتذبذب هي:

$$E = K + V = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(A^2 - x^2 \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

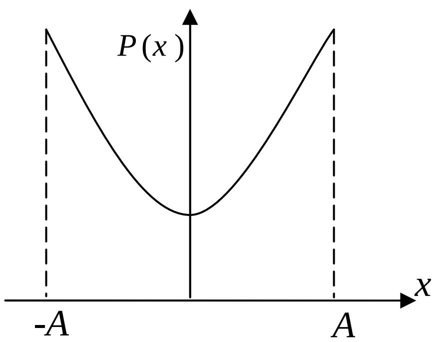
$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \qquad (5)$$

المعادلة (5) تخبرنا أن الطاقة الكلية لجسيم يهتز في حركة توافقية بسيطة تعتمد على قيمة السعة "$\pm A$" وبالتالي فإن قيمة الطاقة تأخذ قيماً تتزايد زيادة متصلة تبعاً لزيادة "$\pm A$". ولسهولة المقارنة مع ميكانيكا الكم سوف نعرف كثافة الاحتمال التقليدي "$P(x)\,dx$" لوجود المتذبذب بمسافة dx كالتالي: إذا مر جسيم خلال مسافة مقدارها dx، في اتجاه واحد ذهاباً أو إياباً، في زمن مقداره dt، فإن احتمال تواجده في المسافة dx يحدد بالعلاقة:

$$P(x)\,dx = \frac{dt}{T/2} = \frac{2\frac{dx}{\mathrm{v}}}{T} = \frac{2}{T\,\mathrm{v}} dx = \frac{2}{T\sqrt{\omega^2\left(A^2 - x^2\right)}} dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}} dx \qquad (6)$$

حيث T هو الزمن الدوري للمتذبذب. بالتالي فإن كثافة الاحتمال تأخذ قيمة صغرى عند القيمة "$x = 0$" وتصل إلى قيمة عظمى عند الحدود "$x = \pm A$".



وللتعامل مع المتذبذب التوافقي الخطي من خلال نظرية ميكانيكا الكم، نجد أن معادلة شرودنجر تأخذ الصورة:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\psi=0,$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2}+(\beta-\alpha^2x^2)\psi=0} \qquad (7)$$

حيث $\alpha=m\omega/\hbar, \quad \beta=2mE/\hbar^2$.

بالإمكان تبسيط المعادلة (7) وذلك باستخدام التعويض:

$$q=\sqrt{\alpha}\ x$$

واجب منزلي: باستخدام التعويض $q=\sqrt{\alpha}\ x$ تأكد من التفاضلات التالية:

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{d\psi}{dq}\frac{dq}{dx}=\sqrt{\alpha}\frac{d\psi}{dq}$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\frac{d}{dq}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)\frac{dq}{dx}=\alpha\frac{d^2\psi}{dq^2}$$

وتتحول المعادلة (7) إلى الصورة المبسطة:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2}+(\lambda-q^2)\psi=0 \qquad \textbf{(8)}$$

حيث تم تعريف القيمة المميزة (عديمة الأبعاد) λ بالشكل:

$$\lambda=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2E}{\hbar\omega} \qquad \textbf{(9)}$$

الحل العام للمعادلة (7) ليس سهلاً، وسوف نكتفي هنا بعرض بما نحتاجه. الحل التفصيلي للمعادلة (7) سوف يعرض في الملحق المرافق.

المعادلة (7) تتحقق فقط لقيم منفصلة للطاقة الكلية تعبر عنها المعادلة:

$$\lambda=\frac{2E}{\hbar\omega}=2n+1,$$

$$\Rightarrow E_n=(n+\frac{1}{2})\hbar\omega=(n+\frac{1}{2})h\,\nu, \qquad n=0,1,2,\cdots \qquad (10)$$

ومن المعادلة (10) نستنتج الأتي:

1- طاقة المستويات هي طاقة مكماة حيث إنها تعتمد على العدد الصحيح n، وهذا يتطابق مع نظرية بور. n تمثل عدد الكم الاهتزازي Vibrational quantum number .

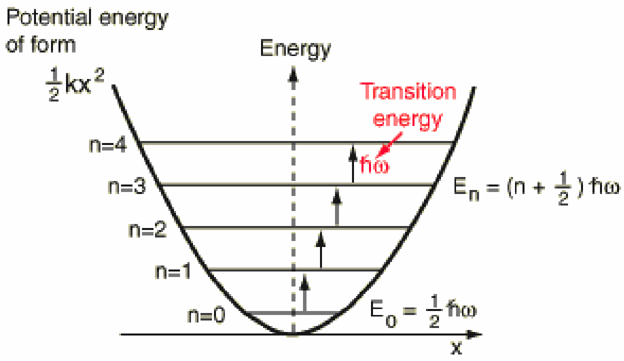
2- الفروق بين مستويات الطاقة المتتالية متساوية وهو:

$$\Delta E=E_{n\pm1}-E_n=\pm\hbar\omega .$$

3- للعدد $n=0$ فإن الطاقة E_o (طاقة المستوى الأرضي أو طاقة نقطة الصفر) لا تساوي صفراً ولكن $E_0=\frac{1}{2}\hbar\omega$، وهذا لا يتطابق مع نظرية بور. وعدم التطابق له دلالته الفيزيائية المهمة

وهي: أن أقل طاقة اهتزازية (طاقة المستوى الأرضي) لأي نظام فيزيائي (مثال على ذلك الجزيئات متعددة الذرات أو الذرات بالجوامد) يوصف بجهد المتذبذب التوافقي لا يمكن أن تنعدم حتـى عنـد درجة حرارة الصفر المطلق. لذلك فإن طاقة نقطة الصفر هذه كافية لمنع تجمد سـائل الهليـوم-4 تحت الضغط الجوي، مهما قللنا من درجة حرارتة. وهي مرتبطة بعلاقة هيزنبرج الاتعيينـة، فـإذا كانت طاقة الجسيم معدومة، فإن الجسيم يسكن وبالتالي فإن إحداثيات الجـسيم وكميـة الحركيـة الخطية يمكن تعيينهما في آن واحد، وهذا يتعارض مع علاقة عدم التعيين. عملياً يمكن التأكد مـن أن الطاقة الاهتزازية الصفرية غير منعدمة بواسطة دراسة تشتت الضوء بواسطة البلـورات عنـد تغير درجة الحرارة.

والشكل التالي يعبر عن مستويات الطاقة لجهد يعبر عنه بالمعادلة (4).

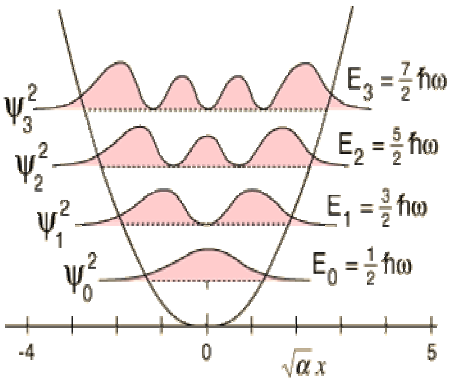


ولكل قيمة n يوجد لها دالة مميزة تعرف بالصورة:

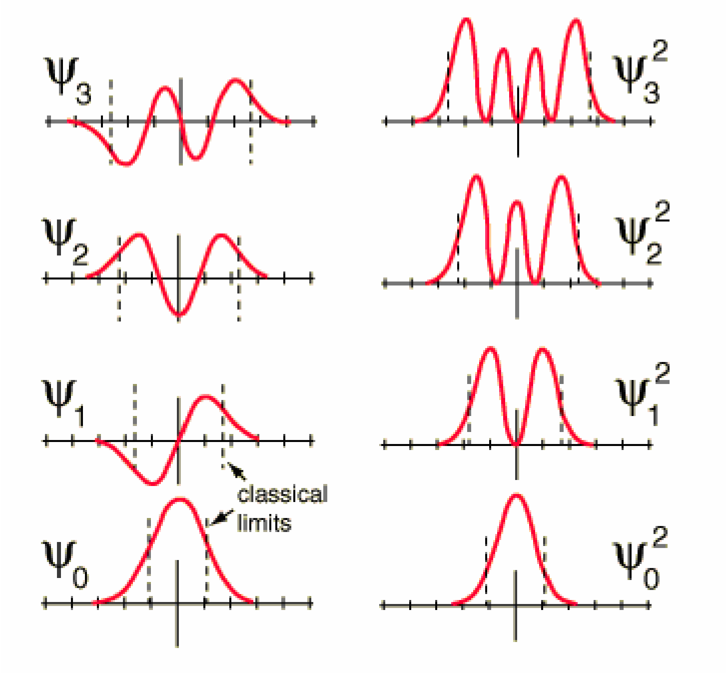
$$\psi_n(q) = N_n e^{-q^2/2} H_n(q), \qquad N_n = \sqrt{\frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}}} \tag{11}$$

حيث $H_n(q)$ تسمى دالة هرمت متعددة الحدود. انظر الملحق المرافق لمراجعة تفاصيل دالة هرمت. الأربع دوال المميزة الأوائل موضحة بالجدول والشكل التاليين.

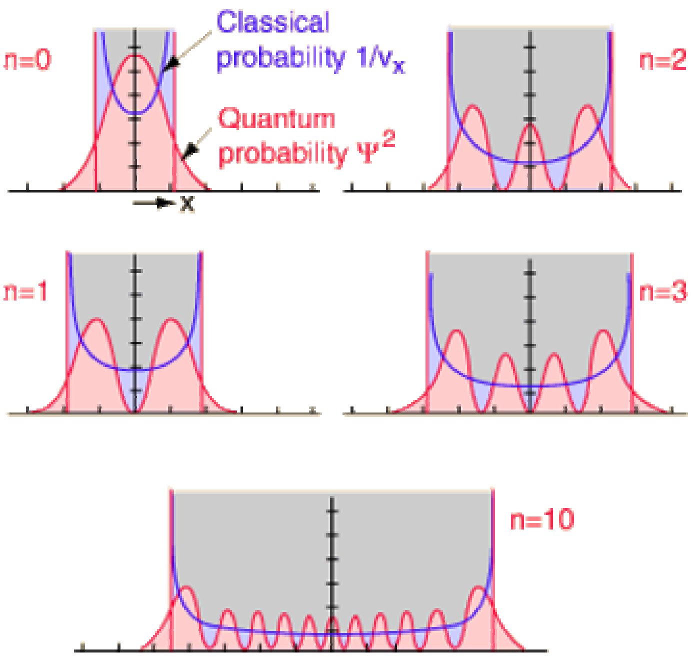
n	$\lambda = 2n+1$	E_n	$\psi_n(q)$
0	1	$\frac{1}{2}\hbar w$	$\sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi}}}\, e^{-q^2/2}$
1	3	$\frac{3}{2}\hbar w$	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{\pi}}}\, q\, e^{-q^2/2}$
2	5	$\frac{5}{2}\hbar w$	$\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}\, (2q^2-1)\, e^{-q^2/2}$
3	7	$\frac{7}{2}\hbar w$	$\sqrt{\frac{1}{3\sqrt{\pi}}}\, (2q^2-3)\, q\, e^{-q^2/2}$



وأشكال الدوال ومربعاتها موضحة كالتالي، والخطوط المنقطة توضح المدى الكلاسيكي للدوال:



واجب منزلي: للأشكال التالية اشرح مدى مطابقة كثافة الاحتمال التقليدي مع كثافة الاحتمال بميكانيكا الكم.



مثال: افترض للمعادلة (7) حلاً مميزاً بالصورة:

$$\psi = b e^{-c x^2} \qquad \textbf{(12)}$$

احسب الثوابت b, c **وعين القيمة المميزة لهذه الدالة.**

الحل: لحساب الثابت c **بالتعويض من المعادلة (12) في المعادلة (7) نصل للمعادلة:**

$$\left(4c^2 - \alpha^2\right)x^2 + \left(\beta - 2c\right) = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

بالمعادلة (13)، بمساواة معاملات x^2 **بالصفر نحصل على:**

$$\left(4c^2 - \alpha^2 = 0\right) \;\Rightarrow\; c = \pm\frac{\alpha}{2} = \pm\frac{m\omega}{2\hbar} \qquad \textbf{(14)}$$

وذلك باستخدام قيمة α **من المعادلة (7). القيمة السالبة سوف تهمل حيث إنها تعطي دالة تزايديه بالمعادلة (12). بالمعادلة (13)، بمساواة معاملات** x^0 **في كلا الطرفين نحصل على:**

$$\beta = \frac{c}{2} = \frac{m\omega}{2\hbar} \qquad \textbf{(15)}$$

وباستخدام قيمة β **من المعادلة (7) نجد أن:**

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{m\omega}{\hbar} \;\Rightarrow\; E = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad \textbf{(16)}$$

وهي قيمة الطاقة الصفرية للمهتز التوافقي. بالتالي فإن الدالة والقيمة المميزة لهذا المستوى تصبح:

$$\psi_o = b e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} \;\Leftrightarrow\; E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega \qquad \textbf{(17)}$$

واجب منزلي: للدالة $\psi_o = b e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}$ **:**

1- من شروط المعايرة اثبت أن $b = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$

2- واثبت أن

$$\langle \hat{x} \rangle = \langle \hat{p}_x \rangle = 0, \quad \langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad \langle \hat{p}_x^2 \rangle = \frac{1}{2} m\hbar\omega, \quad \Delta p_x \Delta x = \frac{\hbar}{2}$$

3- اثبت أن الدالة $\psi = A\, x\, e^{-c x^2}$ **هي حل للمعادلة:**

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\beta - \alpha^2 x^2)\psi = 0$$

وتحقق من النتائج التالية:

$$c = \frac{m\omega}{2\hbar} \quad \text{،} \quad A = \sqrt{2}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \quad \text{و} \quad E = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

وذلك باستخدام التكامل القياسي: $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}$ **.**