Applications of Bose-Einstein Statistics

الباب الحادي عشر

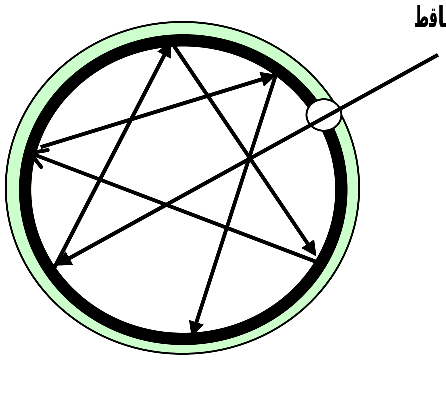
تطبيقات إحصاء بوز- أينشتين

الباب الحادي عشر
تطبيقات إحصاء بوز- أينشتين

Applications of Bose-Einstein Statistics

في هذا الباب سوف نستعرض بعض من تطبيقات إحصاء بوز- أينشتين المهمة. سنبدأ أولاً بإشعاع الجسم الأسود وصفاته. بالفصل الثاني سنلقي نظرة عامة علي أهم وأحدث التطبيقات ألا وهي تكثف بوز- أينشتين. وسوف نستعرض خواص غاز بوز- أينشتين المثالي بالفصل الثالث. وسوف نترك تطبيقات إحصاء بوز- أينشتين على المواد الفائقة التوصيل إلي كتاب أخر.

I– إشعاع الجسم الأسود (Black body radiation)



شكل (1) شكل نموذجى للجسم الأسود.

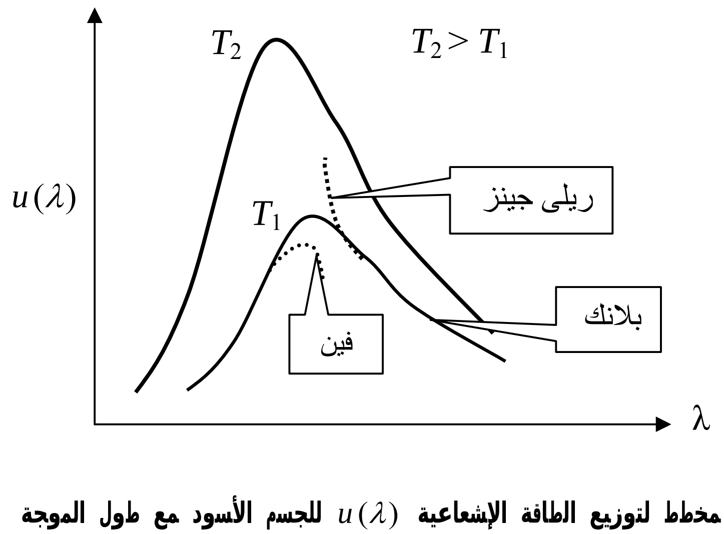
نعلم أن الحرارة الإشعاعية المنبعثة من جسم ما تعتمد على مساحته، نوعية مادته وأيضاً درجة حرارته. ويعرف الجسم الأسود (وهو جسم نظري) بأنه الجسم الذي له أعلى قدرة امتصاصية للأشعة الكهرومغناطيسية الساقطة عليه، وبالتالي فلن يكون هناك ضوء ينعكس منه، وإذا لا

نستطيع تحديد لونه. وحيث أن قدرته عاليه للامتصاص فإن قدرته عالية أيضاً على الإشعاع. ونستطيع تمثيله بجسم مغلق أجوف به ثقب صغير ومطلي باللون الأسود من الداخل كما بالشكل 1). وبالتالي فإن الجسم يمتص كل الضوء الساقط عليه من خلال الثقب لأن الأشعة التي ستدخل خلال الثقب لن يسمح لها بالخروج مرةً أخرى نتيجة الانعكاسات المتتالية. وعندما يسخن الجسم الأسود فإنه يشع ضوءاً يحتوي على كل الأطوال الموجية الممكنة اعتماداً على درجة حرارته المطلقة (T).

و تبعا للوصف السابق والدراسات المعملية المكثفة (انظر الشكل 2) فإن الجسم الأسود له بعض المعالم الاستقرائية المهمة وهى:

1- يمتص كل الأشعة الساقطة (ولا يعكسها) بغض النظر عن الطول الموجى أو الاتجاه.

2- له قدرة عالية على الإشعاع (في جميع الاتجاهات) أكثر من أى جسم آخر.



شكل (2) مخطط لتوزيع الطاقة الإشعاعية $u(\lambda)$ للجسم الأسود مع طول الموجة λ عند درجات حرارة مختلفة.

3- منحنى الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود لا يعتمد على طبيعة المادة ولكن على درجة حرارتها.

4- المنحنيات عند درجة الحرارة المنخفضة تقع تماما بداخل المنحنيات ذات درجات الحرارة المرتفعة.

5- عند درجة حرارة ثابتة (T) تزداد الطاقة الإشعاعية المنبعثة من الجسم الأسود كلما ازداد طول الموجة، ثم تصل إلى قيمة عظمى ($\lambda_{\max}$) تبدأ بعدها الطاقة فى الانخفاض بزيادة الطول الموجى.

6- *قانون فين للإزاحة*: ينص على أن "العلاقة بين القيمة العظمى للطول الموجى ($\lambda_{\max}$) ودرجة الحرارة المطلقة (T) للجسم هي علاقة عكسية" بمعني أن:

$$\lambda_{\max} T = \text{ثابت}$$

وهي علاقة تعبر عددياً عن الحقيقة التجريبية التالية: بارتفاع درجة الحرارة فإن القمة في طيف الجسم الأسود تزاح باتجاه تناقص الطول الموجى (ازدياد التردد).
وهذا يتفق مع الحقيقة أنه إذا ارتفعت درجة حرارة جسم متوهج يصبح أكثر لمعاناً وأكثر بياضاً.

7- *قانون ستيفان للمساحة*: ينص على أن "الطاقة الإشعاعية الكلية لوحدة المساحات عند درجة حرارة ثابتة (T) تُعرف بالمساحة المحصورة بين المنحنى المحدد بقيمة (T) ومحور الطول الموجى وتعطى بالعلاقة:

$$u = bT^4$$

حيث b ثابت وقيمته هي $b = 7.55\times10^{-16}\ \text{J m}^{-3}\text{K}^{-4}$

8- *قانون ريلى- جينز* (Rayleigh-Jeans law): عند الترددات المنخفضة (الأطوال الموجية الطويلة) تُعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \frac{T}{\lambda^4}.$$

ومن معرفتنا بمبادئ الفيزياء التقليدية نتوقع أن الجسم الساخن يشع باستمرار كل حرارته علي هيئة موجات كهرومغناطيسية. ولكن من قانون ريلى- جينز نجد أن معدل الإشعاع يصبح مالانهاية عندما يؤول الطول الموجى الكهرومغناطيسي إلى الصفر، وسميت هذه المعضلة الغير منطقية حين ذاك بلغز "الكارثة الفوق بنفسجية Ultra-violet catastrophe". وأصبح السؤال: ماهو السبب في هذا اللغز نظرياً؟

9- *قانون فين* (Wien's law): عند الترددات المرتفعة (الأطوال الموجية القصيرة)

تعرف الطاقة الإشعاعية بالعلاقة:

$$u(\lambda) \propto \lambda^{-5} e^{-d/\lambda T}$$

حيث d ثابت .

وقد نجح بلانك (1901) في حل معضلة "الكارثة الفوق بنفسجية" بفرضية أن "الطاقة الإشعاعية الممتصة أو المنبعثة لا تمثل فيضا من القيم المتصلة، ولكن من وحدات طاقة لا تتجزأ وسميت طاقة كم "Quanta" ومقدار الطاقة "E" التي يحملها كل طاقة كم تتناسب مع تردد الإشعاع "ν"، بمعنى أن:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}،$$

حيث h هو ثابت بلانك، ومن فرضيته اشتق بلانك علاقته المشهورة للطاقة الإشعاعية فى الصورة:

$$u(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{\left(e^{hc/\lambda k_B T} - 1\right)} \qquad (1)$$

حيث k_B هو ثابت بولتزمان. وقد وجد أن هذا القانون أعطى تفسيرا كاملا للنتائج المعملية للإشعاع الحراري من الأجسام الصلبة بالرغم من غرابة الفرضية المقترحة.

مثال: اثبت قانون فين للإزاحة.

الحل: لإثبات قانون فين للإزاحة، فإننا نبحث عن الطول الموجى الذي تكون فيه كثافة الطاقة المعطاة بالمعادلة (1) في قيمتها العظمي وذلك باستخدام الشرط:

$$\left.\frac{\partial u(\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_{\max}} = 0$$

وهذا الشرط يعطينا المعادلة:

$$x = 5(1 - e^{-x})$$

حيث $x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}}$. بالإمكان حل المعادلة الأخيرة عددياً أو بالرسم البياني وحلها هو:

$$x = \frac{\beta hc}{\lambda_{\max}} = \frac{hc}{\lambda_{\max} k_B T} = 4.965$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} T = \frac{hc}{4.965 k_B} = 2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}$$

وهو المطلوب.

مثال: باستخدام قانون الإزاحة لفين احسب درجة حرارة سطح القمر إذا علم أن الطيف يصل ذروته عند الموجة $\lambda_{\max} = 14 \times 10^{-6}$ m. أعتبر أن القمر جسم أسود.

الحل: باستخدام قانون الإزاحة لفين $\lambda_{\max} T = 2.897 \times 10^{-3}$ mK نجد أن درجة حرارة سطح القمر هي:

$$T = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{\lambda_{\max}} = \frac{2.897 \times 10^{-3} \text{ mK}}{14 \times 10^{-6} \text{ m}} \approx 207 \text{ K}$$

والآن قبل نطبق إحصاء بوز- أينشتين علي الإشعاع الجسم الأسود الكهرومغناطيسي (وباستخدام لغة ميكانيكا الكم، هو تجمع من الفوتونات) دعونا نسأل ما هي خواص الفوتونات؟ والإجابة هي أن خواص الفوتونات هي:

1- الحركة المغزلية للفوتونات لها القيمة $\hbar =$. ولذلك يطبق عليها إحصاء بوز- أينشتين.
2- لا تؤثر الفوتونات المثالية علي بعضها البعض.
3- كتلة الفوتون الساكنة منعدمة (zero rest mass)، لذلك فهو يتحرك بسرعة الضوء.
4- الفوتون يحقق علاقة التشتت (Dispersion relation)، $\omega = ck$، وبالتالي فإن

$$E = \hbar\omega = \hbar ck$$

5- للفوتونات نجد أن كمية الحركة الخطية تعرف بدلالة الطول الموجى λ، أو التردد ν، كالتالي:

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{c}\nu,$$
$$dp = \frac{h}{c} d\nu$$

حيث c هو سرعة الضوء في الفراغ. وباعتبار أن الفوتونات محتويه داخل جسم مغلق أجوف ذي حجم ثابت V ومتزن حرارياً عند درجة حرارة T مع الوسط المحيط به، فإن عدد الأنماط (مستويات الفوتونات) المتواجدة بين القيمتين p و $p+dp$ تعطي من العلاقة (انظر الباب الثالث الفصل الثالث):

$$g(p)dp = 2 \times 4\pi \frac{p^2}{h^3/V} dp, \tag{2}$$

وعدد الأنماط المتواجدة بين قيمتي التردد ν و $\nu + d\nu$ تعطي بالعلاقة:

$$g(\nu)d\nu = 2 \times 4\pi V \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \tag{3}$$

حيث استخدم العدد "2 " في المعادلتين (2 و 3) نتيجة الاتجاهين المستقلين لاستقطاب الإشعاع الكهرومغناطيسي.

بالتالي فإن توزيع إحصاء بوز- أينشتين للفوتونات يعطي:

$$dn(\nu) = n(\nu)d\nu = \frac{g(\nu)d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1}$$
$$= 8\pi V \frac{\nu^2}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \tag{4}$$

حيث $\varepsilon = h\nu$. وكثافة الطاقة $u d\nu = \frac{dn}{V}\varepsilon$ في المدى المحدد هي:

$$u(\nu)d\nu = g(\nu)\frac{h\nu d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1}$$
$$= 8\pi h \frac{\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \tag{5}$$

والمعادلة (5) تؤول إلي علاقة بلانك المشهورة للإشعاع (1) هذا إذا استخدمنا القيم التالية للفوتونات:

$$\alpha = 0, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$$

وهذا يعني ببساطة أننا أهملنا الشرط $\delta N = \sum \delta n = 0$ **والذي يدل علي أن العدد الكلي للفوتونات يظل ثابتاً. بالطبع فإن الفوتونات تختلف عن جسيمات البوزونات، في أن عـدد الفوتونات الكلية لا تكـون ثابتـة وذلـك نـاتج عـن ظـاهرة الخلـق** Creation **و الإفناء** Annihilation **.**

واجب منزلي: باستخدام التعويضات التالية:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\nu}{d\lambda} = -\frac{c}{\lambda^2},$$

و

$$u(\lambda) = -u(\nu)\frac{d\nu}{d\lambda} = u(\nu)\frac{c}{\lambda^2}$$

اثبت أن المعادلة (5) تؤول إلي قانون بلانك (انظر المعادلة 1).

تعليقات:

1- **عند الترددات المنخفضة** $(h\nu << k_B T \quad \Rightarrow \quad \beta h\nu << 1)$ **نستخدم التقريب:**

$$\left(e^{\beta h\nu} - 1\right) \approx \not{1} + \beta h\nu - \not{1} \approx \beta h\nu$$

فنجد أن المعادلة (5) تؤول إلي قانون ريلي- جينز:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3}\nu^2 d\nu, \qquad (6)$$

2- **عند الترددات المرتفعة** $(h\nu >> k_B T \quad \Rightarrow \quad \beta h\nu >> 1)$ **نستخدم التقريب:**

$$\left(e^{\beta h\nu} - \not{1}\right) \approx e^{\beta h\nu}$$

فنجد أن المعادلة (5) تؤول إلي قانون فين:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3}\nu^3 e^{-\beta h\nu} d\nu, \qquad (7)$$

3- **لإيجاد كثافة الطاقة الكلية نتكامل المعادلة** (5) **لجميع أنماط التذبذب الممكنة، وهي تأخذ القيم من صفر إلي مالانهاية بالنسبة للأشعة الكهرومغناطيسية، كالأتي:**

$$u = \int_0^\infty u(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi\hbar}{c^3}\int_0^\infty \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu}-1}d\nu, \tag{8}$$

وباستخدام التعويض $x = \beta h\nu$ ، نجد:

$$u = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\left(\frac{k_B T}{\hbar}\right)^4 \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1}dx}_{\frac{\pi^4}{15}} = bT^4, \tag{9}$$

وهو قانون ستيفان- بولتزمان، حيث:

$$b = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3h^3} = 7.55\times10^{-16}\ \text{J m}^{-3}\text{K}^{-4}$$

وقد تم التحقق من هذه العلاقة عملياً.

بالطبع، فإن معظم الأجسام المشعة، مثل الشمس والغازات الساخنة لا تعتبر أجسام سوداء مثالية ولهذا فإنهم لا يحققون العلاقات السابقة بدقة.

وبأسلوب حسابي آخر، لن نتعرض له هنا، يمكن استنتاج أن الكثافة الإشعاعية الكلية مرتبطة بالانبعاث الإشعاعي (الانبعاثيه $\Re$) (Radiation emittance) (وهي كمية الطاقة الإشعاعية المنبعثة من وحدة السطوح لجسم تام السواد في الثانية الواحدة) بالعلاقة التالية:

$$\Re = \frac{c}{4}u = \sigma T^4, \tag{10}$$

حيث $\sigma = \dfrac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2h^3} = 5.67\times10^{-8}\ \text{W m}^{-1}\text{K}^{-4}$ هو ثابت ستيفان- بولتزمان. وهذه النتيجة أيضاً تتفق مع الحسابات المعملية.

4- الحرارة النوعية للجسم التام السواد تأتي بالتالي عن طريق تفاضل المعادلة (9) لنحصل علي:

$$c_v = 4bT^3, \tag{11}$$

وهي تؤول للصفر عندما تصل درجة حرارة الجسم للصفر المطلق.والمعادلة (11) تشبه معادلة ديباي للأجسام الصلبة.

واجب منزلي: للفوتونات اثبت الأتي:

$$Z_{photon} = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-e^{-\beta\varepsilon_i}} \tag{12}$$

$$F = -\frac{1}{3} bVT^4, \tag{13}$$

$$S = \frac{4}{3} bVT^3, \tag{14}$$

$$P = \frac{1}{3} bT^4, \tag{15}$$

$$E = F + TS = bVT^4 \tag{16}$$

II– تكثيف بوز – أينشتين Bose-Einstein Condensation

لنظام يتكون من عدد N من جسيمات البوزون المستقلة والمحدد بوعاء ذو حجم V ودرجة حرارته المطلقة هي T، نجد أن التوزيع الأكثر احتمالاً هو:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{N_i^*}{g_i} = \frac{1}{e^{-\beta\mu+\beta\varepsilon_i} - 1} \tag{1}$$

حيث الرمز N_i^* يمثل عدد جسيمات البوزون التي لها الطاقة ε_i و g_i هو درجة الانتماء وتعبر عن المستويات التي لها نفس الطاقة ε_i.

ومن شرط ثبوت العدد الكلي للجسيمات داخل النظام المغلق نجد أن:

$$\begin{aligned} N &= \sum_{\substack{i=0 \\ (levels)}}^{\infty} N_i^* = \sum_{\substack{i=0 \\ (levels)}}^{\infty} \frac{g_i}{e^{\beta(\varepsilon_i-\mu)} - 1} \\ &= \frac{g_o}{e^{\beta(\varepsilon_o-\mu)} - 1} + \frac{g_1}{e^{\beta(\varepsilon_1-\mu)} - 1} + \cdots \\ &= N_o + N_1 + \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

حيث التجميع يتم بالمعادلة (2) على جميع مناسيب الطاقة. ولكي نحتفظ لكل منسوب بعدد موجب للجسيمات N_i، فيجب أن يتحقق الشرط $\mu \leq 0$ أو $e^{-\beta\mu} \geq 1$ لجميع الطاقات ε_i.

دعونا نركز الآن علي عدد الجسيمات بالمستوى الأرضي باعتبارها N_o، حيث طاقة المستوي $\varepsilon_o = 0$، فنجد أن:

$$N_o = f\ (\varepsilon_o = 0) = \frac{1}{e^{\alpha} - 1}$$

بالتأكيد يجب أن تكون القيمة $\alpha > 0$ لنحصل علي عدد موجب ومحدود من الجسيمات. ولنعين علاقة e^{α} مع درجات الحرارة المطلقة، سوف نفترض أنه باقتراب درجة الحرارة الغاز من الصفر المطلق فإن $N_o = N$. لذلك نجد أن:

$$N = \frac{1}{e^{\alpha} - 1} \qquad \Rightarrow \quad \alpha = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \approx \frac{1}{N}$$

وحيث أن N هو عدد فلكي، فإننا نستطيع، وبدون أخطاء حسابية، أن نضع $\alpha = 0$ أو $e^{\alpha} = 1$ بالمعادلة (1) عند درجات الحرارة المنخفضة. لهذا نجد أن المستوي الأرضي يمكن أن يملأ بعدد كبير جداً من الجسيمات الكلية.

والآن لكي نحسب العدد الكلي لجسيمات البوزون بالمستويات المثارة، والذي يتساوي مع العدد الكلي للجسيمات عند درجات الحرارة المرتفعة، دعونا نحسبه كلاسيكياً باستخدام المعادلة:

$$N_e = N = \sum_{\substack{i=0 \\ (levels)}}^{\infty} N_i^* = \int_0^{\infty} \frac{g(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1} \tag{2a}$$

وباستخدام كثافة الشحنات بالصورة $g(\varepsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$، نجد أن عدد الجسيمات الكلية هي:

$$N_e = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\alpha+\beta\varepsilon} - 1}$$
$$= \frac{V}{\lambda^3} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\, dx}{z^{-1} e^{x} - 1} \tag{3}$$

حيث استخدمنا $x = \beta\varepsilon$ والبارامترات التالية:

الطول الموجي لدي- برولي $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$

الفعالية المطلقة (Absolute activity) للغاز أو (Fugacity) $z = e^{-\alpha} = e^{\mu\beta} \le 1$

لنا هنا تعليق مهم على المعادلة (3) وهو أن المعامل $\sqrt{\varepsilon}$ بكثافة المستويات يضمن عدم اسهام جسيمات المستوي الأرضي $(\varepsilon = 0)$ بالحسابات، ولذلك نستطيع وضع $z = 1$ حيث أننا أهملنا المستوي الأرضي.

والآن باستخدام التكامل القياسي:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2}dx}{e^x - 1} = 1.306\sqrt{\pi}$$

فإن المعادلة (3) تؤول إلي:

$$N_e = 2.612V \times \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \qquad (4)$$

وكما نعرف، فإن جسيمات البوزون تفضل التجمع في نفس المستوى، وهذا عكس جسيمات الفيرميون. من هنا نجد أنه عندما تصل درجة حرارة الغاز " T " إلي درجة الحرارة الحرجة " T_B " فإن جسيمات البوزون تبدأ في التجمع في المستوي الأرضي، ولكن تظل كثافة جسيمات البوزون بالمستويات المثارة مرتفعة جداً، بمعني أن $N_e \approx N$. وبخفض درجات الحرارة عن " T_B " نجد أن الجسيمات تزداد كثافتها بالمستوى الأرضي، حيث أن $\alpha \propto N^{-1}$. وعندما نصل إلي درجة الصفر المطلق نجد أن جميع جسيمات البوزون تملأ المستوى الأرضي فقط. لذلك عند $T = 0$ نجد أن $N_o = N$. ولحساب درجة الحرارة الحرجة، T_B، نضع T_B بدلاً من T و N بدلاً من N_e بالمعادلة (4) لنحصل على:

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left(\frac{N}{2.612V}\right)^{2/3} \qquad (5)$$

مثال: لمول واحد من غاز ^{4}He تحت ضغط جوي 1، احسب T_B.

الحل: لمول واحد من الغاز، نعلم أن $N = N_A = 6.02\times10^{23}$ molecules/mol **، وحجم الغاز تحت ضغط جوي 1 هو** $V = 22.4\times10^{-3}$ m^3 **وكتلة الغاز هي** $m = 4\times1.66\times10^{-27} = 6.65\times10^{-27}$ kg. **وباستخدام المعادلة (5) نجد:**

$$T_B = \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left(\frac{N}{2.612V}\right)^{2/3}$$
$$= \frac{(6.63\times10^{-34})^2}{2\pi(6.65\times10^{-27})\times1.38\times10^{-23}}\left(\frac{6.02\times10^{23}}{2.612\times22.4\times10^{-3}}\right)^{2/3} = 0.036 \text{ K.}$$

وهي قيمة صغيرةً جداً مقارنةً بالقيمة العملية وهي 4.21 K **. وملاحظة عامه، فإن جميع الغازات المثالية تتحول إلي الحالة السائلة قبل أن تصل إلي درجة الحرارة الحرجة** "T_B".

واجب منزلي: لمول واحد من غاز H_2 تحت ضغط جوي 1، احسب T_B. قارن النتيجة مع القيمة العملية 14 K.

بقسمة المعادلتين (4) و(5) نحصل علي عدد الجسيمات بالمستويات المثارة كدالة في درجة الحرارة بالمعادلة:

$$N_e = N\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \qquad (6)$$

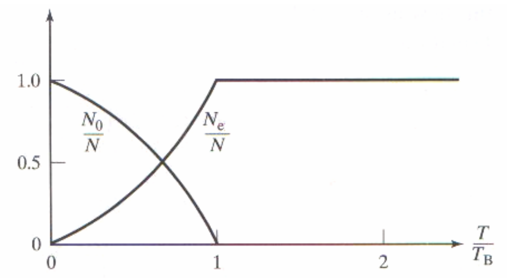
وباقي الجسيمات والتي تتجمع بالمستوى الأرضي تصبح:

$$N_o = N - N_e = N\left[1-\left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}\right] \qquad (7)$$

ولنا هنا ملاحظة وهي إن عملية التغيير من التجميع إلي التكامل بالمعادلة (2a) **عند درجات الحرارة المنخفضة،** $T < T_B$**، قد أحدثت خطأً جسيماً وذلك نتيجةً إهمالنا للحد** $g(\varepsilon = 0) = 0$ **بكثافة المستويات. وبإهمال هذا الحد فقد تم إهمال الإسهام الكبير الناتج من المستوى الأرضي. ولقيم صغيرة من** z **(أو قيم كبيرة من** $e^{-\mu\beta}$**) فإن إسهام المستويات الأولية يكون منعدماً،**

بالتالي فعملية التغيير من تجميع إلي تكامل لا ينشأ عنة أية خطأ جوهري أو محسوس. بينما، عندما تقترب z من الواحد الصحيح (أو تكون $e^{-\mu\beta}$ صغيرة)، فإن المستوى الأرضي يصبح مهماً وإسهامه يجعل تجاهله خطأً جسيماً. ولهذا لا نستطيع تغيير التجميع إلي تكامل عندما نقترب من الصفر المطلق.

وهذا التكثيف السريع للجسيمات يحدث عندما تقل درجة حرارة النظام عن T_B. وتسمي هذه الظاهرة تكثيف بوز – أينشتين. وشكل (3) يوضح مدي تغير $\frac{N_o}{N}$ و $\frac{N_e}{N}$ مع درجة الحرارة المطلقة للغاز.



شكل (3) تغير $\frac{N_o}{N}$ و $\frac{N_e}{N}$ مع درجة الحرارة المطلقه.

ولسنوات عديدة اعتقد الفيزيائيون أن تكثيف بوز- أينشتين ضرب من الخيال ولا يوجد في الطبيعة. ولكن في عام 1995 انتج الباحثون تكثيف بواسطة تبريد بخار من ذرات الروبيديوم لدرجة حرارة 1.3×10^{-7} K. وقد عرف هذا الإنجاز بأنة أهم انجاز في الفيزياء الذرية خلال القرن الماضي. وقد فتح هذا الإنجاز الباب علي مصراعيه للبحث في مجال جديد.

ملاحظات:

1- تجميع (تكثيف) جسيمات البوزون يحدث فقط في حال الجسيمات التي تحتفظ بعدد ثابت. هذا الشرط يجعل جسيمات الفوتون لا تتكاثف حيث أن لها صفة التخليق والفناء.

2- عند الشرط $T < T_B$ نستطيع أن ننظر إلي النظام علي أنه مزيج من حالتين (طورين) ألا وهما:

أ- حالة غازية تتكون من N_e من الجسيمات والتي تتوزع على المستويات المثارة، حيث $\varepsilon \neq 0$.

ب- حالة تكثيف تتكون من N_o من الجسيمات والتي تتجمع في المستوى الأرضي، حيث $\varepsilon = 0$

3- نجد أن الطول الموجي عندما $T < T_B$ يعرف من المعادلة

$$N = \frac{V}{\lambda_B^3} \times 2.612$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_B^3 = \frac{2.612}{\rho}, \quad \rho = \frac{N}{V} \qquad (7)$$

ولهذا فإن الطول الموجي مرتبط بمتوسط المسافة بين الجسيمات. ولذلك يظهر التداخل بين الدوال الموجية، ولذا تتضح أهمية التأثير الكمي.

4- بالطبع فإن جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي لا تساهم بالطاقة الداخلية أو الحرارة النوعية للنظام. وذلك لأنه عندما تكون $T < T_B$ فإن عدد جسيمات البوزون المستقرة بالمستوى الأرضي يصبح كبيراً جداً، ولكن طاقة المستوى $\varepsilon = 0$. أما في الحالة $T > T_B$ فإن $N_o = 0$ في أية حال.

III– خواص غاز البوزون المثالي عند درجات الحرارة المختلفة

The Properties of Ideal Bose-Einstein Gas

من توزيع بوز - أينشتين الأكثر احتمالاً:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{-\beta\mu + \beta\varepsilon_i} - 1} \qquad (1)$$

نستطيع حساب خواص غاز البوزون المثالي التالية:

i– حساب الطاقة الداخلية

عند درجات الحرارة المرتفعة $T > T_B$، نجد أن قانون ديولنج - بيتي يعطي:

$$U_+ \to \frac{3}{2} N k_B T \qquad (2)$$

وعند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$، نجد أن:

$$U_- = N\,\varepsilon = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)\varepsilon d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1}$$

$$= 2\pi V \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}-1} \qquad (3)$$

وبالقرب من المستوي الأرضي نضع $\mu = 0$ ، واستخدام التعويض $x = \varepsilon / k_B T$ نحصل علي:

$$U_- = \frac{2}{\sqrt{\pi}} k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} V \underbrace{\int_0^\infty \frac{x^{3/2} dx}{e^x - 1}}_{1.78} \qquad (4)$$

ومن المعادلة ($II.5$) نجد أن:

$$V = \frac{1}{2.612} \left(\frac{h^2}{2\pi m k_B T_B}\right)^{3/2}$$

وبالتعويض منها بالمعادلة (4) نحصل على:

$$U_- = 0.77 N k_B T \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2}, \qquad (5)$$

وهذا يدل على أن الطاقة الداخلية تتغير كما $T^{5/2}$ عند الدرجات المنخفضة.

ii– حساب الحرارة النوعية

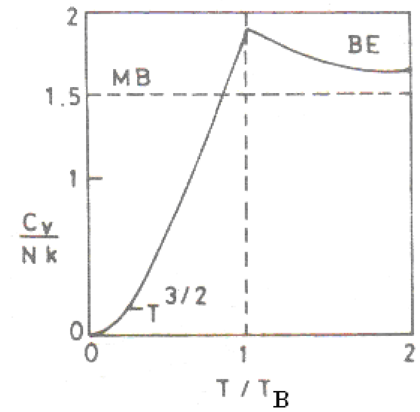
عند درجات الحرارة المرتفعة $T > T_B$، نجد أن الحرارة النوعية تأخذ القيمة الكلاسيكية:

$$C_{V+} = \left(\frac{\partial U_+}{\partial T}\right)_V \approx \frac{3}{2} N k_B \qquad (6)$$

أما عند درجات الحرارة المنخفضة $T < T_B$، فنجد:

$$C_{V-} = \left(\frac{\partial U_-}{\partial T}\right)_V \approx 1.92 N\, k_B \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \qquad (7)$$

ويظهر سلوك الحرارة النوعية مع درجة الحرارة بالشكل (4). فعند درجات الحرارة المنخفضة يبدأ المنحني في الازدياد من القيمة صفر عند الصفر المطلق حتى يصل إلي قيمة عظمي، وهي $1.92 N\, k_B$، وذلك عندما تتساوي درجة الحرارة مع الدرجة الحرجة T_B، بمعني أن $T = T_B$. وبعدها يبدأ ميل المنحنى في التغير مع ارتفاع درجة الحرارة. وعند درجات الحرارة العليا تأخذ الحرارة النوعية القيمة الكلاسيكية وهي $1.5 N\, k_B$.



شكل (4) تغير الحرارة النوعية تحت حجم ثابت مع درجة الحرارة. BE يرمز إلى إحصاء بوز – أينشتين وMB يرمز إلى إحصاء ماكسويل – بولتزمان.

iii– حساب الإنتروبي

القيمة المطلقة للإنتروبي عند درجات الحرارة المنخفضة تحسب من قانون الحرارة النوعية كالتالي:

$$S = \int_0^T \frac{C_{V-}}{T'} dT' = 1.28 N\, k_B \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \qquad (8)$$

ونجد أن الإنتروبي يؤول للصفر عند $T = 0$ ، كما هو معرف بالقانون الثالث للديناميكا الحرارية.

iv- حساب دالة هلمهولتز

تحسب دالة هلمهولتز عند الشرط $(T < T_B)$ كالتالي:

$$\begin{aligned} F &= U - TS \\ &= 0.51 N\, k_B \left(\frac{T}{T_B}\right)^{3/2} \\ &= -1.33\, k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} V \end{aligned} \tag{9}$$

v- حساب الضغط

من المعادلة (9) نستطيع أن نحسب الضغط بالعلاقة:

$$\begin{aligned} P &= -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} \\ &= 1.33\, k_B T \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} \end{aligned} \tag{10}$$

ومن المعادلة (10) نجد أن الضغط يتناسب مع $T^{5/2}$ عند درجات الحرارة المنخفضة، ولا يعتمد علي الحجم. وعند الصفر المطلق نجد أن جميع جسيمات البوزون تحتل المستوي الأرضي، $\varepsilon = 0$ ، ولا يكون لها كمية حركة خطية، وبالتالي ليس لها أي مساهمة في الضغط.

واجب منزلي: اثبت أن الضغط لغاز البوزون يعطي بالعلاقة:

$$P = \frac{2}{3}\frac{U}{V} \tag{11}$$

وهي شبيهة بمعادلة الغاز المثالي.