الباب الثامن

المتذبذب التوافقي الخطي باستخدام نظرية المؤثرات

Linear Harmonic Oscillator Using Operator Theory Approach

لقد تمت دراسة المتذبذب التوافقي الخطي بالباب الرابع وذلك باستخدام المتسلسلات (دالة هيرميت) ووجد أن الحل يتطلب خبرة رياضية مكثفة بالمعادلات التفاضلية. ولكننا هنا سوف نتعامل مع المسألة باستخدام طريقة أخرى وهي طريقة نظرية المؤثرات (Operator theory approach) **. ولماذا هذه الطريقة؟ لأننا نستطيع من خلالها حساب القيم المميزة والمتوسطة للكميات الفيزيائية مثل المسافة وكمية الحركة الخطية بدون معرفة مسبقة للدالة المميزة. وهذا يعتبر إنجازاً كبيراً حيث إننا أُعلمنا سابقاً أننا لا نستطيع حساب القيم المميزة والمتوسطة للكميات الفيزيائية إلا بمعلومية الدالة المميزة ولهذا تم استخدام المعادلات التفاضلية لإيجادها.**

دعونا نبدأ بالهملتونيان الخاص بالمتذبذب التوافقي الخطية بالشكل:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{x}^2 \tag{1}$$

وقد وجدنا سابقاً أن الهملتونيان (1) **يحقق معادلة شرودنجر:**

$$\begin{aligned} \hat{H}\psi_n &= E_n \psi_n, \\ E_n &= \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2}), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots \end{aligned} \tag{2}$$

حيث E_n **و** ψ_n **هما القيم والدوال المميزة للهملتونيان** (1) **بالترتيب. ومن الآن فصاعدا سوف نستخدم تعريف ديراك (راجع تعريف البرا والكت بكتابنا الأول) للدالة وهو** $|n\rangle \equiv \psi_n$ **حيث خاصيتا المعايرة و التعامد للدوال تحكمهما العلاقة:**

$$\langle m | n \rangle = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad m = n \\ 0 & \text{for} \quad m \neq n \end{cases}$$

حيث $\delta_{m,n}$ **هي دالة كرونكر. ولإتمام مهمتنا دعونا نبدأ أولاً بتعريف المؤثرات الجديدة:**

$$\begin{aligned} \hat{a} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(m\omega\hat{x} + i\hat{p} \right) \\ \hat{a}^\dagger &\equiv \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \left(m\omega\hat{x} - i\hat{p} \right) \end{aligned} \tag{3}$$

لاحظ هنا أن هذه المؤثرات عرفت بدلالة مؤثرات لكميات قياسية (وهما المكان x **وكمية الحركة الخطية** p **وتربطهما العلاقة** $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ **).**

واجب منزلي: باستخدام العلاقة $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ **، اثبت علاقة التبادل التالية:**

$$\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right]=\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}=1 \qquad (4)$$

واجب منزلي: من المعادلة (1.3) **اثبت أن:**

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right),\qquad \hat{p}=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right) \qquad (5)$$

مثال : بدلالة المؤثرات الجديدة اثبت أن:

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\tfrac{1}{2}\right)=\hbar\omega\left(\hat{N}+\tfrac{1}{2}\right) \qquad (6)$$

الحل: من المعادلة (5) **نجد أن:**

$$\hat{x}^2=\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]^2=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right\}$$

$$=\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\},$$

$$\hat{p}^2=\left[i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\right]^2=-\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger-\hat{a}\right)\right\}$$

$$=-\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

و من المعادلتين (1) **و**(4) **نجد:**

$$\hat{H}=\frac{\hat{p}^2}{2m}+\tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=-\frac{1}{2m}\left(\frac{m\hbar\omega}{2}\right)\left\{\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}-\hat{a}\hat{a}^\dagger-\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

$$+\tfrac{1}{2}m\omega^2\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)\left\{\hat{a}^2+\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}\hat{a}^\dagger+\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}$$

$$=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}\hat{a}^\dagger\right)=\frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\right)=\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\tfrac{1}{2}\right)$$

سنتوقف هنا قليلاً للتحدث عن المعادلة (6) **التي ظهر فيها مؤثر جديد وهو** $\hat{N}\equiv\hat{a}^\dagger\hat{a}$ **، ويدعي "المؤثر العددي** (number operator)" **والذي له الخواص التالية:**

1- $\hat{N}$ **مؤثر هيرميتي نظراً لأن:**

$$\hat{N}^\dagger=\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}\right)^\dagger=\hat{a}\hat{a}^\dagger=\hat{N}\,.$$

2- لأن المؤثر $\hat{H}$ **مرتبط مع** $\hat{N}$ **بعلاقة خطية فهما متلازمان، بمعني أن:**

$$\left[\hat{N},\hat{H}\right]=0\,.$$

3- ونتيجةً للخاصية رقم 2 فإن $\hat{H}$ و $\hat{N}$ يكون لهما نفس الدالة المميزة $|n\rangle$، وبمقارنة المعادلتين (2) و (6) نجد أن:

$$\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = \hat{N}\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{7}$$

نظرية: إذا كانت الدالة المميزة $|n\rangle$ للمؤثر $\hat{N}$ لها القيمة المميزة n فإن $n \ge 0$.

الإثبات: بضرب المعادلة $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ من اليسار بالمتجه $\langle m|$ ينتج:

. $\langle m|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n\langle m|n\rangle = n\delta_{mn}$

وحيث إن الطرف الأيسر هو المعيار (Norm) فهو قيمة موجبة وبالتالى فإن $n \ge 0$.

واجب منزلي: اثبت أن:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\,\hat{a}^{\dagger} - \tfrac{1}{2}\right) \tag{8}$$

والآن دعونا ندرس تأثير كل من $\hat{a}^{\dagger}$ و $\hat{a}$ على الدالة المميزة للمتذبذب التوافقي الخطي $|n\rangle$. بتأثير $\hat{a}$ سوف ينتج لنا متجه جديد وهو $\hat{a}|n\rangle$. وبتأثير $\hat{H}$ على المتجه الجديد ينتج التالى (وذلك باستخدام المعادلة (8)):

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \left\{\hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \tfrac{1}{2}\right)\right\}\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{9}$$

وبتفكيك الطرف الأيمن للمعادلة (9) نجد:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right)|n\rangle - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\hat{a}|n\rangle \tag{10}$$

وباستخدام المعادلتين (6) و (7) نصل إلى:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hbar\omega\hat{a}\hat{N}|n\rangle - \tfrac{1}{2}\hbar\omega\hat{a}|n\rangle = \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{11}$$

وباسترجاع المعادلة $E_n = \hbar\omega(n + \tfrac{1}{2})$ ينتج:

$$\hat{H}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \left(E_n - \hbar\omega\right)\left(\hat{a}|n\rangle\right) \tag{12}$$

واجب منزلي: بطريقة مماثلة للخطوات السابقة أثبت أن:

$$\hat{H}\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) = \left(E_n + \hbar\omega\right)\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) \tag{13}$$

ماذا نستنتج من المعادلتين السابقتين؟ بالنظر أولاً إلى المعادلة (12) نجد أنها معادلة قيم مميزة! للهملتونيان $\hat{H}$ ولكن لها الدالة المميزة $\hat{a}|n\rangle$ والقيمة المميزة $(E_n - \hbar\omega)$. ومعنى هذا أن تأثير $\hat{a}$ على الدالة المميزة الأصلية $|n\rangle$، التي لها القيم المميزة E_n أنتج لنا دالة مميزة جديدة هي $\hat{a}|n\rangle$. هذه الدالة الجديدة جعلت للهملتونيان $\hat{H}$ قيماً مميزةً جديدة وهي $(E_n - \hbar\omega)$. وحيث إن القيمة المميزة

الجديدة للطاقة أقل من القيمة الأصلية E_n، بمقدار وحدة طاقة $(\hbar\omega)$، فإن المؤثر الجديد $\hat{a}$ يدعى مؤثر الفناء (annihilation operator) **أو المؤثر التنازلي** (lowering operator) **أو المؤثر (ألادرجي) ألسلمي** (ladder operator)**.**

بتطبيق نفس التحليل السابق على المعادلة (13) **نجد أن تأثير $\hat{a}^\dagger$ على الدالة المميزة الأصلية $|n\rangle$، أنتج لنا دالة مميزة جديدة هي $\hat{a}^\dagger|n\rangle$. هذه الدالة الجديدة جعلت للهملتونيان $\hat{H}$ قيماً مميزةً جديدة وهي $(E_n+\hbar\omega)$. وحيث إن القيمة المميزة الجديدة للطاقة أعلى من القيمة الأصلية E_n، بمقدار وحدة طاقة $(\hbar\omega)$، فإن المؤثر الجديد $\hat{a}^\dagger$ يدعى مؤثر التخليق** (creation operator) **أو المؤثر التصاعدي** (raising operator)**.**

مثال: استخدم مؤثر الفناء $\hat{a}$ لحساب طاقة المستوى الأرضي E_0 للمتذبذب التوافقي الخطي.

الحل: نعلم من دراستنا السابقة أن الطاقة الكلية للمتذبذب التوافقي الخطي كمية موجبة دائماً. وبالتالى إذا استخدمنا مؤثر الفناء $\hat{a}$ على دالة المستوى الأرضي $|0\rangle$ فإننا لن نحصل على كمية سالبة ولكن نحصل على صفر، وتمثل رياضياً بالمعادلة:

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \tag{14}$$

وهذا الشرط يسهل لنا الحصول على طاقة أقل مستوى وذلك بدراسة تأثير $\hat{H}$ على الدالة $|0\rangle$ واستخدام المعادلة (6) **نجد:**

$$\hat{H}|0\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\tfrac{1}{2}\right)|0\rangle$$
$$= \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle + \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$$

لاحظ أنه باستخدام المعادلة (1.14) **فإن الحد الأول بالمعادلة السابقة سوف يؤول للصفر ويتبقى الحد الثاني وهو:**

$$\hat{H}|0\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle \tag{15}$$

بالتالى طاقة المستوى الأرضي للمتذبذب التوافقي الخطي تساوى القيمة:

$$\boxed{E_0 = \tfrac{1}{2}\hbar\omega} \tag{16}$$

من نتيجة المثال السابق نستطيع أن نحسب القيم المميزة العليا باستخدام المؤثر التصاعدي. على سبيل المثال: بالتأثير على الدالة المميزة $|0\rangle$ بالمؤثر $\hat{a}^\dagger$ ثم بالمؤثر $\hat{H}$ ينتج (بعد استخدامنا للمعادلة (13) **مع وضع $n=0$) المعادلة التالية:**

$$\begin{aligned}\hat{H}\,|1\rangle &= \hat{H}\,\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right) = \left(E_0 + \hbar\omega\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right)\\ &= \tfrac{3}{2}\hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\,|0\rangle\right) = \tfrac{3}{2}\hbar\omega|1\rangle\end{aligned} \qquad (1.17)$$

ومنها نجد أننا حصلنا على دالة مميزة جديدة ولها القيمة المميزة $\frac{3}{2}\hbar\omega$**. بتكرار العملية السابقة عدد** n **من المرات نصل إلى القيمة المميزة العامة انظر المعادلة** (1.2)**)**

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega, \qquad n = 0,1,2,... \qquad (1.18)$$

والآن إذا فرضنا أن المؤثر التصاعدي $\hat{a}^\dagger$ **يؤثر على الدالة المميزة** $|n\rangle$ **ويعطينا المعادلة المميزة:**

$$\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = c_{n+1}\,|n+1\rangle \qquad (1.19)$$

فما هو الثابت c_{n+1}**؟ وكيف يحسب؟**

لحساب الثابت c_{n+1} **دعونا نتعامل مع الضرب القياسي التالي:**

$$\begin{aligned}\langle n\,|\hat{a}\hat{a}^\dagger\,|n\rangle &= \left(\langle n\,|\hat{a}\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right) = \left(\langle\hat{a}^\dagger n\,|\right)\left(\hat{a}^\dagger\,|n\rangle\right)\\ &= (c_{n+1}^*)(c_{n+1})\underbrace{\langle n+1|n+1\rangle}_{=1}\\ &= |c_{n+1}|^2\end{aligned} \qquad (20)$$

حيث استخدمنا $\langle\hat{a}^\dagger n\,| = c_{n+1}^*\langle n+1|$ **وذلك من المعادلة** (19)**. وباستخدام العلاقة** $\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ **بالطرف الأيسر من (20) نجد أن:**

$$\begin{aligned}|c_{n+1}|^2 &= \langle n\,|\hat{a}^\dagger\hat{a}+1|n\rangle = \langle n\,|\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle + \langle n\,|n\rangle\\ &= \langle n\,|\hat{a}^\dagger\hat{a}\,|n\rangle + 1 = n+1\end{aligned} \qquad (21)$$

وذلك تم باستخدام المعادلة (7)**. ومن** (21) **نجد أن:**

$$c_{n+1} = \sqrt{n+1} \qquad (22)$$

وبالتالى:

$$\boxed{\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle} \qquad (23)$$

مثال: استخدم المعادلة (23) **لحساب** $\hat{a}^{\dagger 3}\,|n\rangle$**.**

الحل: باستخدام المعادلة (23) **ثلاث مرات متتالية ينتج:**

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger|n\rangle\right) &= \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\left(\sqrt{n+1}|n+1\rangle\right)\\ &= \sqrt{n+1}\,\hat{a}^\dagger\left(\hat{a}^\dagger|n+1\rangle\right)\\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\left(\hat{a}^\dagger|n+2\rangle\right)\\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\sqrt{n+3}|n+3\rangle\end{aligned}$$

مثال: استخدم تعريف القيمة المتوسطة $\hat{A}_{m,n} = \langle m|\hat{A}|n\rangle$ **لكتابة التمثيل المصفوفي للمؤثر** $\hat{a}^\dagger$**.**

الحل: بضرب المعادلة (23) **من الجهة اليسرى بالمتجه** $\langle m|$ **ينتج:**

$$\begin{aligned}\langle m|\hat{a}^\dagger|n\rangle \equiv \hat{a}^\dagger_{m,n} &= \sqrt{n+1}\langle m|n+1\rangle\\ &= \sqrt{n+1}\,\delta_{m,n+1} = \sqrt{n+1}\times\begin{cases}1 & \text{for} \quad m=n+1\\ 0 & \text{for} \quad m\neq n+1\end{cases}\end{aligned}$$

ونجد التمثيل المصفوفي للمؤثر $\hat{a}^\dagger$ **ويعطي بالشكل** $\left(\hat{a}^\dagger\right)$ **حيث:**

$$\left(\hat{a}^\dagger\right) = \begin{matrix} & |0\rangle & |1\rangle & |2\rangle & \cdots \\ \langle 0| & & & & \\ \langle 1| & & & & \\ \langle 2| & & & & \\ \vdots & & & & \end{matrix}\begin{pmatrix}\hat{a}^\dagger_{0,0} & \hat{a}^\dagger_{0,1} & \hat{a}^\dagger_{0,2} & 0 & \cdots\\ \hat{a}^\dagger_{1,0} & \hat{a}^\dagger_{1,1} & \hat{a}^\dagger_{1,2} & 0 & \cdots\\ \hat{a}^\dagger_{2,0} & \hat{a}^\dagger_{2,1} & \hat{a}^\dagger_{2,2} & 0 & \cdots\\ \hat{a}^\dagger_{3,0} & \hat{a}^\dagger_{3,1} & \hat{a}^\dagger_{3,2} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{pmatrix}$$

واجب منزلي: إذا افترضنا أن المؤثر التنازلي $\hat{a}$ **يؤثر على الدالة المميزة** $|n\rangle$ **ويعطينا المعادلة المميزة الآتية:**

$$\hat{a}|n\rangle = c_{n-1}|n-1\rangle \qquad (24)$$

اثبت أن $c_{n-1} = \sqrt{n}$**.**

مثال: استخدم المعادلة (24) **لحساب** $\hat{a}^3|n\rangle$**.**

الحل: باستخدام المعادلة (24) **ثلاث مرات متتالية ينتج:**

$$\begin{aligned}\hat{a}\hat{a}\left(\hat{a}|n\rangle\right) = \hat{a}\hat{a}\left(\sqrt{n}\,|n-1\rangle\right) &= \sqrt{n}\,\hat{a}\left(\hat{a}|n-1\rangle\right)\\ &= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\left(\hat{a}|n-2\rangle\right)\\ &= \sqrt{n}\sqrt{n-1}\sqrt{n-2}|n-3\rangle\end{aligned}$$

مع وجوب الشرط $n \geq 3$ **.**

مثال: استخدم المعادلتين (23) **و** (24) **لحساب** $\langle m|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle$ **.**

الحل: نبدأ أولاً بحساب:

$$\hat{a}\left(\hat{a}^{\dagger}|n\rangle\right) = \sqrt{n+1}\,\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\sqrt{n+1}|n\rangle$$

وبضرب المعادلة من اليسار بالمتجه $\langle m|$ **نجد:**

$$\langle m|\hat{a}\hat{a}^{\dagger}|n\rangle = (n+1)\langle m|n\rangle = (n+1)\delta_{m,n}$$

$$= (n+1)\times\begin{cases}1 & \text{for} \quad m=n \\ 0 & \text{for} \quad m\neq m\end{cases}$$

واجب منزلي:استخدم المعادلتين (23) **و** (24) **لإثبات أن**

$$\langle m|\hat{a}^{\dagger}\hat{a}|n\rangle = n\times\begin{cases}1 & \text{for} \quad m=n \\ 0 & \text{for} \quad m\neq m\end{cases}$$ **.**

ملخص: لقد وجدنا في هذا الباب الحقائق التالية:

1- **أوجدنا الطاقة الكمية للمتذبذب التوافقي الخطي بالمعادلة** (18)**.**

2- **أوجدنا كيف يؤثر المؤثر التصاعدي والتنازلي على دالة الطاقة المميزة بالمعادلتين** (23) **و** (24)**. هاتان المعادلتان مهمتان لحساب القيم المتوسطة للكميات الفيزيائية (مثل المسافة وكمية الحركة الزاوية إلخ).**

3- **تم التعامل مع جميع الحسابات بدون اللجوء إلى (أو معرفة) الصيغة العامة للدالة المميزة وهذا هو المهم بهذا الموضوع.**

أمثلة محلولة

1- استخدم المعادلات الآتية:

$$\hat{a}^{\dagger}\left|m\right\rangle=\sqrt{m+1}\left|m+1\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle n\right|\hat{a}^{\dagger}\left|m\right\rangle=\sqrt{m+1}\underbrace{\left\langle n|m+1\right\rangle}_{\delta_{n,m+1}};$$

$$\hat{a}\left|m\right\rangle=\sqrt{m}\left|m-1\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle n\right|\hat{a}\left|m\right\rangle=\sqrt{m}\underbrace{\left\langle n|m-1\right\rangle}_{\delta_{n,m-1}};$$

والعلاقة $x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a^{\dagger}+a)$ **، للتأكد من صحة الحسابات التالية:**

$$\langle l|\hat{x}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\langle l|a^{\dagger}|n\rangle+\langle l|a|n\rangle\right]$$

$$=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left[\sqrt{n+1}\,\delta_{l,n+1}+\sqrt{n}\,\delta_{l,n-1}\right]$$

ومنه تحقق من أن:

$$\langle l|\hat{x}|n\rangle=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\times\begin{cases}\sqrt{n+1} & \text{for } l=n+1\\ \sqrt{n} & \text{for } l=n-1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

و

$$\langle l|\hat{x}^2|n\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle\left(a+a^{\dagger}\right)^2\right\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle l\right|\hat{a}^{\dagger 2}+\hat{a}^2+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\left|n\right\rangle\right\}$$

$$=\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\langle l|a^{\dagger}a^{\dagger}|n\rangle+\langle l|a^{\dagger}a|n\rangle+\langle l|aa^{\dagger}|n\rangle+\langle l|aa|n\rangle\right]$$

$$=\frac{\hbar}{2m\omega}\left[\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\delta_{l,n+2}+(2n+1)\,\delta_{l,n}+\sqrt{n(n-1)}\,\delta_{l,n-2}\right]$$

ومنه تحقق من أن:

$$\langle l|\hat{x}^2|n\rangle=\frac{\hbar}{2m\omega}\times\begin{cases}\sqrt{(n+1)(n+2)} & \text{for } l=n+2\\ (2n+1) & \text{for } l=n\\ \sqrt{n(n-1)} & \text{for } l=n-2\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

2- استخدم التعريف $\hat{A}_{n,n}=\langle n|\hat{A}|n\rangle$ **لحساب كل من القيم:** $\langle\hat{x}\rangle$ **،** $\langle\hat{x}^2\rangle$ **،** $\langle\hat{p}\rangle$ **و** $\langle\hat{p}^2\rangle$**.**

الحل: باستخدام المعادلات بالمثال السابق (وأيضاً المعادلة (1.4)**) نجد أن:**

$$\langle\hat{x}\rangle=0;$$

$$\begin{aligned}\left\langle \hat{x}^2 \right\rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle \left(a+a^{\dagger}\right)^2 \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n \mid \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 + \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} \middle| n \right\rangle\right\} \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n \mid \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} \middle| n\right\rangle\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n \mid 2\hat{a}\hat{a}^{\dagger} + 1 \middle| n\right\rangle\right\} \\ &= \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle n \mid 2\hat{N} + 1 \middle| n\right\rangle\right\} = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(2n+1\right) \\ &= \frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

وبالمثل:

$$\begin{aligned}&\left\langle \hat{p} \right\rangle = 0; \\ &\left\langle \hat{p}^2 \right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\langle \left(a-a^{\dagger}\right)^2 \right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\left\langle n \mid \hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2 - \hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a} \middle| n\right\rangle\right\} \\ &\quad = \frac{m\hbar\omega}{2}\left\{\left\langle n \mid \hat{a}\hat{a}^{\dagger} + \hat{a}^{\dagger}\hat{a} \middle| n\right\rangle\right\} = \frac{m\hbar\omega}{2} \times 2 \times \left\{\left\langle n \mid \hat{N} + \tfrac{1}{2} \middle| n\right\rangle\right\} \\ &\quad = m\hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

3- **استخدم التعريف** $(\hat{A}) = \hat{A}_{m,n} = \left\langle m \mid \hat{A} \mid n \right\rangle$ **لكتابة المصفوفات التي تمثل كلاً من المؤثرات التالية:** $\hat{a}$**،** $\hat{a}\hat{a}^{\dagger}$**،** $\hat{a}^{\dagger}\hat{a}$**،** $\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}$**.**

الحل:

$$(\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}; \qquad (\hat{a}^{\dagger}\hat{a}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix};$$

$$\left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}; \quad \left(\hat{a}\hat{a}^{\dagger} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

4- **استخدم مؤثر الفناء** $\hat{a}$ **لحساب دالة المستوى الأرضي** ψ_0 **للمتذبذب التوافقي الخطي.**

الحل: علمنا سابقاً أن:

$$\hat{a}\left|\psi_0\right\rangle = 0$$

وباستخدام $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left(m\omega\hat{x} + i\hat{p}\right)$ **حيث** $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ **بالمعادلة السابقة نجد:**

$$\left(i(-i\hbar\frac{d}{dx})+m\omega x\right)\psi_o(x)=0$$

$$\left(\hbar\frac{d}{dx}+m\omega x\right)\psi_o(x)=0$$

ومع بعض الترتيبات نجد:

$$\hbar\frac{d\psi_o(x)}{dx}=-m\,\omega x\,\psi_o$$

$$\frac{d\psi_o(x)}{\psi_o}=-\frac{m\,\omega}{\hbar}x\,dx$$

وبإجراء التكامل لكلا الطرفين، نجد:

$$\psi_o(x)=Ne^{-\alpha x^2}, \qquad \alpha=\frac{m\omega}{2\hbar}$$

حيث N **هو ثابت التكامل. من شرط المعايرة** $\int_{-\infty}^{\infty}\psi_o^2(x)\,dx=1$ **نجد أن** $N^2=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}$ **. وقد استخدمنا التكامل الفياسي** $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$ **.**

5- اثبت أن:

$$|n\rangle=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$$

الحل: باستخدام العلاقة $\hat{a}^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$ **نجد أن**

$$\hat{a}^\dagger|0\rangle=\sqrt{1}|1\rangle;\quad \hat{a}^\dagger|1\rangle=\sqrt{2}|2\rangle;\quad \hat{a}^\dagger|2\rangle=\sqrt{3}|3\rangle$$

بالتالى فإن:

$$|3\rangle=\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{a}^\dagger|2\rangle=\frac{1}{\sqrt{3\times 2}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^2|1\rangle=\frac{1}{\sqrt{3\times 2\times 1}}\left(\hat{a}^\dagger\right)^3|0\rangle$$

ولهذا فإن الحالة العامة تحكمها العلاقة: $|n\rangle=\frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ **.**

6- جسيم كتله m **واقع تحت تأثير جهد متذبذب توافقي خطي بدأ عند الزمن** $t=0$ **من المستوى** $|\psi(t=0)\rangle=N\left(\sqrt{2}|0\rangle+|3\rangle\right)$ **.**

أ- احسب ثابت العيارية.

$$1=\langle\psi,0|\psi,0\rangle=N^2\left[2\langle 0|0\rangle-\sqrt{2}\langle 0|3\rangle-\sqrt{2}\langle 3|0\rangle+\langle 3|3\rangle\right]$$

$$=N^2\left[2-0-0+1\right]=3N^2$$

$$\Rightarrow N=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ب- تحقق من أن المستوى للجسيم عند الزمن t يعطي بالعلاقة:

$$\left|\psi,t\right\rangle = N\left[\sqrt{2}e^{-iE_o t/\hbar}\left|0\right\rangle - e^{-iE_3 t/\hbar}\left|3\right\rangle\right]; \qquad E_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}e^{-i\omega t/2}\left|0\right\rangle - e^{-i7\omega t/2}\left|3\right\rangle\right]$$

ت- تحقق من القيمة المتوفعة التالية:

$$\left\langle\psi,t\right|\hat{H}\left|\psi,t\right\rangle = \left\langle\psi,0\right|\hat{H}\left|\psi,0\right\rangle$$

$$= \left|N\right|^2\left[2E_o + (-1)^2E_3\right] = \tfrac{2}{3}E_o + \tfrac{1}{3}E_3$$

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega$$

حيث استخدمنا الهاملتونيان $\hat{H} = \dfrac{\hat{p}^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$ **.**

ث- تحقق من القيمة المتوفعة التالية:

$$\left\langle\psi,t\right|\hat{V}\left|\psi,t\right\rangle = \left\langle\psi,0\right|\tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\left|\psi,0\right\rangle$$

$$= \frac{1}{4}\hbar\omega\left|N\right|^2\left[2\left\langle 0\right|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\left|0\right\rangle + \left\langle 3\right|2\hat{a}^\dagger\hat{a}+1\left|3\right\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{12}\hbar\omega\left[2(0+1)+(6+1)\right] = \frac{3}{4}\hbar\omega$$

وذلك استخدام

$$\hat{V} = \tfrac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \tfrac{1}{2}m\omega^2\left[\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\right]^2$$

$$= \tfrac{1}{4}\hbar\omega\left(\hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^{\dagger 2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{4}\hbar\omega\left(\hat{a}^2 + 2\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 + \hat{a}^{\dagger 2}\right)$$

والعلاقات:

$$, \ \hat{a}\left|m\right\rangle = \sqrt{m}\left|m-1\right\rangle, \ \hat{a}^\dagger\left|m\right\rangle = \sqrt{m+1}\left|m+1\right\rangle, \ \left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$$

$\left\langle 0\right|\hat{a}^2\left|0\right\rangle = \left\langle 0\right|\hat{a}^2\left|3\right\rangle = 0,$ **ألخ**,

تمارين عامة

1- استخدم التعريف $\langle \hat{A} \rangle = \langle n | \hat{A} | n \rangle$ لإثبات أن

$\langle \hat{a} \rangle$	0	$\langle \hat{x} \rangle$	0
$\langle \hat{a}^\dagger \rangle$	0	$\langle \hat{p} \rangle$	0
$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle$	$n+1$	$\langle \hat{x}^2 \rangle$	$\frac{\hbar}{m\omega}\left(n+\frac{1}{2}\right)$
$\langle \hat{a}^\dagger\hat{a} \rangle$	n	$\langle \hat{p}^2 \rangle$	$m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

2- احسب القيم:

$$\Delta\hat{x} = \sqrt{<\hat{x}^2> - <\hat{x}>^2} \quad \text{و} \quad \Delta\hat{p} = \sqrt{<\hat{p}^2> - <\hat{p}>^2}$$

واثبت أن $\Delta\hat{x}\Delta\hat{p} = (n+\frac{1}{2})\hbar$.

3- اثبت العلاقات التالية:

$$\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\,\hat{a}^\dagger\right); \quad \left[\hat{a}, H\right] = \hbar\omega\hat{a}; \quad \left[\hat{a}^\dagger, H\right] = -\hbar\omega\hat{a}^\dagger$$

4- استخدم مؤثر الفناء $\hat{a}$ لحساب دالة المستوى $|1\rangle$ للمتذبذب التوافقي الخطي.

5- اعتبر الهملتونيان للمتذبذب التوافقي الخطي باتجاهي المحور السيني والصادي للإحداثيات الكرتيزية يعطي بالشكل:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2) + \frac{k}{2}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \qquad k = m\omega^2$$

اثبت أن

$$\hat{H} = \left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y + 1\right)\hbar\omega,$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = i\hbar(\hat{a}_x\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y)$$

$$\left[\hat{L}_z, \hat{H}\right] = 0$$

حيث

$$\hat{p}_x = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x\right), \qquad \hat{p}_y = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y\right)$$

ملحوظة: استخدم علاقات التبادل التالية:

$$\left[\hat{x}, \hat{y}\right] = \left[\hat{x}, \hat{p}_y\right] = \left[\hat{y}, \hat{p}_x\right] = \left[\hat{p}_x, \hat{p}_y\right] = 0,$$

$$\left[\hat{a}_x, \hat{a}_y\right] = \left[\hat{a}_x, \hat{a}_y^\dagger\right] = \left[\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y\right] = \left[\hat{a}_x^\dagger, \hat{a}_y^\dagger\right] = 0.$$

6- باستخدام الهملتونيان:

$$\hat{H} = \left(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1\right)\hbar\omega$$

والدالة

$$\left|n_x, n_y\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|1,0\right\rangle + \left|0,1\right\rangle\right],$$

اثبت أن

$$\left\langle n_x, n_y\right|\hat{H}\left|n_x, n_y\right\rangle = 2\hbar\omega$$

7- اثبت أن

$$\left\langle l\,|\,\hat{x}^3\,|\,n\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{3/2} \times \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} & \text{for } l = n+3 \\ 3(n+1)\sqrt{n+1} & \text{for } l = n+1 \\ 3n\sqrt{n} & \text{for } l = n-1 \\ \sqrt{n(n-1)(n-2)} & \text{for } l = n-3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

و

$$\left\langle l\,|\,\hat{x}^4\,|\,n\right\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2} \times \begin{cases} \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} & \text{for } l = n+4 \\ (4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)} & \text{for } l = n+2 \\ 6n^2+6n+3 & \text{for } l = n \\ (4n-2)\sqrt{n(n-1)} & \text{for } l = n-2 \\ \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} & \text{for } l = n-4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

8- جسيم بدأ من المستوى $\left|\psi(t=0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$ **عند الزمن** $t = 0$**.**

ج- تحقق من أن المستوى للجسيم عند الزمن t **يعطي بالعلاقة:**

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_o t/\hbar}\left|0\right\rangle + e^{-iE_1 t/\hbar}\left|1\right\rangle\right),$$

$$E_o = \frac{1}{2}\hbar\omega, \quad E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

ح- اثبت أن:

$$\langle x(0)\rangle = \langle \psi(0)| x |\psi(0)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}},$$
$$\langle p(0)\rangle = \langle \psi(0)| p |\psi(0)\rangle = 0,$$
$$\langle x(t)\rangle = \langle \psi(t)| x |\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos(\omega t),$$
$$\langle p(t)\rangle = \langle \psi(t)| p |\psi(t)\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\sin(\omega t)$$

خ - باستخدام نظرية إيرنفست اثبت أن:

$$\langle \dot{x}(t)\rangle = \frac{\langle p(t)\rangle}{m},$$
$$\langle \dot{p}(t)\rangle = -m\omega^2 \langle x(t)\rangle$$

د - حل المعادلات التفاضلية السابقة وتأكد من الحل:

$$\langle x(t)\rangle = \langle x(0)\rangle \cos(\omega t) + \frac{\langle p(0)\rangle}{m}\sin(\omega t),$$
$$\langle p(t)\rangle = \langle p(0)\rangle \sin(\omega t) - m\omega^2 \langle x(0)\rangle \cos(\omega t)$$