Quelques remarques sur les espaces de Lorentz et les potentiels de Riesz

Luc TARTAR[1]

A titre d'exemples pour se familiariser avec les espaces de Lorentz, j'expose ci dessous quelques remarques que j'avais écrites fin octobre 2004 après une question de mon collègue Giovanni LEONI, qui enseignait à ce moment là un cours sur les intégrales singulières. Sa question portait sur certaines estimations concernant les potentiels de Riesz[2], qui sont définis dans R^N par

$$I_\alpha(f) = f \star \frac{1}{r^{N-\alpha}} \text{ pour } 0 < \alpha < N. \tag{1}$$

Il m'avait cité quelques résultats, tous pour $f \in L^p(R^N)$, et j'avais regardé ce que je pouvais dire de mieux en utilisant la théorie de l'interpolation des espaces de Banach et les espaces de Lorentz.

J'avais appris la théorie de l'interpolation des espaces de Hilbert en lisant le premier chapitre du premier volume du livre de Jacques-Louis LIONS et Enrico MAGENES, que j'avais acheté sans que mon directeur de thèse m'ait dit de le lire, mais ensuite il m'avait donné à lire son article avec Jaak PEETRE, où j'avais appris la théorie pour les espaces de Banach, et plus tard il m'avait posé des questions liées à l'interpolation non linéaire, ce qui fit ma thèse, soutenue en avril 1971. C'était un peu avant que je l'aie finie que j'avais reçu beaucoup d'articles de PEETRE, dont celui où il montrait que la famille à trois paramètres qu'il avait introduite avec J.-L. LIONS ne dépend en fait que de deux paramètres, θ qu'ils avaient déjà introduit, et un seul autre paramètre $p \in [1, \infty]$ (et PEETRE a aussi considéré le cas où $0 < q < 1$, qui donne des espaces quasi normés).

Je n'ai pas assez insisté sur le fait que c'est grâce aux simplifications de PEETRE que la théorie a pu devenir si utile, mais j'ai lu pour la première fois sur les espaces de Lorentz dans un chapitre d'un livre de BUTZER & BERENS sur la théorie des semi-groupes, et c'est là que j'ai vu pour la première fois écrite la théorie de l'interpolation des espaces de Banach avec seulement deux paramètres, car l'article de PEETRE n'avait pas reproduit la théorie complète de son nouveau point de vue.

Yves MEYER fut mon collègue à Orsay, de 1975 où j'y suis arrivé jusqu'au moment où il est parti à l'Ecole Polytechnique (vers 1979 je crois), et il m'avait mentionné une fois un espace introduit par Antoni ZYGMUND, pour lequel j'avais noté moi même que c'est un espace d'interpolation. J'ai souvent mentionné que les spécialistes d'analyse harmonique mentionnent rarement la théorie de l'interpolation, peut-être parce que certaines contributions de E. STEIN n'ont pas été suffisamment mentionnées au début, mais je pense qu'il serait mieux que cette situation change, et le livre récent de Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET (Recent developments in the Navier-Stokes problem, CRC Press, Boca Raton) va un peu dans ce sens car il mentionne la théorie de l'interpolation dès le début; comme il m'avait donné un "preprint" de son livre à l'occasion d'une de mes visites d'un mois à Evry (celle en décembre 2002/janvier 2003, je crois), j'avais pu voir qu'il y décrit ensuite beaucoup des outils utilisés en analyse harmonique, et qu'il y a des ressemblances avec les méthodes de la théorie de l'interpolation dans certains cas.

Je me considère un peu comme un dinosaure, ayant appris l'interpolation il y a longtemps et ayant appris des morceaux d'analyse harmonique en les entendant et en essayant de vérifier ces résultats, mais rarement en lisant, et il est possible que certains des résultats présentés ci dessous ne soient écrits nulle part.

La convolution par $f \in L^1(R^N)$ envoie $L^1(R^N)$ dans lui même et $L^\infty(R^N)$ dans lui même, et puisque pour $1 < p < \infty$ et $1 \le q \le +\infty$ on a $L^{p,q}(R^N) = \big(L^1(R^N), L^\infty(R^N)\big)_{1/p',q}$, la convolution par $f \in L^1(R^N)$ envoie $L^{p,q}(R^N)$ dans lui même. La fonction $\frac{1}{r^{N-\alpha}}$ appartient à l'espace de Marcinkiewicz $L^{N/(N-\alpha),\infty}(R^N)$ (dans la notation des espaces de Lorentz), et donc on déduit que

$$f \in L^1(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in L^{N/(N-\alpha),\infty}(R^N), \tag{2}$$

[1] University Professor of Mathematics, Department of Mathematical Sciences, CARNEGIE MELLON University, Pittsburgh, PA 15213-3890, Etats-Unis. tartar@cmu.edu

[2] Les opérateurs de Riesz R_j sont définis en transformée de Fourier par $\mathcal{F}R_j u(\xi) = \frac{i\,\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}u(\xi)$ et ont été introduit par Marcel RIESZ, et comme ils correspondent à des intégrales singulières de noyaux $\frac{C_N x_j}{r^{N+1}}$, je suppose que c'est aussi lui qui a introduit les potentiels de Riesz, et non son frère ainé Frédéric RIESZ (prénommé Frigyes en Hongrois).

ce qui est plus précis que de dire que $I_\alpha(f) \in L^q_{loc}(R^N)$ pour tout $q < N/(N-\alpha)$.

Le dual de $L^{N/\alpha,1}(R^N)$ est $L^{N/(N-\alpha),\infty}(R^N)$, ce qui montre que

$$f \in L^{N/\alpha,1}(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in L^\infty(R^N). \tag{3}$$

L'interpolation entre $L^1(R^N)$ et $L^{N/\alpha,1}(R^N)$ se fait à l'aide du théorème de réitération de J.-L. LIONS & PEETRE, qui dit que pour $0 < \theta < 1, 1 \le q \le \infty$ on a $\big(L^1(R^N), L^{N/\alpha,1}(R^N)\big)_{\theta,q} = L^{p,q}(R^N)$ avec $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{N/\alpha} = 1 - \theta + \frac{\theta\,\alpha}{N}$, et comme on a $\big(L^{N/(N-\alpha)}(R^N), L^\infty(R^N)\big)_{\theta,q} = L^{r,q}(R^N)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{N/(N-\alpha)} + \frac{\theta}{\infty} = 1 - \theta + \frac{(\theta-1)\alpha}{N} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$, on déduit que

$$\text{pour } 1 < p < \frac{N}{\alpha}, 1 \le q \le \infty, f \in L^{p,q}(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in L^{r,q}(R^N) \text{ avec } \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}, \text{ i.e. } r = \frac{p\,N}{N - \alpha\,p}, \tag{4}$$

et si $q = p$ on a $L^{r,q}(R^N) \subset L^{r,r}(R^N) = L^r(R^N)$ puisque $p \le r$, et donc une conséquence de (4) est

$$\text{pour } 1 < p < \frac{N}{\alpha}, f \in L^p(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in L^{p\,N/(N-\alpha\,p)}(R^N). \tag{5}$$

Les espaces duaux ont peut-être été identifiés par LORENTZ, mais la théorie de l'interpolation de J.-L. LIONS & PEETRE dit que le dual de $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ est $(E_0', E_1')_{\theta,p'}$ pour $1 \le p < \infty$ (et $0 < \theta < 1$, bien sûr). Quand j'étais étudiant, j'avais montré que $(E_0', E_1')_{\theta,1}$ est un dual, et J.-L. LIONS m'avait dit que PEETRE l'avait déjà montré (peut-être dans des notes au Brésil); pour cette remarque ainsi que d'autres, il est bon de rappeler les définitions des méthodes (duales) K et J. Pour $t > 0$ et $f \in E_0 + E_1$ on définit

$$K(t, f) = \inf\{||f_0||_0 + t\,||f_1||_1 \mid f = f_0 + f_1, f_0 \in E_0, f_1 \in E_1\}, \tag{6}$$

qui donne une famille de normes équivalentes sur $E_0 + E_1$, et pour $0 < \theta < 1$ et $1 \le p \le \infty$, on définit

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = \Big\{f \mid t^{-\theta} K(t, f) \in L^p\Big(0, \infty; \frac{dt}{t}\Big)\Big\}, \tag{7}$$

mais pour $a > 1$ il est équivalent de dire que

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = \big\{f \mid a^{-n\,\theta} K(a^n, f) \in \ell^p\big\}, \tag{8}$$

et il est naturel d'introduire l'espace

$$(E_0, E_1)_{\theta,c_0} = \big\{f \in E_0 + E_1 \mid a^{-n\,\theta} K(a^n, f) \in c_0\big\}, \tag{9}$$

qui contient tous les $(E_0, E_1)_{\theta,p}$ pour $1 \le p < \infty$, est contenu dans $(E_0, E_1)_{\theta,\infty}$, et a $(E_0', E_1')_{\theta,1}$ comme dual, comme l'avait donc remarqué PEETRE avant moi. On dit qu'un espace de Banach

$$F \text{ est de classe } \theta \text{ si } (E_0, E_1)_{\theta,1} \subset F \subset (E_0, E_1)_{\theta,\infty}, \tag{10}$$

avec injections continues bien sûr, et cette définition s'étend aux cas où $\theta = 0$ ou $\theta = 1$, car pour $p = \infty$ on peut utiliser la définition (7) ou (8), et pour $p = 1$ on peut utiliser (12) ou (13), et pour cette méthode duale J, on définit

$$J(t, g) = \max\{||g||_0, ||g||_1\} \text{ pour } g \in E_0 \cap E_1, \tag{11}$$

et on montre que

$$(E_0, E_1)_{\theta,p} = \Big\{g = \int_0^\infty g(t)\,\frac{dt}{t} \in E_0 + E_1 \mid t^{-\theta} J\big(t, g(t)\big) \in L^p\big(0, \infty; \frac{dt}{t}\big)\Big\}, \tag{12}$$

ou

$$(E_0,E_1)_{\theta,p} = \Big\{ g = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n \in E_0+E_1 \mid a^{-n\theta} J\big(a^n, g_n\big) \in \ell^p \Big\}. \tag{13}$$

Avec ces notations, le théorème de réitération dit que

$$\begin{array}{l} \text{si } F_0 \text{ est de classe } \theta_0, F_1 \text{ est de classe } \theta_1, \text{ avec } 0 \le \theta_0, \theta_1 \le 1 \text{ et } \theta_1 \ne \theta_0, \text{ alors} \\ (F_0,F_1)_{\theta,p} = (E_0,E_1)_{\eta,p} \text{ avec } \eta = (1-\theta)\theta_0 + \theta\,\theta_1 \text{ pour } 0<\theta<1, 1 \le p \le \infty. \end{array} \tag{14}$$

On peut améliorer (3) en

$$f \in L^{N/\alpha,1}(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in C_0(R^N), \tag{15}$$

parce que pour $\varphi \in C_c(R^N)$ on a $I_\alpha(\varphi) \in C_0(R^N)$, et que $C_c(R^N)$ est dense dans $L^{N/\alpha,1}(R^N)$. La théorie générale dit que $E_0 \cap E_1$ est dense dans $(E_0,E_1)_{\theta,p}$ for $0<\theta<1$ et $1 \le p < \infty$, mais comme le choix $E_0 = L^1(R^N)$ et $E_1 = L^\infty(R^N)$ n'est pas bon puisque $C_c(R^N)$ n'est pas dense dans $L^1(R^N) \cap L^\infty(R^N)$, on utilise le théorème de réitération pour obtenir $L^{N/\alpha,1}(R^N)$ comme un espace d'interpolation entre $L^{p_0}(R^N)$ et $L^{p_1}(R^N)$ avec $1 \le p_0 < p_1 < \infty$. Le fait que $I_\alpha(\varphi) \in C_0(R^N)$ peut sembler dû au fait que $\frac{1}{r^{N-\alpha}}$ tend vers 0 à l'infini, mais en fait pour tout $g \in L^{N/(N-\alpha),\infty}(R^N)$, on a $g \star \varphi$ tend vers 0 à l'infini, car cette propriété découle du seul fait que $\frac{K(t,g)}{t} \to 0$ quand $t \to \infty$.

Giovanni LEONI m'avait mentionné un résultat de ADAMS, que $f \in L^{N/\alpha}(R^N)$ implique $I_\alpha(f) \in BMO(R^N)$, et j'avais tout de suite conjecturé qu'un meilleur résultat est

$$f \in L^{N/\alpha,\infty}(R^N) \text{ implique } I_\alpha(f) \in BMO(R^N). \tag{16}$$

J'avais d'abord démontré (16) pour $\alpha > 1$, en utilisant le fait que $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{N,\infty}(R^N)$ pour $j = 1,\ldots,N$ implique $u \in BMO(R^N)$, par le même argument que Fritz JOHN et Louis NIRENBERG ont utilisé dans leur travail initial (pour $u \in W^{1,N}(R^N)$); la semi norme de $BMO(R^N)$ est définie par

$$||u||_{BMO} = \sup_{\text{cubes } Q} \frac{1}{|Q|} ||u-u_Q||_{L^1(Q)}, \text{ avec } u_Q = \frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\,dx, \tag{17}$$

et pour le cube unité Q_1 on a

$$||u-u_{Q_1}||_{L^1(Q_1)} \le C_1 ||\nabla u||_{L^1(Q_1)} \le C_2 ||\nabla u||_{L^{N,\infty}(Q_1)} \le C_2 ||\nabla u||_{L^{N,\infty}(R^N)}, \tag{18}$$

et ensuite on utilise un changement d'échelle, en notant que la norme dans $L^{p,q}(R^N)$ change comme la norme de $L^p(R^N)$, indépendamment de la valeur de q, mais on peut aussi dire que pour chaque cube Q on a

$$||u-u_Q||_{L^1(Q)} \le C_1 |Q|^{1/N} ||\nabla u||_{L^1(Q)} \le C_1 |Q|^{1/N}\, |Q|^{(N-1)/N} ||\nabla u||_{L^{N,\infty}(Q)} \le C_1 |Q|\, ||\nabla u||_{L^{N,\infty}(R^N)}, \tag{19}$$

puisque c'est précisément la définition initiale de MARCINKIEWICZ que $v \in L^{p,\infty}(\Omega)$ veut dire qu'il existe une constante C telle que pour tout E measurable $\subset \Omega$ on a $\int_E |v|\,dx \le C\,|E|^{1/p'}$. Donc pour $\alpha > 1$ et $j = 1,\ldots,N$, on a $\frac{\partial(I_\alpha(f))}{\partial x_j} = f \star g_j$ avec $g_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(\frac{1}{r^{N-\alpha}}\big) = -(N-\alpha)\frac{x_j}{r}\frac{1}{r^{N+1-\alpha}} \in L^{N/(N+1-\alpha),\infty}(R^N)$, et on utilise l'interpolation pour l'application $f \mapsto f \star g_j$, qui envoie $L^1(R^N)$ dans $L^{N/(N+1-\alpha),\infty}(R^N)$ et $L^{N/(\alpha-1),1}(R^N)$ dans $L^\infty(R^N)$, et le théorème de réitération donne $\frac{\partial(I_\alpha(f))}{\partial x_j} \in L^{N,\infty}(R^N)$, et donc $I_\alpha(f) \in BMO(R^N)$ (l'argument d'interpolation sert à montrer que la convolution envoie $L^{p,\infty}(R^N) \times L^{q,\infty}(R^N)$ dans $L^{r,\infty}(R^N)$ si $1 < p,q,r < \infty$ vérifient $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$). Bien sûr, cette méthode utilise plus que $\frac{1}{r^{N-\alpha}} \in L^{N/(N-\alpha),\infty}(R^N)$, puisqu'on a utilisé que ses dérivées appartiennent à $L^{N/(N+1-\alpha),\infty}(R^N)$.

La même méthode marche pour montrer que (16) est vrai pour $\alpha = 1$, mais la convolution avec les dérivées de $\frac{1}{r^{N-1}}$ fait apparaître les opérateurs de Riesz et donc on doit utiliser le théorème de Calderón–Zygmund pour montrer que pour $f \in L^{N,\infty}(R^N)$ les dérivées de $I_1 f$ appartiennent à $L^{N,\infty}(R^N)$.

Pour démontrer (16) pour $0 < \alpha < 1$, j'avais utilisé une estimation uniforme sur les atomes (de l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(R^N)$), et j'explique en appendice ce que sont ces atomes, mais récemment j'ai trouvé une démonstration plus simple, que je décris maintenant.

Pour $h \in R^N$, l'opérateur de translation τ_h est défini par $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$ pour tout $x \in R^N$, et c'est une isométrie de $L^p(R^N)$ dans lui même pour $1 \le p \le \infty$, d'inverse τ_{-h}, et donc par interpolation τ_h envoie $L^{p,q}(R^N)$ dans lui même pour $1 < p < \infty, 1 \le q \le \infty$.

$$\text{Pour } 0 < \theta < 1, \{u \in L^1_{loc}(R^N) \mid ||\tau_h u - u||_{L^{N/\theta,\infty}} \le M\,|h|^\theta \text{ pour tout } h \in R^N\} \subset BMO(R^N), \tag{20}$$

et c'est aussi vrai pour $\theta = 1$, où l'hypothèse est équivalente à $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^{N,\infty}$ pour $j = 1, \ldots, N$, et c'est aussi vrai pour $\theta = 0$, où l'hypothèse veut dire $|u(x) - u(y)| \le M$ pour presque tous $x, y \in R^N$ et implique $|u(x) - u_Q| \le M$ pour presque tous $x \in Q$.

Pour démontrer (20), on prend un cube arbitraire Q et on a $|u(x) - u_Q| \le \frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - u(y)|\,dy$ pour presque tout $x \in Q$ et donc $\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - u_Q|\,dx \le \frac{1}{|Q|^2}\int_{Q\times Q} |u(x) - u(y)|\,dx\,dy$, et si on pose $y = x - h$ on a $h \in 2Q_0$ où Q_0 est le translaté de Q centré en 0, ce qui donne $\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - u_Q|\,dx \le \frac{1}{|Q|^2}\int_{2Q_0}\big(\int_Q |u - \tau_h u|\,dx\big)\,dh$; comme $\int_Q |u - \tau_h u|\,dx \le ||\tau_h u - u||_{L^{N/\theta,\infty}}|Q|^{1/(N/\theta)'} \le M\,|h|^\theta |Q|^{1-(\theta/N)}$ et $\int_{2Q_0} |h|^\theta\,dh \le C\,|Q_0|^{1+(\theta/N)}$ puisqu'on utilise $|h| \le 2|Q_0|^{\theta/N}$, on déduit que $\frac{1}{|Q|}\int_Q |u(x) - u_Q|\,dx \le C\,M$. Il reste à observer que

$$w = \frac{1}{r^\lambda} \text{ satisfait } ||\tau_h w - w||_{L^{N/(\lambda+\theta),\infty}} \le M\,|h|^\theta \text{ pour tout } h \in R^N, \text{si } \lambda + \theta < N, \lambda > 0, 0 < \theta < 1, \tag{21}$$

et choisissant $\lambda = N - \alpha$ et $0 < \theta < \min\{\alpha, 1\}$ on voit que (21) implique que $||\tau_h I_\alpha f - I_\alpha f||_{L^{N/\theta,\infty}} = ||f \star (\tau_h w - w)||_{L^{N/\theta,\infty}} \le ||f||_{L^{N/\alpha,\infty}}||\tau_h w - w||_{L^{N/(N-\alpha+\theta),\infty}} \le M\,|h|^\theta ||f||_{L^{N/\alpha,\infty}}$, puisque la convolution envoie $L^{N/\alpha,\infty}(R^N) \times L^{N/(N-\alpha+\theta),\infty}(R^N)$ dans $L^{N/\theta,\infty}(R^N)$, et donc d'après (20) on a $I_\alpha f \in BMO(R^N)$.

Pour démontrer (21), on définit $A(t) = \{x \in R^N \mid |w(x-h) - w(x)| > t\}$ et on doit montrer qu'il existe M tel que $|A(t)| \le M^{N/(\lambda+\theta)}|h|^{\theta\,N/(\lambda+\theta)}t^{-N/(\lambda+\theta)}$ pour tout $t > 0$; on utilise l'inégalité $|w(x-h) - w(x)| \le \frac{\lambda\,|h|}{(|x|-|h|)^{\lambda+1}}$ qui est valable pour $|x| > |h|$ et obtenue en intégrant la dérivée de w sur le segment $[x, x-h]$, qui donne la majoration $|w(x-h) - w(x)| \le \frac{C\,|h|}{|x|^{\lambda+1}}$ pour $|x| > 2|h|$ et donc $|w(x-h) - w(x)| \le \frac{C_1|h|^\theta}{|x|^{\lambda+\theta}}$ pour $|x| > 2|h|$. Si $t \le \frac{C_1|h|^\theta}{|2h|^{\lambda+\theta}}$ on a $A(t) \subset B(0,\rho)$ avec $\frac{C_1|h|^\theta}{\rho^{\lambda+\theta}} = t$ car $\rho \ge 2|h|$, et donc $|A(t)| \le C_N\rho^N = C_N\big(\frac{C_1|h|^\theta}{t}\big)^{N/(\lambda+\theta)}$. Si $t > \frac{C_1|h|^\theta}{|2h|^{\lambda+\theta}}$ on utilise $|w(x-h) - w(x)| \le |w(x-h)| + |w(x)|$ et on observe que si $|w(x-h)| + |w(x)| > t$ on a $|w(x-h)| > \frac{t}{2}$ ou $|w(x)| > \frac{t}{2}$ et donc $A(t) \subset B(0,\sigma) \cup B(h,\sigma)$ avec $\frac{1}{\sigma^\lambda} = \frac{t}{2}$, et donc $|A(t)| \le 2C_N\sigma^N = \frac{C_2}{t^{N/\lambda}}$, mais comme $\frac{N}{\lambda} > \frac{N}{\lambda+\theta}$ et $\frac{1}{t} \le C_3|h|^\lambda$ on déduit $|A(t)| \le \frac{C_2}{t^{N/(\lambda+\theta)}}(C_3|h|^\lambda)^{(N/\lambda)-(N/(\lambda+\theta))} = C_4\big(\frac{|h|^\theta}{t}\big)^{N/(\lambda+\theta)}$.

Pour $f^p(R^N)$ avec $p > \frac{N}{\alpha}$, Giovanni LEONI m'avait dit que $I_\alpha f$ appartient à des espaces de fonctions Hölderiennes, et évidemment l'ordre croit comme $\alpha - \frac{N}{p}$ avec des exceptions quand cette valeur est entière. Par utilisation de l'interpolation, on fait apparaître une famille plus large que celle des espaces $C^{0,\beta}(R^N), C^{1,\beta}(R^N), \ldots$, puisque la théorie générale utilise deux paramètres, et donc on peut donner des résultats plus précis, mais en fait, comme l'avait remarqué Jaak PEETRE il faut réécrire la théorie avec des espaces un peu différents, puisque la définition de $C^{0,\beta}(R^N)$ est l'espaces des fonctions de $L^\infty(R^N)$ telles que $|u(y) - u(x)| \le M\,|y-x|^\beta$ pour presque tous $x, y \in R^N$, et que c'est seulement la deuxième partie qui nous intéresse, qui peut s'écrire $||\tau_h u - u||_{L^\infty} \le M\,|h|^\beta$ pour tout $h \in R^N$.

Comme cette question nous écarte des espaces de Lorentz, je ne l'ai pas vraiment étudiée.

Appendice: On peut estimer la semi norme d'une fonction u dans $BMO(R^N)$ en majorant uniformément $|\int a\,u\,dx|$ pour tous les atomes a, ce qui est lié au fait que les atomes engendrent l'espace de Hardy $\mathcal{H}^1(R^N)$ et que le dual de $\mathcal{H}^1(R^N)$ est $BMO(R^N)$, mais en fait il n'y a pas besoin de connaître ce qu'est $\mathcal{H}^1(R^N)$ pour cet argument, et on va montrer que

$$u \in BMO(R^N) \text{ si et seulement s'il existe } M \text{ tel que } \Big|\int_{R^N} a\,u\,dx\Big| \le M \text{ pour tous les atomes } a, \tag{A1}$$

en ayant défini un atome (pour $\mathcal{H}^1(R^N)$) par

$$a \in L^\infty(R^N) \cap L^1(R^N) \text{ est un atome si } \textit{support}(a) \subset \text{cube } Q \text{ avec } \int_Q a\,dx = 0 \text{ et } ||a||_{L^\infty} \leq \frac{1}{|Q|}. \qquad (A2)$$

Choisissant un cube Q, la condition $|\int_Q a\,u\,dx| \leq M$ pour tous les atomes à support dans Q, est exactement l'inégalité $\inf_{c \in R} \int_Q |u(x) - c|\,dx \leq M\,|Q|$. En effet, comme $\int_Q a\,dx = 0$, on a $|\int a\,u\,dx| = |\int a(u - c)\,dx| \leq \frac{1}{|Q|}\,||u - c||_{L^1}$, et prenant le infimum pour $c \in R$ on a $|\int_Q a\,u\,dx| \leq \frac{1}{|Q|} \inf_{c \in R} \int_Q |u(x) - c|\,dx$ pour tous les atomes a à support dans Q. Inversement, si $F(c) = \int_Q |u(x) - c|\,dx$ alors F est Lipschitz et vaut $|c|\,|Q| + O(1)$ à l'infini et donc atteint son minimum en c_*, et si on note $\omega_+ = \{x \mid u(x) > c_*\}$, $\omega_0 = \{x \mid u(x) = c_*\}$, et $\omega_- = \{x \mid u(x) < c_*\}$, la condition d'optimalité est $|\omega_+| + |\omega_0| \geq |\omega_-|$ et $|\omega_-| + |\omega_0| \geq |\omega_+|$, ce qui implique $|\omega_+|, |\omega_-| \leq \frac{|Q|}{2}$; on choisit Q_+ avec $\omega_+ \subset Q_+ \subset \omega_+ \cup \omega_0$ et $|Q_+| = \frac{|Q|}{2}$, puis $a_*(x) = \frac{1}{|Q|}$ si $x \in Q_+$ et $a_*(x) = \frac{-1}{|Q|}$ si $x \in Q_- = Q \setminus Q_+$, et on obtient un atome a_* tel que $|\int a_* u\,dx| = \frac{1}{|Q|}\,||u - c_*||_{L^1}$.

Ce n'est pas la définition initiale que John et Nirenberg avaient choisi pour $BMO(R^N)$, $\int_Q |u(x) - u_Q|\,dx \leq M\,|Q|$ pour tous les cubes Q, qui était plus naturelle pour eux; je ne sais pas qui a introduit la variante précédente $\inf_{c \in R} \int_Q |u(x) - c|\,dx \leq M\,|Q|$ pour tous les cubes Q (peut-être Charles Fefferman), mais j'ai dû l'entendre à Orsay (peut-être par Yves Meyer) en liaison avec la propriété que $u \in BMO(R^N)$ implique $F(u) \in BMO(R^N)$ si F est Lipschitz. Bien sûr, on a $\inf_c \int_Q |u(x) - c|\,dx \leq \int_Q |u(x) - u_Q|\,dx$ pour tout $u \in L^1(Q)$, mais on a aussi $\int_Q |u(x) - u_Q|\,dx \leq 2 \inf_c \int_Q |u(x) - c|\,dx$ pour tout $u \in L^1(Q)$, et les deux définitions sont donc équivalentes. En effet, si $v = u - u_Q$ on a $\int_Q v(x)\,dx = 0$, ou $\int_Q v_+(x)\,dx = \int_Q v_-(x)\,dx = \frac{\int_Q |v(x)|\,dx}{2}$; changeant éventuellement le signe de v on peut supposer que $c_* \geq 0$ et on a alors $\int_Q |v(x) - c_*|\,dx \geq \int_{v<0} |v|\,dx = \frac{\int_Q |v(x)|\,dx}{2}$.