جامعة الملك فهد للبترول و المعادن
كلية العلوم
قسم العلوم الرياضية

دليل الطالب
لمسابقات الرياضيات

إعداد
د. خالد بن محمد فراتي
د. حسين بن سالم العطاس
د. منذر بن راشد الفريدان

١٤٢٨هـ

ⓒ جامعة الملك فهد للبترول والمعادن ، ١٤٢٧هـ
فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

كلية العلوم – قسم العلوم الرياضية
دليل الطالب لمسابقات الرياضيات.
كلية العلوم – قسم العلوم الرياضية – الدمام ١٤٢٧هـ
١٦ص؛ ١٦,٥×٢٣,٥سم

ردمك: ٣-٢١٩-٠٧-٩٩٦٠

١- الألعاب الذهنية ٢- الرياضيات – مسابقات أ العنوان
ديوي ٧٩٣,٧٤ ١٤٢٧/٦٨٤٨

رقم الإيداع: ١٤٢٧/٦٨٤٨
ردمك: ٧-٢١٩-٠٧-٩٩٦٠

الفهرس

مقدمة ٥

نبذة عن مسابقات الرياضيات ٦

مواضيع المسابقات الرياضية ٧

الجبر ٧

الهندسة ٧

نظرية الأعداد ٧

التوافقيات ٨

مهارات واستراتيجيات ٩

ما قبل البدء في الحل ٩

أثناء الحل ٩

مابعد الوصول إلى الحل ١١

أمثلة للنقاش ١٢

المثال الأول ١٢

المثال الثاني ١٣

المثال الثالث ١٤

وسائل الاستعداد ١٦

مقدمة

عزيزي الطالب

إننــا ونحــن نطرح هذا الدليــل بين يديك نــدرك تمــام الإدراك أنك تملك الكثير من المفاهيم الرياضية، ومهارات الحل والحساب، وطرق التفكير والاستنتاج الرياضي التي اكتسبتها عن طريق تحصيلك العلمي الذي ساهم به كل من والديك ومعلميك ومدرستك حتى أصبحت بهذه القدرة العلمية المميزة.

إن هذا الدليل هو بوابتك للمشــاركة في مســابقات الرياضيات، وزادك من اســتراتيجيات وأدوات التفوق فيها، وموجّه نفسي للتكيف معها، ومن ثم طريقك إلى الاستغلال الأمثل لمواهبك وإمكاناتك في التعامل مع أسئلة هذه المسابقات.

المؤلفون

نبذة عن مسابقات الرياضيات

تنظم في أنحاء العالم الكثير من مسابقات الرياضيات من أهمها:

- أولمبياد الرياضيات العالمية (International Mathematical Olympiad) وهي الأشهر في هذه المسابقات، وتقام سنوياً بمشاركة عدة دول من جميع أنحاء العالم.
- مسابقة الكانغرو العالمية للرياضيات (International Kangaroo Mathematics Contest) بدأت هذه المسابقة في أستراليا، ومن ثم انتقلت الفكرة إلى أوروبا، ثم انتشرت في جميع أنحاء العالم، وهي تعتبر أكبر مسابقة رياضية عالمية.
- دوري المدن (Tournament of Towns) وهي منافسات بدأت في الاتحاد السوفيتي، ومن ثم اتسعت المشاركات فيها لتشمل مدناً من جميع أنحاء العالم.

ونظراً لأهمية هذه المسابقات وعالميتها، وحرص الدول على التفوق فيها، فإن كثيراً من هذه الدول تحرص على إقامة المخيمات، وحلقات النقاش الخاصة بالرياضيات، وكذلك الدورات التدريبية، كما تحرص على مشاركة ممثليها في مسابقات إقليمية ووطنية، لإعدادهم الإعداد الجيد، ولتسهيل اختيار الفرق المشاركة في هذه المسابقات، وخصوصاً أولمبياد الرياضيات العالمية.

لمسابقات الرياضيات أهداف عدة منها:

- تعزيز موهبة الرياضيات والقدرة على حل المسائل الرياضية.
- اكتشاف وتشجيع وتحفيز الموهوبين.
- إطلاق متعة الاهتمام والاكتشاف في الرياضيات.
- تقديم خبرات جديدة وغنية أكثر مما يُقّدم في المناهج الدراسية.

تتنوع الأسئلة في مثل هذه المسابقات، ومن أهم أنواعها:

- أسئلة الاختيار من متعدد بحيث يكون هناك عدة اختيارات للإجابة، وأحد هذه الاختيارات هو الإجابة الصحيحة.
- أسئلة أجوبتها أعداد صحيحة بحيث يكون المطلوب هو الحل النهائي فقط، وهو عبارة عن عدد صحيح موجب.
- أسئلة تحريرية بحيث يكون المطلوب كتابة الحل بالتفصيل.

مواضيع المسابقات الرياضية

تتركز أسئلة المسابقات حول أربعة مواضيع، وفيما يلي هذه المواضيع وبعض محتوياتها:

الجبر ويشمل:

- المجموعات.
- كثيرات الحدود: نظرية الجبر الأساسية، الجذور، التحليل، العمليات الحسابية، نظرية تماثل كثيرات الحدود.
- المعادلات والمتراجحات، وتشمل جميع المتراجحات المشهورة مثل متراجحة المتوسط الحسابي الهندسي، ومتراجحة كوشي- شوارز.
- العمليات الحسابية.
- الدوال وخواصها، ومنها الدالة الأسية واللوغاريتمية، وكذلك العمليات على الدوال مثل العمليات الحسابية والتحصيل.
- حساب المثلثات.
- المنطق الرياضي وطرق الإثبات.

الهندسة وتشمل:

- الهندسة المستوية: الإحداثيات، المستقيمات، الزوايا، المثلثات، الأشكال الرباعية، الدائرة، الأشكال العديدة الأضلاع.
- الهندسة المجسمة: الكرة، الاسطوانة، القطوع المخروطية.
- الهندسة التحليلية والمتجهة: المتجهات، المسافة بين نقطتين وبين نقطة وخط مستقيم.

نظرية الأعداد وتشمل:

- مجموعات الأعداد والعمليات عليها.
- الأعداد الأولية.
- تحليل الأعداد.
- العمليات الحسابية.
- المضروب.
- التوافق: ٦=٢ (توافق ٤).

- المتتاليات: المنتهية وغير المنتهية.
- خوارزمية إقليدس.
- النظرية الأساسية للحساب: أي عدد طبيعي أكبر من الواحد، إما أن يكون عدداً أولياً، أو يمكن كتابته بشكل وحيد كحاصل ضرب أعداد أولية.
- نظرية أويلر، ومعادلات بل.
- نظريــة فرمــات الصغرى: يكون العدد الصحيح الموجب ن عددا أوليا إذا وفقط إذا كان (ن-١)!= -١ (توافق ن).

التوافقيات وتشمل:

- مبــادئ العــد: قوانين التباديل والتوافيــق، المجموعة الجزئية، التجزئــة، مثلث الكرخي (المعروف بمثلث باسكال)، نظرية ذات الحدين.
- مبدأ الاحتواء واللا احتواء (مبدأ التضمين والإقصاء).
- مبدأ برج الحمام (مبدأ العد الأساسي): إذا وزعنا م من الظروف على ن من الصناديق، وكان ن < م، فإنه يوجد صندوق يحتوي على ١+ (م − ١)/ن ظرفاً على الأقل.
- المجموع: رمز المجموع، الحد النوني.
- العلاقات الدورية.
- نظرية الرسوم.

مهارات واستراتيجيات

التعامل مع مسائل مسابقات الرياضيات يستلزم العديد من المهارات والاستراتيجيات في مرحلة ما قبل البدء في الحل، وأثناء الحل، وأخيراً ما بعد الوصول إلى الحل، وفيما يلي بعضاً منها.

ما قبل البدء في الحل

١- أقرأ وافهم المسألة

قراءة المســألة عــدَّة مرات بعناية وتمعُّن يســاهم في الفهم الصحيح لها، وهو أساس حلها.

٢- **حدّد الكلمات والأرقام الجوهرية**

حدد الكلمات والأرقام الجوهرية التى تتغير المسألة بتغييرها لتقودك إلى التفكير الصحيح في حل المسألة.

٣- **حدّد المعطى والمطلوب**

يمكن الاستعانة في ذلك بالترميز للمعطى والمطلوب بالحروف مثل «س ، ص، ل، ن، ...».

٤- **لا يصبك الإحباط وحاول عدة محاولات جادة**

لكل مسألة مفتاح، وقد لاتستطيع أن تجده من المحاولة الأولى، لذا عليك تكرار المحاولة المرة تلو الأخرى بمثابرة وعدم ملل حتى تصل إلى الحل.

أثناء الحل

المهارات والاستراتيجيات التالية تحتاج إلى مراجعة بدقة وعناية، وإلى تعزيز مستمر.

١- **استعمل أدوات توضيحية**

الأدوات التوضيحية تساهم في توضيح المسألة، وبالتالي تسهيل حلها.

٢- **أوجد نمط للحل**

للتعامل مع بعض المسائل التي تحتوي على أعداد كبيرة، أو تعبيرات معقدة، يكون من المفيد محاولة إيجاد نمط للحل من خلال حل المسألة في أبسط صورها، فمثلاً لحساب خانة الآحاد في العدد ٢٠٠٠٢، نجد أن خانة الآحاد في $٢^{١}$، $٢^{٢}$، $٢^{٣}$، $٢^{٤}$، $٢^{٥}$، ... تتبع النمط ٢، ٤، ٨، ٦، ٢، ...، وبالتالي يمكن إيجاد الحل مهما كان الأس كبيراً.

٣- **تَذَكّر القوانين الرياضية**

حل بعض المسائل يستلزم تذكر بعض القوانين الرياضية، فمثلاً للتعامل مع الدوال المثلثية، لابد من تذكر المتطابقات الخاصة بها، وكذلك لتحليل $س^{٤} - ص^{٤}$ لابد من معرفة قانون الفرق بين مربعين.

٤- **خمن حل ظاهر**

معرفة أحد الحلول لبعض المسائل يساهم في تبسيطها، ومن ثم يسهل حلها، فمثلاً لإيجاد أصفار كثيرة حدود من الدرجة الرابعة ، وفي حال إمكانية تخمين أحد هذه الأصفار، يمكن باستخدام القسمة تحويل المسألة إلى إيجاد أصفار كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ، وهكذا.

٥- **حاول بأرقام سلسة**

البدء بأرقام سلسة أو صغيرة يساهم إلى حد كبير في فهم بعض المسائل، فمثلاً إذا كانت المسألة عن ترتيب كرات كثيرة بشكل معين، فيمكن البدء بعدد أصغر من هذه الكرات ومن ثم الوصول إلى المطلوب.

٦- **اربط المسألة بأخرى مشابهة**

بعض المسائل تبدو مختلفة ولكن طريقة الحل فيها متشابهة ، فمثلاً يوجد تشابه في طريقة الحل لمسألة سحب كرات ذات الوان مختلفة مع مسألة اختيار كتب ذات مواضيع مختلفة.

٧- **قسم طريقة الحل إلى مراحل وخطوات**

مما يساعد على حل المسألة تقسيم حلها إلى خطوات، كما في المثال الثالث أدناه.

٨- **ابدأ بالعكس (من المطلوب إلى المعطى)**

يمكن حل بعض المسائل بأن تبدأ من المطلوب ومن ثم تحاول الوصول إلى المعطى، ثم تعكس الطريقة عند كتابة الحل بشكل مرتب.

٩- **اجعل تفكيرك مرنًا وكن واسع الأفق**

بعض المسائل لايمكن حلها بطريقة مباشرة، ولابد أن يكون تفكيرك مرناً، وأن تكون واسع الأفق لحلها.

ما بعد الوصول إلى حل

بعد حلّك لمسألة ما، من المفيد اتباع التالي:

١- **حاول حل تعميمات مختلفة للمسألة**

بعد الانتهاء من حل مسألة ذات أعداد أو صيغ أو معطيات معينة، حاول حل نفس المسألة بتعميمات مختلفة.

٢- **أوجد طريقة بديلة**

بعض طرق حل المسائل أسهل أو أقصر من الأخرى، فبعد الانتهاء من حل مسألة ما أسأل نفسك: هل توجد طريقة بديلة؟

٣- **تحقّق من الحل**

تستخدم هذه الطريقة غالباً في المسائل ذات الحسابات الكثيرة، وعادة ما يستخدم تعويض الحل في المسألة للتحقق من الحل.

٤- **ناقش الحل مع آخرين**

للتأكد من فهمك لمسألة ما، حاول أن تناقش حلها وتشرحه لآخرين.

أمثلة للنقاش

فيما يلي أمثلة نناقش فيها استخدام بعض الطرق المذكورة سابقاً.

المثال الأول

إذا كان $\frac{٤}{١٧}$ من عدد ما هو ٦٤٫٨ ، فأوجد $\frac{١٠}{١٧}$ من نفس العدد .

في البداية لابد أن نقرأ المسألة بعناية تامة ، ونلاحظ أن المعطى: $\frac{٤}{١٧}$ من عدد ما هو ٦٤٫٨، والمطلوب: $\frac{١٠}{١٧}$ من نفس العدد، فإذا أعطى هذا العدد رمز س، فيمكن صياغة المسألة كالتالي:

إذا كان $\frac{٤}{١٧}$ س = ٦٤٫٨ ، فأوجد $\frac{١٠}{١٧}$ س .

بهذه الطريقة أصبحت المسألة سهلة الحل، ويمكن حلها عن طريق:

١) حل المعادلة لإيجاد س

٢) إيجاد $\frac{٤}{١٧}$ س

وهكذا تصبح قيمة س = $\frac{٦٤٨}{١٠} \times \frac{١٧}{٤}$، ومن ثم يصبح المطلوب هو $\frac{١٠}{١٧}$ س = $\frac{١٠}{١٧} \times \frac{٦٤٨}{١٠} \times \frac{١٧}{٤}$ = ١٦٢ .

المثال الثاني

حل المعادلة التالية: ٩ س^{٤} + ٩ س^{٣} − ٤ س^{٢} − ٣ س + ١ = صفر.

في هـذا المثـال نحاول في البداية أن نجرب أعداداً سـهلة مثل صفـر و١ و−١، ونلاحظ أن س = صفـر أو س = ١ لا تحقـق المعادلـة، بينما س = −١ تحقـق المعادلة، وهذا يعنى أن س+١ هو أحد عوامل كثيرة الحدود ٩ س^{٤} + ٩ س^{٣} − ٤ س^{٢} − ٣ س + ١. بالقسـمة على س+١ نحصل على كثيرة حدود من الدرجة الثالثة ٩ س^{٣} − ٤س + ١، التي يمكن تحليلها بالتجميع والتحليل كالتالي:

٩ س^{٣} − س − ٣س + ١ = (٩ س^{٣} − س) − (٣س − ١) = س (٩ س^{٢} − ١) − (٣س − ١)

= س (٣س − ١)(٣س + ١) − (٣س − ١) (أستخدم قانون فرق بين مربعين)

= (٣س − ١) (س (٣س + ١) − ١) = (٣س − ١) (٣س^{٢} + س − ١).

وبالتالي فإن مجموعة الحل هي −١، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{-١ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$.

المثال الثالث

نعـرِّف التحصيـل د^{ل}(س)، حيث ل عدد صحيح موجب، بأنـه د(د(...د(س))) مكرراً ل من المرات. إذا كان يوجد عدد صحيح موجب ك ودالة د:ط ⟵ ط تحقق د^{ك}(ن) = ن + ١ لكل عدد طبيعي ن، أوجد هذه الدالة.

عنـد قراءة المسـألة بعناية، نلاحظ أن الكلمات «التحصيل» و «عـدد طبيعي» تعتبر كلمات وعبارات جوهرية، إذ أن تغييرها يغير المسألة بكاملها. كذلك المعطى هو د^{ك}(ن) = ن + ١، لـكل عـدد طبيعي ن، والمطلوب هو إيجاد هذه الدالة التى تحقق ذلك. ويمكن حل المسـألة عبر الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: إيجاد علاقة لـ د(ن)

يمكـن أن نحصل على علاقـة لـ د(ن) بتطبيق د على العلاقة المعطاة واسـتخدام العلاقة د(د^{ك}(ن))= د^{ك}(د(ن)). باستخدام ذلك نحصل على أن د(ن + ١) = د(ن) + ١.

الخطوة الثانية: إيجاد د(ن) بمعلومية د(١)

بتعويض قيم ن= ٢، ٣، ٤، ....، في العلاقة الناتجة من الخطوة الأولى، نحصل على

د(٢) = د(١) + ١ = د(١) + ٢ − ١

د(٣) = د(٢) + ١ = د(١) + ١ + ١ = د(١) + ٣ − ١

د(٤) = د(٣) + ١ = د(١) + ١ + ١ + ١ = د(١) + ٤ − ١

ومن ملاحظة النمط الناتج، يمكن استنتاج أن د(ن) = د(١) + ن − ١، ويمكن إثبات ذلك باستخدام الاستقراء الرياضي.

عندما ن =١ فإن العلاقة صحيحة. الآن نفترض أن العلاقة صحيحة للعدد م، ونثبتها للعدد م + ١ كمايلي:

د(م + ١) = د(م) + ١	معطى
= د(١) + م −١ + ١	لأن العلاقة صحيحة للعدد م
= د(١) + (م+ ١) − ١	

إذاً العبارة صحيحة عندما ن = م + ١.

الخطوة الثالثة: إيجاد د^{ر}(ن) بمعلومية د(١) لأي عدد طبيعي ر.

بتطبيق الدالة د على العلاقة الناتجة من الخطوة الثانية ر مرة نحصل على

د^{٢}(ن) = د(د(١) + ن − ١) = د(١) + { د(١) + ن − ١} − ١ = ٢ (د(١) − ١) + ن

د^{٣}(ن) = د(٢ (د(١) − ١) + ن) = د(١) + { ٢ (د(١) − ١) + ن} − ١ = ٣ (د(١) − ١) + ن

وهكذا يمكن استقراء العلاقة در(ن)= ر (د(١) − ١) + ن، ويمكن إثباتها بسهولة باستخدام الاستقراء الرياضى كما في الخطوة الثانية.

الخطوة الرابعة: إيجاد د(ن)

بتعويض ر= ك في العلاقة الناتجة من الخطوة الثالثة، واستخدام د^{ك}(ن) = ١ + ن نجد أن ١ + ن = ك (د(١) − ١) + ن، وهذا يؤدى إلى أن ١ = ك (د(١) − ١). بما أن ك و د(١) − ١ عددان طبيعيان، فإن ك = ١، وهكذا د(ن) = ١ + ن.

وسائل الاستعداد

الوسائل التالية تساعد على الاستعداد لمسابقات الرياضيات:

١- **الاطلاع على ما تم نشره عن المسابقات** : هذا الاطلاع يساهم في التعرف على بعض الأجواء، والأبعاد، والتوقعات والأهداف المصاحبة للمسابقات، وما تتطلبه من معلومات ومهارات وإعداد.

٢- **محاولة حل العديد من الأمثلة** : هذا يساعد في تنمية القدرة على التعامل مع مسائل المسابقات، ويمكن العثور على العديد من المسائل في كتب المسابقات والمواقع الإلكترونية.

٣- **المشاركة في برامج النقاش والتدريب** : تعتبر هذه من أهم وسائل الاستعداد للمسابقات، وتساهم في إحداث نقلة نوعية في مستوى الأداء، علما بأن من هذه البرامج ما يكون عبر الانترنت.