



Mathematical Programming

- ١-١ مقدمة
- ٢-١ البرمجة الخطية
- ٣-١ البرمجة الخطية الصحيحة
- ٤-١ البرمجة غير الخطية
- ٥-١ البرمجة الديناميكية

Introduction ١-١ مقدمة

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محده تسمى دالة الهدف Objective function، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات. هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود Constraints. ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

إن علم البرمجة يعتبر من العلوم الحديثة فقبل عام ١٩٤٠م لم يكن هناك طرق كثيرة لحل البرامج الرياضية في عدة متغيرات. ولكن وبعد ظهور الكمبيوتر ظهرت طرائق عديدة لحل مشكلات البرمجة الرياضية. ففي الفترة ما بين ١٩٤٠-١٩٦٠م شهد العالم تقدماً كبيراً في فرع مهم من فروع الأمثلية ويعرف بالبرمجة الخطية. ثم بعد ذلك ظهرت طرائق لحل مسائل البرمجة الرياضية بمعظم أشكالها.

إن للبرمجة الرياضية تطبيقات عديدة وهامة في مختلف مجالات الحياة: في العلوم، الهندسة، الرياضيات، الاقتصاد، التجارة وغيرها. نذكر منها:

١. تصميم المفاعلات الكيميائية.
٢. صناعة البلاستيك مثل الـ MTBE.
٣. تصميم محركات الطائرات.
٤. تصميم المباني والجسور.
٥. مسائل النقل والإنتاج.

وهناك استخدامات للبرمجة الرياضية في فروع التحليل العددي نذكر منها:

١. ملائمة البيانات Data fitting.
 ٢. المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.
- هذه فقط أمثلة بسيطة على التطبيقات العديدة للبرمجة الرياضية. ولكي نعطي فكرة عن البرمجة الرياضية، نأخذ في عين الاعتبار مسألة النقل: في إحدى الدول هناك سبع مصانع سكر. ينتج المصنع F_j كمية من السكر في الشهر الواحد مقدارها a_j طنًا. هناك ثلاثمائة موقع في تلك الدولة. يحتاج الموقع G_k كمية من السكر في الشهر الواحد مقدارها b_k طنًا. نفترض أن

لتكن $\sum_{i=1}^7 a_i = \sum_{k=1}^{300} b_k$. هي تكلفة نقل طن واحد من المصنع F_j إلى الموقع G_k . والمطلوب هو تحديد كمية السكر x_{jk} التي ينبغي نقلها من المصنع F_j إلى الموقع G_k بحيث تكون تكلفة النقل الكلية أقل ما يمكن. ونعطي الآن مثالا يوضح دالة الهدف والقيود

مثال ١-١-١

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1^2 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

هذه مسألة برمجة رياضية أو أمثلية Optimization لدالة الهدف z . المتغيران هما x_1 و x_2 ، وهما مقيدان بالشرطين المذكورين آنفاً. إنه من المرغوب فيه إيجاد قيم x_1 و x_2 التي تخفض من قيمة دالة الهدف، ضمن القيود المعطاة.

ان الصياغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \text{optimize (minimization or maximization)} \quad & z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{subject to (s. t.)} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \leq b_1 \\ & = b_2 \\ & \vdots \\ & \geq b_m \end{aligned}$$

٢-١ البرمجة الخطية Linear Programming

أكثر أنواع البرامج الرياضية سهولة هي التي تكون فيها الدوال $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) خطية أي أن

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

حيث أن c_i و a_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) ثوابت معلومة، تعرف المعاملات c_i بمعاملات التكلفة Cost coefficients. هذا النوع من البرامج يعرف بالبرنامج الخطي. سوف تكون دراستنا في هذا الكتاب مقصورة على هذا النوع من البرامج الخطية.

٣-١ البرمجة الخطية الصحيحة Integer Linear Programming

البرنامج الصحيح هو عبارة عن برنامج خطي مضاف إليه شرط إضافي وهو أن المتغيرات عبارة عن أعداد صحيحة، مثل عدد العاملين أو عدد الآلات في مصنع. عادة ما تحتوي البرامج الرياضية على متغيرات صحيحة وأخرى تأخذ قيم كسرية وتكون المعادلات فيها خطية. تلك البرامج تسمى البرامج المختلطة. ومن الطرائق المشهورة لحل البرمج الصحيحة أو المختلطة طريقة التفريع والتحديد Branch and bound method.

٤-١ البرمجة غير الخطية Nonlinear Programming

البرنامج غير الخطي هو البرنامج الرياضي بشكله العام حيث تكون دالة الهدف أو القيود أو كلاهما غير خطية. ونعتقد أن أكثر الطرق شيوعاً لحل البرنامج غير الخطي هي طريقة دوال الجزاء والحد التكرارية Sequential Penalty and Barrier functions. وهو أصعب أنواع البرمجة حيث لم يتفق حتى الآن على أمثل طريقة لحل هذا النوع من البرامج الرياضية.

٥-١ البرمجة الدينامية Dynamic Programming

البرمجة الديناميكية هي نوع من الأمثلية التي تطبق بشكل خاص على المسائل التي تتطلب متتالية من القرارات المترابطة، يحول كل قرار منها الوضع الحالي إلى وضع جديد. فهناك اذن متتالية من القرارات تؤدي الى متتالية من الأوضاع.

وتسعى البرمجة الديناميكية إلى البحث عن تلك القرارات التي تجعل دالة معينة أعظمية (أو أصغرية). فعلى سبيل المثال لنفترض انك تعيش في مدينة يتم السير في شوارعها باتجاه واحد وإنك تود الانتقال من مكان A إلى مكان B بأقل جهد ممكن (ربما في أقل وقت ممكن) وأن هناك عشرين طريقاً مختلفاً للانتقال من A إلى B. ان ايجاد طريقة فعالة للوصول من A إلى B بأقل جهد ممكن هي مما تسعى اليه البرمجة الديناميكية.