# الباب التاسع

# طريقة تابع المسار
# Path Following Method

• مقدمة • مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT • الحلول المسموح بها لخطوة NT الكاملة • التقارب التربيعي للمسار الأوسط • تحديث وسيط دالة الحاجز $\mu$ • خطوة طويلة لطريقة تابع المسار • طرق التنبؤ والتصحيح

## ١.٩ مقدمة Introduction

إن أحد أسماء طرق تابع المسار هي طرق الأساسية الثنائية لتابع المسار وهذا الاسم يعبر بشكل جميل وواضح عن هذه الطرق، والفكرة أن الخوارزمية

تتبع المسار الأساسي الثنائي الأوسط بشكل تقريبي، وذلك للوصول لمجموعة الحلول المثلى. وبشكل دقيق فإن شروط الأوسطية (١.٧) حُلت تقريباً لقيمة معطاة $\mu > 0$ ، وبعد ذلك تخفض قيمة $\mu$ وتعاد العملية.

إن طريقة تابع المسار هي الأكثر نجاحاً من بين طرق النقطة الداخلية لحل مسألة البرمجة الخطية، وإن تمديد هذه الطريقة من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة حقق نجاح مماثل. وسوف ندرس في هذا الباب طرق تستخدم موازنة NT، والمسماة بطريقة الخطوة الصغيرة [DPRT]. وكذلك طريقة الخطوة الطويلة [Ji]، كما بينا ذلك سابقاً في الباب الثامن، وسوف نتطرق لبعض طرق التنبؤ والتصحيح predictor-corrector والتي تستخدم اتجاه NT.

## ٢.٩ مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT

## The Path Following Approach and the NT Search Direction

لقيمة معطاة $\mu > 0$ ، من الممكن اعتبار $\mu$–الأوسط $\left(X\ (\mu), S\ (\mu)\right)$ نقطة هدف على المسار الأوسط، بحيث تكون الفجوة الثنائية المرافقة هي $\operatorname{tr}\left(X\left(\mu\right), S\left(\mu\right)\right) = n\mu$ . أو بمعنى آخر إذا استطعنا حساب $\mu$–الأوسط بالضبط فإن الفجوة الثنائية سوف تساوي $n\mu$ .

إن خوارزمية تابع المسار تحسب بشكل دوري قيمة $\left(X\ (\mu), S\ (\mu)\right)$ ، ويتبع ذلك تخفيض في قيمة $\mu$ .

وبفرض أن الزوج المعطى $\left(X, S\right) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ هما حلول مسموح بها فعلياً، وكذلك معطى $\mu > 0$ . والمطلوب هو حساب $\left(\Delta X\ , \Delta S\ \right)$ . بحيث أن $X + \Delta X \in \mathcal{P}$ و $S + \Delta S \in \mathcal{D}$ وكذلك

$$.(X+\Delta X)(S+\Delta S)=\mu I \qquad (١.٩)$$

وكما شرحنا في الباب الخامس حيث في الجدول ١.٥ ذكرنا طرق مختلفة لتقريب الحل الناتج من نظام المعادلات غير الخطي. هذه الحلول المختلفة تقودنا إلى اتجاهات بحث مختلفة.

أحد أشهر اتجاهات البحث الأساسية الثنائية هو المسمى اتجاه NT، والمبين في [NT]، وسوف ندرس فقط هذا الاتجاه.

ولاستنتاج اتجاهات بحث NT ، سوف نقوم بتقديم بعض الترميز لاتجاهات NT. للحل المسموح به فعلياً $X\succ 0$ للمسألة الأساسية، وكذلك $S\succ 0$ للمسألة الثنائية. إن المصفوفة الموازنة هي

$$D=S^{-\frac{1}{2}}\left(S^{\frac{1}{2}}XS^{\frac{1}{2}}\right)S^{-\frac{1}{2}} \qquad (٢.٩)$$

والتي تحقق $D^{-1}X=SD$ أو

$$D^{-\frac{1}{2}}XD^{-\frac{1}{2}}=D^{\frac{1}{2}}SD^{\frac{1}{2}}=V \qquad (٣.٩)$$

وبمعنى آخر نستطيع استخدام المصفوفة $D$ لموازنة المتغيرات $X$ و $S$ لنفس المصفوفة المتماثلة الموجبة المعرفة $V$.

$$V^2=D^{-\frac{1}{2}}\ X\ S\ D^{\frac{1}{2}}\sim XS \qquad (٤.٩)$$

وكنتيجة للمعادلة (٤.٩) أعلاه فإن الفجوة الثنائية عند $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ معطى كالتالي:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(XS)&=\operatorname{tr}(V^2)\\&=\|V\|^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2(V)\end{aligned}$$

إن اتجاه البحث الموزون معرف على الشكل التالي:

$$D_X = D^{-\frac{1}{2}} \; \Delta X \; D^{-\frac{1}{2}}$$

و

$$D_S = D^{\frac{1}{2}} \; \Delta S \; D^{\frac{1}{2}}$$

ولهما خاصية التعامد بحيث $\operatorname{tr}\left(D_X D_S\right) = 0$ . إن اتجاه البحث الأساسي الثنائي الموزون معرف على الشكل التالي:

$$.\, D_V = D_X + D_S$$

وباستخدام مصفوفة الموازنة $D$ المعرفة في (٢.٩) نستطيع كتابة (١.٩) على الشكل التالي:

$$.(V + D_X)(V + D_S) = \mu I \qquad (٥.٩)$$

الآن نستطيع إضعاف الشرط (٥.٩) بتبديل الطرف الأيسر، وذلك بجعله متماثلاً ومن ثم نحصل على

$$\frac{1}{2}\left[(V + D_X)(V + D_S) + \left((V + D_X)(V + D_S)\right)^T\right] = \mu I$$

بعد ذلك نجعل النظام خطياً بإهمال الحد المضروب $D_X D_S$ و $D_S D_X$ ، وسنحصل على

$$.\frac{1}{2}\left(\left(D_X + D_S\right)V + V\left(D_X + D_S\right)\right) = \mu I - V^2 \qquad (٦.٩)$$

إن المعادلة (٦.٩) تسمى معادلة ليبنوف Lyapunov equation ، ولها حل وحيد متماثل معطى على الشكل التالي:

$$D_V = D_X + D_S = \mu V^{-1} - V$$

وبضرب المعادلة قبل وبعد $D_V$ بـ $D^{\frac{1}{2}}$ نحصل على معادلات NT

$$\Delta X + D\Delta S D = \mu S^{-1} - X \qquad (٧.٩)$$

تحت القيود

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}\left(A_i \Delta X\right) &= 0, \quad i = 1,\ldots,m \\ \Delta S &= \sum_{i=1}^{m} \Delta y_i A_i \end{aligned} \qquad (٨.٩)$$

وبسهولة نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \Delta y_j \operatorname{tr}(A_i D A_j D) &= \mu \operatorname{tr}(A_i S^{-1}) - \operatorname{tr}(A_i X) \\ &= \mu \operatorname{tr}(A_i S^{-1}) - b_i, \quad i = 1,\ldots,m \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا النظام له مصفوفة موجبة معرفة، وبالتالي نستطيع حلها بالنسبة لـ $\Delta y$ ، وبعد ذلك لـ $\Delta S$ وذلك من المعادلة (٨.٩). كما نحصل على $\Delta X$ من المعادلة (٧.٩). وبالتالي نحصل على الاتجاه $(\Delta X\,, \Delta S)$ اتجاه NT.

ولنفرض أن $(X,S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ معطى، وكذلك قيمة $\mu > 0$ . سوف نستخدم دالة الأوسطية

$$\begin{aligned} \delta(X,S,\mu) &= \frac{1}{2}\ \frac{1}{\sqrt{\mu}}\ \left\|D_V\right\| \\ &= \frac{1}{2}\ \left\|\sqrt{\mu}\ V^{-1} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V\right\| \end{aligned}$$

التي قدمت بواسطة [Ji] . لاحظ أن $\delta(X\,,S\,,\mu) \ge 0$ ، وكذلك

$$\delta(X,S,\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = \mu I \Leftrightarrow XS = \mu I$$

إن هــذه الدالــة هــي عبــارة عــن تعمــيم لدالــة الأوســطية للبرمجــة الخطيــة المقدمــة بواســطة [JRTP] للبرمجــة الموجبــة شــبه المعرفــة، وســوف نــستخدمها بــشكل مكثــف. وقــد وضــح [Ji] أن $\delta(X, S, \mu)$ لهــا علاقــة بالاتجــاه الاشــتقاقي directional derivative لخوارزميــة الحــاجز الأساســية الثنائيــة في اتجــاه NT. ولكــي نــستنتج هــذه العلاقــة، نرمــز $(\Delta X, \Delta S)$ لاتجــاه NT عنــد $(X, S)$. ولــتكن $f_\mu$ ترمــز لدالــة الحــاجز اللوغاريتميــة الأساسية الثنائية

$$f_\mu(X,S,\mu) = \frac{1}{\mu}\ \mathrm{tr}\,(XS) - \log\ \det(XS)$$

إن الاتجاه الاشتقاقي لـ $f_\mu$ عند $(X, S)$ في اتجاه NT معطى على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nabla_X\ f(X,S,\mu), \Delta X \right\rangle + \left\langle \nabla_S\ f(X,S,\mu), \Delta S \right\rangle \\
&= \ \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}S - X^{-1}\right)\Delta X\right) + \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}X - S^{-1}\right)\Delta S\right) \\
&= \ \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V - V^{-1}\right)D_X\right) + \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V - V^{-1}\right)D_S\right) \\
&= \ \mathrm{tr}\left(\left(\frac{1}{\mu}V - V^{-1}\right)D_V\right) \\
&= \ -\frac{1}{\mu}\ \mathrm{tr}\left(D_V^2\right) = -4\delta^2
\end{aligned}$$

هــذه المــساواة تــبين أن $\delta$ هــي بــشكل طبيعــي دالــة وســطية مرافقــة للاتجــاه NT.

إن جميــع خوارزميـــات هـــذا البـــاب تـــشابه الخوارزميـــة الهيكليـــة التالية:

**خوارزمية ١.٩**

**مدخلات** زوج $(X^{\circ}, S^{\circ}) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$

**الوسائط** وسيط أوسطي $\tau < 1$

وسيط $\mu_{\circ} > 0$ بحيث $\delta(X^{\circ}, S^{\circ}, \mu_{\circ}) \le \tau$

وسيط دقة $\varepsilon > 0$

**ابدأ** $S = S^{\circ}\ , y = y^{\circ}\ , \mu = \mu_{\circ}$

**بينما** $\operatorname{tr}(XS) > \varepsilon$

احسب $\Delta S, \Delta X$ من المعادلتين (٧.٩) و(٧.٩)

اختر طول الخطوة $X \in (0,1]$

$X = X + \alpha\ \Delta X$

$S = S + \alpha\ \Delta S$

اختر وسيط التحديث $0 < \theta < 1$

$\mu = (1-\theta)\mu$

**نهاية**

**نهاية**

سوف نحدد

$$\left(X^{+}, S^{+}\right) := \left(X + \Delta X, S + \Delta S\right)$$

على أنها خطوة NT الكاملة، و

$$\left(X_{\alpha}, S_{\alpha}\right) := \left(X + \alpha\Delta X, S + \alpha\Delta S\right)$$

على أنها انقباض خطوة NT إذا كانت $0 < \alpha < 1$.

## ٣.٩ الحلول المسموح بها لخطوة NT الكاملة

## Feasibility of the Full NT Step

لتكن $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ وقيمة $\mu>0$ معطاة، سوف نحتاج النظرية التالية في إثبات نتائج لاحقة مهمة.

**نظرية ٢.٩**

لتكن $X\succ 0$ و $S\succ 0$ إذا كانت

$$\det\left(X_\alpha S_\alpha\right)>0, \quad \forall\ 0\le\alpha\le\bar{\alpha}$$

حيث $\bar{\alpha}$ قيمة موجبة، $S_\alpha=S+\alpha\Delta S$ و $X_\alpha=X+\alpha\Delta X$ فإن $X_{\bar{\alpha}}\succ 0$ وكذلك $S_{\bar{\alpha}}\succ 0$.

**البرهان:**

لأن

$$\det\left(X_\alpha S_\alpha\right)=\det\left(X_\alpha\right)\ \det\left(S_\alpha\right)$$

فإن

$$\det\left(X_\alpha S_\alpha\right)=\prod_i\lambda_i\left(X_\alpha\right)\ \prod_i\lambda_i\left(S_\alpha\right)$$

إن الطرف الأيسر دائماً موجب في الفترة $[0,\bar{\alpha}]$، وهذا يعني أن القيم الذاتية لـ $X_\alpha$ و $S_\alpha$ تبقى موجبة في الفترة $[0,\bar{\alpha}]$. أي أن $X_{\bar{\alpha}}\succ 0$ وكذلك $S_{\bar{\alpha}}\succ 0$. □

سوف نثبت النتيجتين التاليتين وهما مشابهتان للنتيجتين في البرمجة الخطية.

**نتيجة ٣.٩**

لتكن $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ و $\mu>0$. إذا كانت $\delta(X,S,\mu)<1$، فإن خطوة NT الكاملة هي حل مسموح به فعلياً.

**البرهان:**

سوف نوضح أن محددة determinant $X_\alpha S_\alpha$ تبقى موجبة لكل $\alpha \le 1$. وبالتالي فإن $X(1), S(1) \succ 0$ من نتيجة ٢.٩ ، لاحظ أن

$$\begin{aligned} X_\alpha S_\alpha &\sim (V+\alpha D_X)(V+\alpha D_S) \\ &= V^2 + \alpha D_X V + \alpha V D_S + \alpha^2 D_X D_S \\ &= V^2 + \alpha\left(\mu I - V^2\right) + \frac{1}{2}\alpha^2 \left(D_X D_S + D_S D_X\right) \\ &+ \left[\frac{1}{2}\alpha^2 \left(D_X D_S - D_S D_X\right)\right. \\ &\left.+ \frac{1}{2}\alpha\left(D_X V + V D_S - V D_X - D_S V\right)\right] \end{aligned}$$

وذلك باستخدام معادلة (٦.٩). إن المصفوفة داخل الأقواس المربعة هي مصفوفة متماثلة تخالفياً، وهذا يقتضي أن محددة $[X_\alpha S_\alpha]$ موجبة إذا كانت المصفوفة

$$M(\alpha) := V^2 + \alpha(\mu I - V^2) + \frac{1}{2}\alpha^2 \left(D_X D_S + D_S D_X\right)$$

موجبة معرفة. ولأننا نستطيع اعادة صياغة $M(\alpha)$ على الشكل:

$$M(\alpha) = (1-\alpha)V^2 + \alpha\mu\left[I + \frac{\alpha}{2\mu}\left(D_X D_S + D_S D_X\right)\right] ،$$

يكون لدينا $M(\alpha) > 0$ إذا كانت $\alpha \le 1$ و

$$\left\| \frac{\left(D_X D_S + D_S D_X\right)}{2\mu} \right\|_2 < 1 .$$

إن الشرط الأخير متحقق لأن $\delta < 1$ لأن

$$\left\| \frac{D_X D_S + D_S D_X}{2\mu} \right\|_2 = \frac{1}{\mu} \left\| \frac{1}{2}\left( D_X D_S + D_S D_X \right) \right\|_2$$
$$\leq \frac{1}{4\mu} \left\| D_V \right\|^2 = \delta^2 < 1$$

النتيجة التالية توضح أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة كاملة لـNT. □

**نتيجة ٤.٩**

إذا كانت $(X,S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ و $\mu > 0$ بحيث $\delta(X, S, \mu) < 1$ فإن

$$\operatorname{tr}\left( X^+ S^+ \right) = n\mu$$

أي أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة كاملة لـNT.

**البرهان:**

من إثبات نتيجة ٣.٩ نحصل على

$$X^+ S^+ \sim \mu I + \frac{1}{2}\left( D_X D_S + D_S D_X \right)$$
$$+ \left[ \frac{1}{2}\left( D_X D_S - D_S D_X \right) + \frac{1}{2}\left( D_X V - V D_S - V D_X - D_S V \right) \right] \quad (٩.٩)$$

لأن $A \sim B$ يقتضي

$$\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

نستنتج

$$\operatorname{tr}\left( X^+ S^+ \right) = \operatorname{tr}\left( \mu I \right) = n\mu \text{ ،}$$

وذلك باستخدام $\operatorname{tr}\left( D_X D_S \right) = 0$ والتماثل التخالفي للمصفوفة في الأقواس المربعة. □

## ٤.٩ التقارب التربيعي للمسار الأوسط

## Quadratic Convergence to the Central Path

سوف نرمز للمصفوفة المتماثلة تخالفياً (٩.٩) بالرمز $M$. كذلك نستطيع تبسيط الترميز بتعريف

$$D_{XS} = \frac{1}{2}\left(D_X D_S + D_S D_X\right)$$

لإثبات التقارب التربيعي للخطوة الكاملة لـNT نحتاج إلى النتائج التالية:

**نتيجة ٥.٩**

لدينا

$$\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) \geq \mu\left(1-\delta^2\right)$$

حيث $\lambda_{\min}$ ترمز لأصغر قيمة ذاتية.

**البرهان:**

من (٩.٩) نستنتج

$$\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) = \lambda_{\min}\left(\mu I + D_{XS} + M\right)$$

المصفوفة المتماثلة تخالفياً $M$ تقتضي:

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) &\geq \lambda_{\min}\left(\mu I + D_{XS}\right)\\ &\geq \mu - \|D_{XS}\|_2\end{aligned}$$

وبالتعويض في $\|D_{XS}\|_2$ نحصل على

$$\lambda_{\min}\left((V^+)^2\right) \geq \mu - \frac{1}{4}\|D_V\|^2 = \mu\left(1-\delta^2\right) \qquad \square$$

**نتيجة ٦.٩**

لدينا

$$\|D_{XS}\|^2 \leq \frac{1}{8}\|D_V\|^4$$

**البرهان:**

من السهل إثبات

$$D_X D_S + D_S D_X = \frac{1}{2}\left[ (D_X + D_S)^2 - (D_X - D_S)^2 \right]$$

ولأن $\operatorname{tr}\left(D_X D_S\right) = 0$ المصفوفات $D_V = D_X + D_S$ وكذلك $Q_V = D_X - D_S$ لهما نفس المعيار. ينتج من ذلك

$$\begin{aligned}
\left\|D_{XS}\right\|^2 &= \left\|\frac{1}{4}\left(D_V^2 - Q_V^2\right)\right\|^2 \\
&= \frac{1}{16}\operatorname{tr}\left(D_V^4 + Q_V^4 - D_V^2 Q_V^2\right) \\
&\leq \frac{1}{16}\left(\left\|D_V^2\right\|^2 + \left\|Q_V^2\right\|^2\right) \\
&\leq \frac{1}{16}\left(\left\|D_V\right\|^4 + \left\|Q_V\right\|^4\right) = \frac{1}{8}\left\|D_V\right\|^4
\end{aligned}$$

□

**نظرية ٧.٩**

إن الدالة الأوسطية بعد NT خطوة مسموح بها تحقق

$$\delta^+ = \delta\left(X^+, S^+, \mu\right) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2\left(1-\delta^2\right)}}$$

**البرهان:**

الدالة الأوسطية بعد خطوة كاملة لـNT معطاة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned}
\left(\delta^+\right)^2 &= \frac{1}{4\mu}\left\|\mu(V^+)^{-1} - V^+\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4\mu}\left\|(V^+)^{-1}\left(\mu I - (V^+)^2\right)\right\|^2 \\
&\leq \frac{1}{4\mu}\lambda_{\max}^2\left((V^+)^{-1}\right)\left\|\mu I - (V^+)^2\right\|^2
\end{aligned}$$

نعوض في الحد الأخير من نتيجة ٥.٩ فنحصل على

$$.\left(\delta^{+}\right)^{2} \le \frac{1}{4\mu^{2}\left(1-\delta^{2}\right)}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2}$$

الآن نوضح

$$.\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} \le \left\|D_{XS}\right\|^{2}$$

ولإثبات ذلك لاحظ أن

$$\begin{aligned}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i\left(\mu I+D_{XS}+M\right)-\lambda_i\left(\mu I\right)\right]^{2}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\lambda_i\left(D_{XS}+M\right)\right]^{2} = \operatorname{tr}\left(\left(D_{XS}+M\right)^{2}\right).\end{aligned}$$

وباستخدام المصفوفة $M$ نحصل على

$$\begin{aligned}\left\|\mu I-(V^{+})^{2}\right\|^{2} &= \operatorname{tr}\left((D_{XS})^{2}-MM^{T}\right)\\ &\le \operatorname{tr}\left(D_{XS}\right)^{2}\\ &= \left\|D_{XS}\right\|^{2}\end{aligned}$$

الآن نحصل على المطلوب من نتيجة ٦.٩ . □

إن النتيجة النهائية لها الشكل التالي:

**نتيجة ٨.٩**

إذا كانت $\delta\left(X,S,\mu\right)<\frac{1}{\sqrt{2}}$ فإن $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu\right)<\delta^{2}\left(X,S,\mu\right)$ ، أي أننا حصلنا على تقارب تربيعي لـ $\mu$- الأوسط. والشرط الأضعف $\delta\left(X,S,\mu\right)<\sqrt{\frac{2}{3}}$ يقتضي أن $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu\right)<\delta\left(X,S,\mu\right)$ وهذا يعني حصولنا على تقارب كافٍ.

**البرهان:** انظر نتيجة ٦.٩ ونظرية ٧.٩.

## ٥.٩ تحديث وسيط دالة الحاجز $\mu$

## Updating the Barrier Parameter $\mu$

إذا كانت الدورات الحالية $(X,S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ قريبة بشكل كافٍ إلى نقطة الهدف $(X(\mu),S(\mu))$ ولنقل أن

$$\delta(X,S,\mu) \le \tfrac{1}{2}$$

فإن تحديث الوسيط $\mu$ يكون على النحو التالي:

$$\mu^{+} = (1-\theta)\mu$$

حيث $0<\theta<1$ وسيط معطى.

سوف نوضح الآن أن القيمة الافتراضية $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ تضمن لنا أن $\delta(X,S,\mu) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$. الخطوة الكاملة التالية لـ NT سوف تعطينا الزوج المسموح به $(X^{+},S^{+}) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ حيث $\delta(X^{+},S^{+},\mu) \le \frac{1}{2}$، وذلك بسبب خاصية التقارب التربيعي.

سوف نثبت الآن نظرية تربط بين الدالة الأوسطية لـ $\mu$ بعد التحديث وبين الدالة الأوسطية لـ $\mu$ قبل التحديث.

**نظرية ٩.٩**

لتكن $(X,S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ و $\mu = \dfrac{\operatorname{tr}(XS)}{n}$ و $\delta = \delta(X,S,\mu)$. إذا كانت $\mu^{+} = (1-\theta)\mu$ حيث $0<\theta<1$ فإن

$$\left(\delta(X,S,\mu^{+})\right)^{2} = \frac{n\theta^{2}}{4(1-\theta)} + (1-\theta)\delta^{2}.$$

**البرهان :**

لتبسيط الترميز سوف نستخدم $U=\frac{1}{\sqrt{\mu}}V$ ، وباستخدام هذا الترميز نحصل على

$$\begin{aligned}4\left(\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\right)^{2}&=\left\|\sqrt{1-\theta}U^{-1}-\frac{1}{\sqrt{1-\theta}}U\right\|^{2}\\&=\left\|\frac{\theta U}{\sqrt{1-\theta}}-\sqrt{1-\theta}\left(U^{-1}-U\right)\right\|^{2}\end{aligned}$$

لاحظ أن

$$\|U\|^{2}=\operatorname{tr}\left(U^{2}\right)=\frac{1}{\mu}\operatorname{tr}\left(U^{2}\right)=n$$

وهو يقتضي أن $U$ متعامدة مع $U^{-1}-U$:

$$\operatorname{tr}\left(U\left(U^{-1}-U\right)\right)=n-\|V\|^{2}=0$$

ونحصل من ذلك على

$$4\left(\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\right)^{2}=\frac{\theta^{2}\|U\|^{2}}{1-\theta}+(1-\theta)\left\|U^{-1}-U\right\|^{2}.$$

وهـذا يعـني حـصولنا علـى المطلـوب بملاحظـة أن $\left\|U^{-1}-U\right\|=2\delta$ وأن $\|U\|^{2}=n$. □

وكنتيجة مباشرة لهذه النظرية يتبين لنا أنه إذا كان لدينا الزوج الأساسي الثنائي $(X,S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ والوسيط $\mu$ بحيث أن $\delta(X,S,\mu)\le\frac{1}{2}$ وكان تحديث $\mu$ عن طريق $\mu^{+}=(1-\frac{1}{2\sqrt{n}})\mu$ ، فإن $\delta\left(X,S,\mu^{+}\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، وكما

أوضحنا أعلاه فإن الخطوة التالية لـ NT تعطينا الزوج $\left(X^{+},S^{+}\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ الذي يحقق $\delta\left(X^{+},S^{+},\mu^{+}\right)\leq\frac{1}{2}$. لذلك فإن الخوارزمية سوف تولد متتالية من الدورات والتي تحقق لنا دائماً $\delta\leq\frac{1}{2}$ ، إضافة إلى ذلك فإن الفجوة الثنائية سوف تتقلص بمضاعف $1-\frac{1}{2\sqrt{n}}$ عند كل دورة، لأن الفجوة الثنائية بعد خطوة NT كاملة تساوي الفجوة الثنائية المطلوبة.

إن هذه الملاحظات تقتضي النظرية التالية التي تؤكد أن الخوارزمية تتقارب بسرعة.

**نظرية ١٠.٩**

إذا كانت $\tau=\frac{1}{\sqrt{2}}$ وكانت $\theta=\frac{1}{2\sqrt{n}}$ فإن الخوارزمية ١.٩ مع خطوة NT كاملة تتوقف على الأكثر عند

$$\left\lceil 2\sqrt{n}\ \log\frac{n\mu^{\circ}}{\varepsilon}\right\rceil$$

دورة. ويكون الزوج الناتج $\left(X,S\right)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ يحقق $\operatorname{tr}\left(XS\right)\leq\varepsilon$ .

**البرهان:** انظر [Dk].

## ٦.٩ خطوة طويلة لطريقة تابع المسار

## Long Step Path Following Method

إن هذه الخوارزمية تعمل على تضئيل خطوات NT بالنسبة للوسيط المعطى $\mu$ حتى يتحقق $\delta\left(X,S,\mu\right)\leq\frac{1}{2}$. وتسمى هذه الخطوات بالدورات الداخلية. بعد ذلك نقوم بتحديث الوسيط $\mu$ عن طريق $\mu^{+}=\left(1-\theta\right)\mu$ وهذه هي الدورات الخارجية. إن طول الخطوة يحدد بواسطة خط البحث line search لدالة الحاجز

$$f_{\mu}\left(X,S,\mu\right)=\frac{1}{\mu}\operatorname{tr}\left(XS\right)-\log\ \det\left(XS\right)-n$$

ويكون لدينا الخوارزمية التالية:

**خوارزمية ١١.٩ (الخطوة الطويلة)**

**مدخلات** زوج $(X^{\circ},S^{\circ})\in(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$

**الوسائط** وسيط أوسطي $\tau>0$

وسيط $\mu_{\circ}>0$ بحيث $\delta(X^{\circ},S^{\circ},\mu_{\circ})\le\tau$

وسيط دقة $\varepsilon>0$

وسيط التحديث $\theta<1$

**ابدأ** $S=S^{\circ}\ ,y=y^{\circ}\ ,\mu=\mu_{\circ}$

**بينما** $\operatorname{tr}\left(XS\right)>\varepsilon$

**إذاً** $\delta\left(X\ ,S,\mu\right)\le\tau$

$\mu=\left(1-\theta\right)\mu$

**وإلا** $\delta_{d}\left(S,\mu\right)>\tau$

احسب $\Delta S$, $\Delta X$ من المعادلتين (٧.٩) و(٧.٩)

أوجد $\alpha$

$S=S+\alpha\Delta S$

$y=y+\alpha\Delta y$

**نهاية**

**نهاية**

**نهاية**

**حيث** $\alpha = \arg \ \text{minimize} \ f_\mu\left(X+\alpha\Delta X, S+\alpha\Delta S\right)$.

النظرية التالية تعطينا حد التعقيد لأسوأ دورة.

**نظرية ١٢.٩**

الخوارزمية ١١.٩ تتطلب على الأكثر

$$O\left(\log\left(\frac{n\mu_\circ}{\varepsilon}\right)\right)$$

دورة لحساب الزوج المسموح به فعلياً $\left(X^*, S^*\right) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ والذي يحقق $\mathrm{tr}\left(X^*S^*\right) \le \varepsilon$.

**البرهان:** انظر [Ji].

## ٧.٩ طرق التنبؤ والتصحيح Predictor Corrector Methods

إن طرق التنبؤ والتصحيح من الطرق الأساسية الثنائية الأكثر شعبية في الوقت الحاضر. ويعود ذلك إلى تطبيقها الناجح في كثير من برامج الحاسب الآلي لحل مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة، مثل برنامج SeDuMi وبرنامج SDPT3. في البرنامج SeDuMi يستخدم فقط الاتجاه NT، بينما في البرنامج SDPT3 يحدد الاتجاه من قبل المستخدم. الخوارزمية التالية تسمى خوارزمية التنبؤ والتصحيح، وتعود إلى [MTY]. إن خطوة التنبؤ هي خطوة متضائلة على طول اتجاه الموازنة للمسألة الأساسية الثنائية التآلفية. يتبع ذلك خطوة التصحيح والمعرف

بخطـــــوة NT كاملـــــة بالنـــــسبة لــــــ $\mu = \text{tr}\,(XS)/n$ حيـــــث $(X,S) \in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ عند الدورة الحالية.

**خوارزمية ١٣.٩**

**مدخلات** زوج $(X^{\circ}, S^{\circ}) \in (\mathcal{P}\times\mathcal{D})$

**الوسائط** وسيط أوسطي $\tau > 0$

وسيط $\mu_{\circ} > 0$

بحيث أن $\delta(X^{\circ}, S^{\circ}, \mu_{\circ}) \le \tau$ و $\mu_{\circ} = \text{tr}\left(\frac{X^{\circ}S^{\circ}}{n}\right)$

وسيط الدقة $\varepsilon > 0$

وسيط $0 < \theta < 1$

**ابدأ** $S = S^{\circ}\ , y = y^{\circ}\ , \mu = \mu_{\circ}$

**بينما** $tr\left(XS\right) > \varepsilon$

خطوات التصحيح

احسب $\Delta X\ , \Delta S$ من المعادلتين (٧.٩) و(٧.٩)

$X = X + \Delta X,\ \ S = S + \Delta S$ خطوة NT كاملة

خطوات التنبؤ

احسب $\Delta X = -\left(X + D\ \Delta S\ D\right)$

احسب $\Delta S = -\sum_{i=1}^{m} \Delta y_i A_i$

$X = X + \theta\Delta X, \quad S = S + \theta\Delta S$

$\mu = \left(1-\theta\right)\mu$

**نهاية**

**نهاية**

لاحظ أن الوسيط $\theta$ استُخدم كطول خطوة في مرحلة التنبؤ وكذلك لتحديث $\mu$ ، حيث $\mu^{+}=(1-\theta)\mu$ . النتيجة التالية تعطينا طريقة ديناميكية لاختيار $\theta$، بحيث تبقى دائماً $\delta(X, S, \mu)\leq \tau$ .

**نتيجة ١٤.٩**

إذا كانت $\tau=\frac{1}{3}$ فإن $\delta(X, S, \mu)\leq \tau$ متحققة لكل دورة $(X, S)\in(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ من الخوارزمية ١٣.٩ شريطة استخدام

$$\theta=\frac{2}{1+\sqrt{1+13\left\|\frac{1}{2}\left(D_X^a D_S^a+D_X^a D_S^a/\mu\right)\right\|}} \qquad (١٠.٩)$$

حيث $D_X^a$ و $D_S^a$ ترمز للاتجاه الأساسي الثنائي التآلفي الموزون حيث $D_X^a+D_S^a=-V$ .

**البرهان:**

انظر [RTV] حيث أن إثبات حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هو امتداد مباشر لإثبات حالة البرمجة الخطية. □

إن خوارزمية ١٣.٩ لها نفس حد تعقيد خوارزمية ١.٩ ، أي أنه لدينا النظرية التالية:

**نظرية ١٥.٩**

إذا كانت $\tau=\frac{1}{3}$ و $\theta$ معطاة في (١٠.٩) فإن الخوارزمية ١٣.٩ تتوقف على الأكثر عند

$$\left\lceil\left(1+\sqrt{1+\frac{13}{2}n}\right)\log\frac{\operatorname{tr}\left(X^{\circ}S^{\circ}\right)}{\varepsilon}\right\rceil$$

دورة. إن الزوج الناتج $(X, S)\in ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D})$ يحقق $\operatorname{tr}(XS)\leq\varepsilon$ .

**البرهان:** انظر [MTY].

**مثال ١٦.٩ ( انظر [KSS] ).**

اعتبر المسألة الأساسية والثنائية على الصورة القياسية حيث

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

المسألة لها الحل المتمم الفعلي التالي

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اعتبر متتالية الحلول المسموح بها $(X_k, S_k, y_k) \to (X^*, S^*, y^*)$ والمعرفة بالشكل التالي

$$X_k := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \varepsilon_k \end{pmatrix},\ S_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k & -\sqrt{c\varepsilon_k} \\ -\sqrt{c\varepsilon_k} & 1+2\sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix},\ y_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k/2 \\ \sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix}$$

حيث $\varepsilon_k \to 0$ و $c > 0$. وقيمة $c = \frac{1}{32}$ وقيمة $\varepsilon_k = 10^{-k/10}$ وقيمة $k = 30,......,80$. من الواضح أن $\delta(X, S, \mu) \le 0.13$ للمتتالية، أي أن لدينا تقارباً تربيعياً.

## تمارين الباب التاسع

١.٩ لدينا البرنامج التالي

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad y_1 + y_2\ , \qquad y \in \mathbb{R}^2 \\ &\text{subject to} \quad y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد حلاً للبرنامج باستخدام خوارزمية ١.٩. ثم أوجد $X_\alpha$ وأيضاً أوجد $S_{\bar{\alpha}}$؟

٢.٩ لتكن $n = m = 3$ ،$b = [1 \quad 0 \quad 0]$ وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن الدالة الأوسطية تحقق $\delta^+ = \delta\left(X^+, S^+, \mu\right) \le \dfrac{\delta^2}{\sqrt{2\left(1-\delta^2\right)}}$

٣.٩ حل البرنامج التالي:

$n = 2$ ، $m = 3$ ،

$b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

باستخدام خوارزمية ١١,٩ وخوارزمية ١٣,٩ ثم وقارن بين الخوارزميتين؟