الباب السابع

المسار الأوسط
The Central Path

• مقدمة • وجود وحدانية المسار الأوسط • تحليل المسار الأوسط • نقاط النهاية للمسار الأوسط

١.٧ مقدمة Introduction

إذا شوِّش النظام اللازم والكافي لشروط الأمثلة للمسألة الأساسية والثنائية بإضافة الوسيط $\mu > 0$ بطريقة خاصة، فإن الحل المشوَّش للنظام يعرف منحنى تحليلي analytic curve محدد بالوسيط μ خلال منطقة الحلول المسموح بها، والذي يؤدي إلى مجموعة الحلول المسموح بها المثلى عندما $\mu \to 0$. هذا المنحنى كما في البرمجة الخطية يسمى المسار الأوسط، ومعظم طرق النقطة الداخلية تتبع تقريباً المسار الأوسط للوصول إلى مجموعة الحلول المسموح بها المثلى. فيما يلي سوف نشرح بعض خواص المسار الأوسط.

٢.٧ وجود وحدانية المسار الأوسط

Existence and Uniqueness of the Central Path

سوف نشوِّش شروط الأمثلة (٨.٦) للمسألة الأساسية والثنائية على الشكل التالي:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \;\; X \succeq 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C, \;\; S \succeq 0 \\ XS = \mu I \end{array}\right\} \qquad (١.٧)$$

للوسيط $\mu > 0$. هذا النظام يسمى شروط الأوسطية centrality conditions لاحظ أنه إذا كانت $\mu = 0$ فإننا نرجع إلى شروط الأمثلة (٨.٦). سوف نوضح الآن أن النظام (١.٧) له حل وحيد لكل $\mu > 0$. هذا الحل الوحيد سوف يرمز له بالرمز $X(\mu)$, $S(\mu)$, $y(\mu)$ ، ومن الممكن اعتباره تمثيل متري للمنحنى التحليلي (المسار الأوسط) بدلالة الوسيط μ. بالطريقة التالية من الممكن إثبات وجود و وحدانية المسار الأوسط. اعتبر المسألة التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & p_\mu(X) \\ \text{subject to} & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \ldots, m \\ & X \succ 0 \end{array}$$

حيث $p_\mu(X) = \frac{1}{\mu} \operatorname{tr}(CX) - \log \det X$ ، أي أننا نصغر دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية primal log-barrier function على الداخل النسبي لـ $\mathcal{P}$.
إن الدالة p_μ هي محدبة فعلياً. إن شروط الأمثلة KKT لهذه المسألة هي في هذه الحالة لازمة وضرورية، ومعطاة على الشكل التالي:

$$\nabla p_\mu(X) = \frac{1}{\mu}\ \mathrm{tr}\ C - X^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \hat{y}_i\ A_i$$
$$\mathrm{tr}\ (A_i X) = b_i, \qquad i = 1,\ldots,m$$
$$X \succ 0$$

حيث تُعرَّف $S = C - \sum_{i=1}^{m} y_i\ A_i$ وأن $y_i = \mu \hat{y}_i$ ، إن هذا النظام يكون مطابقاً للنظام (١.٧). بمعنى آخر إن وجود و وحدانية المسار الأوسط مكافئ لوجود تصغير وحيد لـ p_μ في داخل $\mathcal{P}$ النسبي لكل $\mu > 0$. ولأن p_μ محدبة فعلياً فإن أي نقطة تصغير لـ p_μ تكون وحيدة. لإثبات وجود المسار الأوسط علينا أن نبين أن مجموعات المستويات level sets لـ p_μ هي متراصة compact إذا كانت المسألة الثنائية لها حلول مسموح بها فعلياً. إن هذا يضمن وجود نقطة صغرى لنسميها X_p^* . نستطيع الآن أن نستخدم هذه النقطة الصغرى لبناء حل للنظام (١.٧) كالتالي:

$$X(\mu) = X_p^*,\ \ S(\mu) = \mu (X_p^*)^{-1} \qquad (٢.٧)$$

لاحظ أن $S(\mu)$ كما هي معرفة في (٢.٧) هي حلٌ مسموح به للمسألة الثنائية.

من الممكن إثبات وجود المسار الأوسط عن طريق الثنائية بواسطة تكبير دالة الحاجز الثنائية:

$$d_\mu(S, y) = \frac{1}{\mu}\ b^T y + \log\ \ \det(S), \quad (y, S) \in \mathcal{D}$$

ومن ثم إثبات أن مجموعات المستويات متراصة إذا كانت المسألة الأساسية لها حل مسموح به فعلياً.

الآن سوف نثبت وجود حل لمسألة تصغير الفرق بين دالة الحاجز الأساسية p_μ ودالة الحاجز الثنائية d_μ. لنعرِّف دالة الحاجز الأساسية الثنائية على الشكل التالي:

$$f_\mu : \mathcal{P} \times \mathcal{D} \to \mathbb{R}_+$$

بحيث أن

$$\begin{aligned} f_\mu(X,S) &= p_\mu(X) - d_\mu(S,y) - n - n\log(\mu) \\ &= \frac{1}{\mu}\,\mathrm{tr}\,(CX) - \frac{1}{\mu} b^T y - \log\ \det(X) - \log\ \det(S) - n - n\log(\mu) \\ &= \mathrm{tr}\,\left(\frac{XS}{\mu}\right) - \log\ \det\left(\frac{XS}{\mu}\right) - n \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda_i(XS)}{\mu} - \log\left(\frac{\lambda_i(XS)}{\mu}\right)\right) - n \end{aligned}$$

حيث $\lambda_i(A)$ تعني القيمة الذاتية i من حيث الكبر للمصفوفة A. لاحظ أن (X^*, S^*) هي النقطة الصغرى للدالة f_μ إذا وإذا فقط كانت X^* و S^* هي عبارة عن نقاط صغرى لكلٍ من p_μ و d_μ على الترتيب. أيضاً لاحظ أن $f_\mu(X,S) = 0$ إذا وإذا فقط كانت $XS = \mu I$.

والآن نحن نتوجه لإثبات وجود نقطة صغرى وحيدة لـ f_μ، وأنه إذا كانت هذه النقطة تحقق النظام (١.٧) فإننا نستطيع إعادة كتابة $f_\mu(X,S)$ على الشكل التالي:

$$f_\mu(X,S) = \sum_{i=1}^{n}\psi\left(\frac{\lambda_i(XS)}{\mu} - 1\right)$$

حيث $\psi(t) = t - \log(1+t)$. لاحظ أن f_μ هي عبارة عن مجموع دالتين محدبتين فعلياً وهما p_μ و d_μ بالإضافة إلى ثابت، وبالتالي فإن f_μ هي محدبة فعلياً. ولذلك علينا الآن فقط إثبات أن مجموعات المستويات هي مجموعات متراصة حتى نثبت وجود وحدانية المسار الأوسط، وسوف نقوم بذلك على خطوتين:

أولاً: سوف نبين أن مجموعات المستويات للفجوة الثنائية متراصة.

ثانياً: سوف نبين أن تراص مجموعات المستويات للفجوة الثنائية يؤدي إلى أن مجموعات المستويات لدالة الحاجز الأساسية الثنائية f_μ هي أيضاً متراصة.

نتيجة ١.٧

لنفرض أن كلاً من المسألة الأساسية والثنائية لهما حلٌ مسموحٌ به فعلياً. إن المجموعة

$$G_\alpha = \left\{ (X,S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \middle| \ \mathrm{tr}\ (XS) \le \alpha \right\}$$

هي مجموعة متراصة لكل $\alpha \ge 0$.

البرهان:

لتكن (X°, S°) هي عبارة عن حل أساسي ثنائي مسموح به فعلياً، وأن $(X,S) \in G_\alpha$ حيث لدينا $\alpha \ge 0$. ومن نظرية ١.٦

$$\mathrm{tr}\ ((X - X^\circ)(S - S^\circ)) = 0 \ . \qquad (٣.٧)$$

وباستخدام $\mathrm{tr}\ (XS) \le 0$ ، فإن (٣.٧) تبسط إلى

$$\mathrm{tr}\ (XS^\circ) + \mathrm{tr}\ (X^\circ S) \le \alpha + \mathrm{tr}\ (X^\circ S^\circ) \ .$$

إن الطرف الأيمن من المتباينة أعلاه غير سالب، لأن X° و S° هما حلان مسموح بهما فعلياً، وبالتالي:

$$\mathrm{tr}\ (XS^\circ) \le \alpha + \mathrm{tr}\ (X^\circ S^\circ)$$

والذي يقتضي

$$\mathrm{tr}\ (X) \le \frac{\alpha + \mathrm{tr}\ (X^\circ S^\circ)}{\lambda_{\min}(S^\circ)}$$

حيث $\lambda_{\min}(S^\circ)$ تعني أصغر قيمة ذاتية eigenvalue لـ S°. الآن باستخدام حقيقة أن كل مصفوفة X موجبة شبه معرفة تحقق $\|X\| \le \text{tr}\,(X)$ لمعيار فروبينس Frobenius norm ، يكون لدينا

$$\|X\| \le \frac{\alpha + \text{tr}\,(X^\circ S^\circ)}{\lambda_{\min}(S^\circ)}$$

وبالمثل يمكن إيجاد حد مشابه لـ $\|S\|$. يتبقى لإثبات النتيجة إثبات أن G_α مغلقة، وهذا متحقق لأن كلاً من $\mathcal{P}$ و $\mathcal{D}$ مغلقتان، ومن خطية دالة الفجوة الثنائية $\text{tr}\,(XS) = \text{tr}\,(CX) - b^T y$ على $\mathcal{P}\times\mathcal{D}$. □

نظرية ٢.٧

المسار الأوسط للمسألة الأساسية والمسألة الثنائية موجود إذا كانت لهما حلول مسموح بها فعلياً.

البرهان: انظر [Dk].

٣.٧ تحليل المسار الأوسط Analyticity of the Central Path

إن نظرتنا الهندسية للمسار الأوسط هي من ناحية دالة المنحنى التحليلي من خلال داخل $\mathcal{P}\times\mathcal{D}$ النسبي، والذي يقودنا إلى مجموعة الحلول المثلى. سوف ننظر إلى هذا التحليل من خلال النظرية التالية:

نظرية ٣.٧

إذا كانت $f:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^m$ هي عبارة عن دالة تحليلية لـ $w\in\mathbb{R}^n$ و $z\in\mathbb{R}^m$ بحيث أنه

١- يوجد $\bar{w}\in\mathbb{R}^n$ و $\bar{z}\in\mathbb{R}^m$ بحيث أن $f(\bar{w},\bar{z})=0$.

٢- مصفوفة جاكوبين Jacobian لـ f بالنسبة لـ z هي مصفوفة غير شاذة nonsingular عند $(\bar{w}, \bar{z})$.

فإنه يوجد مجموعة مفتوحة $S_{\bar{w}} \subset \mathbb{R}^n$ تحتوي $\bar{w}$ و $S_{\bar{z}} \subset \mathbb{R}^m$ تحتوي $\bar{z}$، ويوجد الدالة التحليلية $\phi : S_{\bar{w}} \to S_{\bar{z}}$ بحيث أن $\bar{z} = \phi(\bar{w})$ و $f(w, \phi(w)) = 0$ لكل $w \in S_{\bar{w}}$. وبالإضافة إلى

$$\nabla \phi(w) = -\nabla_z f(w, \phi(w))^{-1} \; \nabla_w f(w, \phi(w)) \qquad (٤.٧)$$

البرهان: انظر [Di].

إن النظرية ٣.٧ تسمى نظرية الدالة الضمنية implicit function heorem ولها صيغ كثيرة وهذه الصيغة هي التي تناسب دراستنا.

نظرية ٤.٧

إن الدالة

$$f_\mu : \mu \to (X(\mu), y(\mu), S(\mu))$$

هي عبارة عن دالة تحليلة لـ $\mu > 0$ حيث

$$\nabla(X, y, S)\, f(X, y, S, \mu) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & t^T & I_{n^2} \\ S \otimes I_n & 0 & I_n \otimes X \end{bmatrix} \qquad (٥.٧)$$

وحيث أن

$$\mathrm{A} = \left[\mathrm{vec}(\mathrm{A}_1), ..., vec(A_m)\right]^T$$

و I_n هي مصفوفة الوحدة من الحجم n و $\otimes$ ترمز للضرب كرونكر kroncker.

البرهان: انظر [De].

إن نظرية الدالة الضمنية (نظرية ٣.٧) تقدم لنا صيغة للاتجاه المماسي tangential direction للمسار الأوسط. هذا الاتجاه هو حل النظام الخطي والذي له مصفوفة المعاملات (٥.٧) وهذا واضح من (٤.٧). إن الاتجاه المماسي هو الاتجاه المستخدم بواسطة جميع طرق النقطة الداخلية، إذا كانت الدورة الحالية $(X,S)\in \mathcal{P}\times\mathcal{D}$ على المسار الأوسط. أما إذا كانت (X,S) ليست على المسار الأوسط فتوجد طرق أخرى لإيجاد الحل الأمثل.

٤.٧ نقاط النهاية للمسار الأوسط

Limit Points of the Central Path

في هذا الفصل سوف نبين أن أي متتالية على المسار الأوسط لها نقاط تجمّع في مجموعة الحلول المثلى. ونحتاج إلى التعريف التالي لبيان ذلك

تعريف ٥.٧

يقال للحل $X^*\in\mathcal{P}^*$ متممة عظمى maximal complementarity مثلى للمسألة الأساسية إذا كانت

$$\mathcal{R}(X)\subset\mathcal{R}(X^*) \qquad \forall X\in\mathcal{P}^*$$

حيث $\mathcal{R}(X)$ تعني مدى X. وبالمثل يقال للحل $S^*\in\mathcal{D}^*$ متممة عظمى مثلى للمسألة الثنائية إذا كانت

$$\mathcal{R}(S)\subset\mathcal{R}(S^*) \qquad \forall S\in\mathcal{D}^*$$

وإذا كان زوج المتممة العظمى (X^*,S^*) يحقق $X^*+S^*\succ 0$ فإننا نسمي الحل (X^*,S^*) زوج المتممة الفعلي.

إن نقاط متتالية المسار الأوسط هي متممة عظمى. كذلك كلما اقتربت μ من الصفر فإن المسار الأوسط يقترب من زوج المتممة العظمى. وتحت فرضية

المتممة الفعلي إن نقاط النهاية هي ما يسمى بالتحليل الأوسط للحلول المثلى والتي سوف تعرف لاحقاً.

ليكن لدينا المتتالية الثابتة $\{\mu_t\} \to 0$ حيث $\mu_t > 0,\ \ t = 1,....$ ، ونريد أن نثبت أنه يوجد متتالية جزئية من المتتالية $\{X(\mu_t), S(\mu_t)\}$ تقترب من حل المتممة العظمى. إن وجود نقاط نهاية للمتتالية هي نتيجة مباشرة من النظرية التالية:

نظرية ٦.٧

ليكن لدينا $\bar{\mu} > 0$ ، إن المجموعة

$$\{X(\mu), S(\mu) : 0 < \mu \le \bar{\mu}\}$$

محتواة في مجموعة جزئية متراصة من $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$.

البرهان:

مباشر من نتيجة ١.٧ ، وذلك بملاحظة أن $\operatorname{tr}(X(\mu), S(\mu)) \le n\bar{\mu}$. إذا كانت $\mu \le \bar{\mu}$. □

لتكن

$$X(\mu_t) = Q(\mu_t)\Lambda(\mu_t)Q(\mu_t)^T$$
$$S(\mu_t) = Q(\mu_t)\Sigma(\mu_t)Q(\mu_t)^T$$

ترمز للتفريق الطيفي spectral decompositions لكل من $X(\mu_t)$ و $S(\mu_t)$. إن النظرية ٦.٧ تقتضي أن القيم الذاتية لـ $X(\mu_t)$ و $S(\mu_t)$ هي قيم محدودة. إن المصفوفات $Q(\mu_t)$ متعامدة لكل t ، وهي بالتالي عبارة عن مجموعة متراصة. ينتج عن ذلك أن المتتالية الثلاثية $\left(Q(\mu_t)\ ,\ \Lambda(\mu_t)\ ,\ \Sigma(\mu_t)\right)$ لها نقطة نهاية لتكن $(Q^*, \Lambda^*, \Sigma^*)$. أي أنه يوجد متتالية جزئية لنرمز لها بنفس الرمز $\{\mu_t\}$ بحيث أن

$$\lim_{t\to\infty} Q(\mu_t)=Q^*\ ,\ \lim_{t\to\infty} \Lambda(\mu_t)=\Lambda^*\ ,\ \lim_{t\to\infty} \Sigma(\mu_t)=\Sigma^*$$

لاحظ أن $\Lambda(\mu_t)\ \Sigma(\mu_t)=\mu I$. وبالتالي بتعريف

$$\begin{aligned}\hat{X} &= Q^*\Lambda^*Q^{*T} = \lim_{t\to\infty} X(\mu_t)\\ \hat{S} &= Q^*\Sigma^*Q^{*T} = \lim_{t\to\infty} S(\mu_t)\end{aligned} \tag{٦.٧}$$

نحصل على $\Lambda^*\Sigma^*=0$ ويكون الزوج $(\hat{X},\hat{S})$ هو الحل الأمثل.

نظرية ٧.٧

الزوج $(\hat{X},\hat{S})$ المعرف في (٦.٧) هو حل متممة عظمى.

البرهان: انظر [Dk].

تمارين الباب السابع

١.٧ أوجد شروط الأمثلة للمسألة التالية $n=m=3$ ، $b=[1\quad 0\quad 0]$ ، وأن:

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

٢.٧ أوجد دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية ودالة الحاجز اللوغاريتمية الثنائية للتمرين السابق؟

٣.٧ أوجد G_α للتمرين ١.٧ حيث $\alpha=0.2$ ؟