الباب السادس

الثنائية وشروط الأمثلة
Duality and Optimality

• مقدمة • المسائل بشكل القياسي • الثنائية القوي والضعيف • مجموعة الحلول المسموح بها • شروط الأمثلة

١.٦ مقدمة Introduction

بشكل عام من الممكن إعادة صياغة جميع مسائل الأمثلة المحدبة على شكل ما يسمى البرمجة الخطية المخروطية conic linear programs . هذه المسائل هي دالة هدف خطية ومجموعة حلول مسموح بها هي عبارة عن تقاطع فراغ تآلفي affine space مع مخروط محدب convex cone. إن جميع المعادلات الغير خطية في البرمجة الخطية المخروطية هي متضمنة في تعريف المخروط المحدب. إن للبرمجة الخطية المخروطية خاصية الثنائية القوية تحت قيود مؤهلة.

وإذا كان الفراغ التآلفي يتقاطع مع الداخل النسبي relative interior للمخروط، فإن المسألة الثنائية تكون قابلة للحل، حيث قيمة الحل الأمثل لدالة الهدف هي نفسها بالنسبة للمسألة الأساسية. وذلك إذا كانت مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية غير خالية.

من الممكن صياغة تصنيف جزئي subclass من البرمجة الخطية المخروطية إذا اعتبرنا المخاريط التي لها نفس الثنائية، أي أن المخروط الأساسي والثنائي للمسألة متطابقان. هناك ثلاث مخاريط تنطبق عليها هذه الخاصية في الأعداد الحقيقية وهي: الثمن الموجب في $\mathbb{R}^n$ ومخروط لورنتر Lorentz Cone أو مخروط الرتبة الثانية، ومخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. هذه المخاريط بترتيبها تُعرف كل من مخروط مسائل البرمجة الخطية ومخروط مسائل الرتبة الثانية ومسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة. إن كون هذه المخاريط لها نفس الثنائية يضمن لنا تماثلاً مثالياً بين المسألة الأساسية والمسألة الثنائية، أي أنه من الممكن بشكل دقيق تمثيل المسألة الأساسية والمسألة الثنائية بنفس الصيغة. وكما شرحنا في الباب الخامس إن مسائل البرمجة الخطية وبرمجة الرتبة الثنائية يمكن أن ينظر لها على أنها حالة خاصة من مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة.

في هذا الباب سوف ندرس بعض خواص النظرية الأساسية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة. كما سوف نعرِّف الشكل القياسي للبرمجة الموجبة شبه المعرفة ونشتق المسألة الثنائية المرافقة. أيضاً سنثبت أن النظريات الكلاسيكية للثنائية القوية والضعيفة تكون هي الشرط اللازم والكافي لشروط الأمثلة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة عندما تكون على شكل القياس.

٢.٦ المسائل بالشكل القياسي Problems in Standard Form

فيما يلي سوف نعطي الشكل القياسي للمسألة الأساسية:

$$\begin{array}{lll} \text{minimize} & \operatorname{tr}(CX) & \\ \text{subject to} & \operatorname{tr}(A_i X) = b_i\ , & i = 1,\dots,m \\ & X \in \mathcal{S}_n^+ & \end{array} \qquad (١.٦)$$

حيث $\mathcal{S}_n^+$ ترمز لمجموعة المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. وكذلك يكون الشكل القياسي للمسألة الثنائية على الشكل التالي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & b^T y \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C \\ & S \in \mathcal{S}_n^+\ ,\ y \in \mathbb{R}^m. \end{array} \qquad (٢.٦)$$

إن X و (y, S) هي عبارة عن حلول مسموح بها، لأنهما يحققان قيود المسألة الأساسية والثنائية على التوالي. سوف نرمز لمجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية بالرمز التالي:

$$\mathcal{P} = \{X \mid \operatorname{tr}(A_i X) = b_i,\ X \succeq 0,\ i = 1,\dots,m\}$$

وبالمثل سوف نرمز لمجموعة الحلول المسموح بها بالنسبة لمسألة الثنائية بالرمز التالي:

$$\mathcal{D} = \{(y, S) \mid \sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S = C\ ,\ S \succeq 0\ ,\ y \in \mathbb{R}^m\}$$

بالمثل نرمز لمجموعة الحلول المثلى للمسألة الأساسية بالرمز:

$$\mathcal{P}^* = \{X \in \mathcal{P} \mid \operatorname{tr}(CX) = p^*\}$$

ونرمز لمجموعة الحلول المثلى للمسألة الثنائية بالرمز:

$$\mathcal{D}^* = \{(S, y) \in \mathcal{D} \mid b^T y = d^*\}$$

حيث القيمتين p^* و d^* هما قيمة الحل الأمثل لكل من (١.٦) و (٢.٦) بالترتيب. سوف تكون $p^* = -\infty$ إذا كانت المسألة الأساسية غير محدودة. و $p^* = \infty$ إذا كانت المسألة الأساسية ليس لها حلول مسموح بها أي أن ($\mathcal{P} = \varnothing$). وبالمثل بالنسبة للمسألة الثنائية.

تكون (١.٦) وبالمثل (٢.٦) قابلة للحل إذا كانت $\mathcal{P}^*$ غير خالية و $\mathcal{D}^*$ غير خالية. ومن الواضح أن (٢.٦) هي ثنائية لاجرانج لـ (١.٦). لاحظ أن

$$\begin{aligned} p^* &= \min_{X \succeq 0} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad \left\{ \operatorname{tr}(CX) - \sum_{i=1}^{m} y_i (\operatorname{tr}(A_i X) - b_i) \right\} \\ &= \min_{X \succeq 0} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad b^T y + \operatorname{tr}\left((C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i) X \right) \end{aligned}$$

من الممكن استنتاج ثنائية لاجرانج لـ (١.٦) بتبديل التعظيم بالتصغير فينتج لدينا:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad \left\{ \mathrm{b}^{\mathrm{T}} y + \min_{X \succeq 0} \quad \operatorname{tr}\left((C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i) X \right) \right\}. \qquad (٣.٦)$$

إن مسألة التصغير الموجودة داخل (٣.٦) محدودة من الأسفل، إذا وإذا فقط

$$\operatorname{tr}\left((C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i) X \right) \geq 0 \qquad \forall \;\; X \succeq 0$$

أي أنه إذا وإذا فقط

$$C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq 0 \;\; .$$

في هذه الحالة يتضح أن مسألة التصغير الموجودة داخل (٣.٦) لها قيمة مثلى تساوي الصفر. وبالتالي فالمسألة (٣.٦) يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \left\{ \mathrm{b}^{\mathrm{T}} y \,\middle|\, C-\sum_{i=1}^{m} y_i A_i \succeq 0 \right\}.$$

وبتعريف $S = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$ نحصل على (٢.٦).

في هذا الجزء من الكتاب سوف نفترض فرضيتين، الأولى: أن المصفوفات A_i مستقلة خطياً، وبالتالي فإن y محددة بشكل وحيد لمصفوفة معطاة S من مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية، أي أن $S \in \mathcal{D}$. وهذا يسمح لنا أن نكتب $y \in \mathcal{D}$ أو $S \in \mathcal{D}$ بدلاً من $(y,S) \in \mathcal{D}$. إن هذه الفرضية هي نفس الفرضية الموجودة في البرمجة الخطية التي تفترض أن مصفوفة القيود لها الرتبة الكاملة. ولكي ترى ذلك لاحظ أن استقلال المصفوفات $A_i \;\; (i=1,\ldots,m)$ خطياً يكافئ استقلال المتجهات $vec(A_i)\;(i=1,\ldots,m)$ خطياً، حيث $b = vec(B)$ هو المتجه المكون من أعمدة B بعضها فوق بعض. وبالتالي من الممكن اعتماد هذه الفرضية من دون أن نفقد العمومية.

والفرضية الثانية هي ما تسمى بوجود الحلول المسموح بها فعلياً strict feasibility. أي أنه يوجد $X \in \mathcal{P}$ و $S \in \mathcal{D}$ بحيث أن $X \succ 0$ و $S \succ 0$. إن مثل هذه الحلول تسمى أيضاً بالحلول المسموح بها القوية أو قيد سلتر المؤهل أو شرط سلتر المنظّم. وفي بعض الأحيان يُرجع إليها على أنها فرضية النقطة الداخلية.

لاحظ أن الفرضية متوافقة مع شرط سلتر المنظّم للأمثلة المحدبة، وذلك إذا استخدمنا الحقيقة أن الداخل النسبي relative interior لـ $\mathcal{S}_n^+$ هو عبارة عن جميع المصفوفات الموجبة المعرفة. لاحظ أنه إذا تحققت الفرضية الثانية فإن الداخل النسبي لمجموعة الحلول المسموح بها الأساسية الثنائية معطى بـ

$$ri(\mathcal{P}\times\mathcal{D}) = \{(X,S)\in \mathcal{P}\times\mathcal{D} \mid X \succ 0, S \succ 0\}$$

حيث $ri(\mathcal{P})$ يمثل الداخل النسبي لـ $\mathcal{P}$. سوف نلاحظ في الفصل القادم أن الفرضية الثانية تضمن لنا أن $\mathcal{P}^* \neq \varnothing$ وأن $\mathcal{D}^* \neq \varnothing$ وأن $p^* = d^*$ وسوف نبين ذلك لاحقاً. من السهل إثبات خاصية التعامد التالية للمسألتين (١.٦) و(٢.٦) والتي سوف نستخدمها بشكل مكثف.

نظرية ١.٦

لتكن $\left(X,(y,S)\right) \in \mathcal{P}\times\mathcal{D}$ وأن $\left(X^\circ,(y^\circ,S^\circ)\right) \in \mathcal{P}\times\mathcal{D}$ زوجان من الحلول المسموح بها. و لنرمز لـ

$\Delta X = X - X^\circ$ و $\Delta S = S - S^\circ$ فإن $\operatorname{tr}(\Delta X \Delta S) = 0$

البرهان:

من تعريف ΔS و $\mathcal{D}$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i^\circ - y_i \right) A_i$$

أي أن $\Delta S \in span\ \{A_1,....,A_m\}$. وبالمثل بتعريف ΔX و $\mathcal{P}$ نحصل على

$$\operatorname{tr}(A_i \Delta X) = \operatorname{tr}(A_i X) - \operatorname{tr}(A_i X^\circ) = b_i - b_i^\circ\ , \quad i = 1,...,m$$

والذي يقتضي أن

$$\Delta X \in span\ \{A_1,....,A_m\}^\perp$$

وهذا يبين أن ΔS تقع في الفراغ الجزئي $\mathcal{S}_n$ المولد بالمصفوفات $\{A_1,....,A_m\}$، وأن ΔX تقع في المتممة العمودية لهذا الفراغ الجزئي. □

لنرمز للفراغ الجزئي المولد بالمصفوفات $\{A_1,....,A_m\}$ بالرمز $\mathcal{L} = span\{A_1,....,A_m\}$.

وليكن لدينا $X \in ri(\mathcal{P})$، أي أن X من مجموعة الحلول المسموح بها الفعلية. سوف نسمي ΔX باتجاه مسموح به عند X إذا كانت $\Delta X \in \mathcal{L}^\perp$. وبالمثل سوف نسمي ΔS باتجاه مسموح به عند $S \in ri(\mathcal{D})$ إذا كانت $\Delta S \in \mathcal{L}$. والفكرة

هنــا أنــه يوجــد طــول خطــوة $\alpha > 0$ بحيــث أن $X + \alpha\Delta X \in \mathcal{P}$ وأن $S + \alpha\Delta S \in \mathcal{D}$. ولهــذا الــسبب ســوف نــشير إلى $X + \alpha\Delta X$ و $S + \alpha\Delta S$ بالخطوات المسموح بها.

إنه من المفيد في بعض الأحيان أن نعيد صياغة المسألتين الأساسية والثنائية بحيث تكونا متماثلتين أي أن المسألتين تكون لهما بالضبط نفس الصيغة. لــتكن $M \in \mathcal{S}_n$ بحيــث أن $\text{tr}\, A_i M = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$ وأن $\text{tr}\, CM = 0$ بالتالي فإن (١.٦) لها الصيغة البديلة التالية:

$$p^* = \min_X \ \{\text{tr}\,(CX) \,|\, X \in \mathcal{L}^{\perp} + M,\ X \succeq 0\} \qquad (٤.٦)$$

وثنائية لاجرانج لهذه المسألة هي:

$$d^* = \max_S \ \{\text{tr}\,(-MS) \,|\, S \in \mathcal{L} + C,\ S \succeq 0\} \qquad (٥.٦)$$

لاحـظ أن $X \in \mathcal{P}$ إذا وإذا فقـط كانـت X حـلاً مـسموح بـه للمـسألة (٤.٦). وبالمثـل $S \in \mathcal{D}$ إذا وإذا فقـط كانـت S حـلاً مـسموح بـه للمـسألة (٥.٦). وأن $b^T y = \text{tr}\,(-MS)$ إذا كانت $S = C - \sum_{i=1}^{m} y_i A_i$.

٣.٦ الثنائية القوي والضعيف Weak and Strong Duality

كما في البرمجة الخطية إن الفرق بين قيمة دالة الهدف للمسألة الأساسية والثنائية يسمى الفجوة الثنائية.

تعريف ٢.٦ (الفجوة الثنائية)

لتكن $X \in \mathcal{P}$ وأن $(y, S) \in \mathcal{D}$. إن المقدار

$$\text{tr}\,(CX) - b^T y \qquad (٦.٦)$$

يسمى الفجوة الثنائية للمسألة الأساسية والثنائية عند (X, y, S).

من تعريف المسألة الأساسية والثنائية وذلك لحل مسموح به (X, y, S) نجد أن

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(CX) - b^T y &= \operatorname{tr}\left((\sum_{i=1}^{m} y_i A_i + S) X \right) \\ &\qquad - \sum_{i=1}^{m} y_i \operatorname{tr}(A_i X) \\ &= \operatorname{tr}(SX) \geq 0\end{aligned}$$

حيث المتباينة متحققة لأن $X \succeq 0$ ولأن $S \succeq 0$. إن قيمة الفجوة الثنائية دائماً غير سالبة للحلول المسموح بها، وهذا ما يسمى بخاصية الثنائية الضعيف، وسوف نطرحها في النظرية التالية.

نظرية ٣.٦ (الثنائية الضعيف)

لتكن $X \in \mathcal{P}$ و $(y, S) \in \mathcal{D}$ فإن

$$\operatorname{tr}(CX) - b^T y = \operatorname{tr}(SX) \geq 0 \qquad (٧.٦)$$

أي أن الفجوة الثنائية دائماً غير سالبة في حالة الحلول المسموح بها.

البرهان: تمرين.

تعريف ٤.٦

يقال عن المسألتين الأساسية والثنائية أنهما في حالة ثنائية مثالية إذا كانت $p^* = d^*$.

لاحظ أن هذا التعريف لا يقتضي أن تكون $\mathcal{P}^*$ و $\mathcal{D}^*$ غير خاليتين. إذا كانت $\mathcal{D}^*$ غير خالية فإننا نقول أن الثنائية القوية تتحقق للمسألتين الأساسية والثنائية.

مثال ٥.٦

إن هذا المثال يرجع إلى [VB] ويوضح زوجاً من مسائل الثنائية والتي فيها الثنائية المثالية تتحقق ولكن $\mathcal{P}^* = \varnothing$. لنعتبر المسألة التالية في الصيغة القياسية الثنائية:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad y_2\ , \qquad y \in \mathbb{R}^2 \\ &\text{subject to} \ \ y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إن هذه المسألة غير قابلة للحل ولكن $\max \ y_2 = 1$. كما أن المسألة الثنائية لهذه المسألة (والتي هي المسألة الأساسية بالصيغة القياسية) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \right) \\ &\text{subject to} \ \ X = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

لاحظ أن $X \succeq 0$ يقتضي أن $x_{12} = 0$ أي أن

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

وهو الحل الأمثل الوحيد وقيمة دالة الهدف تساوي واحد، ولكن $\mathcal{P}^* = \varnothing$.

إذا كانت المسألة الأساسية (١.٦) لها حل مسموح به فعلياً والمسألة الثنائية (٢.٦) لها حل مسموح به أو العكس. فإن الثنائية المثالية تتحقق، وتكون $\mathcal{D}^* \neq \varnothing$ أو في الحالة المعاكسة تكون $\mathcal{P}^* \neq \varnothing$. إن إثبات هذه النظرية يحتاج

إلى الرجوع إلى نتائج أساسية في التحليل المحدب، وسوف نذكر النظرية. ومن الممكن الرجوع إلى إثبات النظرية في [Dk].

نظرية ٦.٦ (الثنائية القوي)

إذا كانت $d^* < \infty$ وأن (٢.٦) لها حل مسموح به فعلياً فإن $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ وأن $p^* = d^*$. بالمثل إذا كانت $p^* > -\infty$ وأن (١.٦) لها حل مسموح به فعلياً فإن $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$ وأن $p^* = d^*$.

البرهان: إنظر [Dk].

لدينا كنتيجة لهذه النظرية والتي سوف تعطينا الشرط الكافي لثنائية القوي.

نتيجة ٧.٦

إذا كانت المسألتان الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلياً فإن $p^* = d^*$ ، وتكون مجموعتا الحلول المثلى غير خالية.

البرهان:

مباشر من النظرية ٣.٦ تكون d^* و p^* منتهيتين. ومن نظرية ٦.٦ يتحقق المطلوب. □

٤.٦ مجموعة الحلول المسموح بها Feasible Solutions

لتتبين احتمال عدم وجود حلول مسموح بها للمسألتين الأساسية والثنائية وكذلك كون المسألتان غير محدودتين نحتاج إلى التعريف التالي:

تعريف ٨.٦

نقول إن المسألة الأساسية لها سهم محسن improving ray إذا وجدت مصفوفة متماثلة $\bar{X} \succeq 0$ بحيث أن $tr\ (A_i \bar{X}) = 0\ ,\ i = 1,\ldots,m$ ، وكان

$tr\ (C\overline{X}) \prec 0$. بالمقابل نقول إن المسألة الثنائية لها سهم محسن إذا وجد متجه $\overline{y} \in \mathbb{R}^m$ بحيث أن $\overline{S} = -\sum_{i=1}^{m} \overline{y}_i\ A_i \geq 0$ وكان $b^T\,\overline{y} > 0$.

إن الأسهم المحسنة للمسألة الأساسية تسبب عدم وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية والعكس صحيح.

نتيجة ٩.٦

إذا وجد سهم محسن ثنائي $\overline{y}$ ، فإن المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به. وبالمثل إذا وجد سهم محسن أساسي $\overline{X}$ ، فإن المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به.

البرهان:

ليكن لدينا $\overline{y}$ سهم محسن ثنائي. لنفرض وجود حل مسموح به X للمسألة الأساسية فبالتالي:

$$0 < b^T\overline{y} = \sum_{i=1}^{m} tr\ (A_i X)\ \overline{y}_i = -tr\ (X\overline{S}) \leq 0$$

وهذا تناقض. وبالمثل للمسألة الأساسية. □

تعريف ١٠.٦

إن المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به بقوة strongly infeasible إذا كانت المسألة الثنائية لها سهم محسن. ويقال إن المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به بقوة إذا كانت المسألة الأساسية لها سهم محسن.

من هذا التعريف نجد أن كل مسألة برمجة خطية ليس لها حل مسموح به هي مسألة ليس لها حل مسموح به بقوة. بينما مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة قد تكون المسألة ليس لها حل مسموح به ضعيف weak infeasibility، كما هو بالتعريف التالي:

تعريف ١١.٦

المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به ضعيف إذا كانت $\mathcal{P} = \emptyset$ وكان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $X \succeq 0$ بحيث أن

$$\left|\operatorname{tr}(A_i X) - b_i\right| \le \varepsilon, \qquad \forall i$$

وبالمثل المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به ضعيف إذا كانت $\mathcal{D} = \emptyset$ وكانت لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $y \in \mathbb{R}^m$ و $S \succeq 0$ بحيث

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} y_i \, A_i + S - C \right\| \le \varepsilon .$$

مثال ١٢.٦

سوف نعطي الآن مثال على عدم وجود حلول مسموح بها ضعيف. إذا كانت المسألة الثنائية معرفة حيث $n = 2$ ، $m = 1$ ،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = [1]^T$$

بحيث أن المسألة الثنائية تكون على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} \quad y_1 \\ &\text{subject to} \quad y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نستطيع أن نبني ε في التعريف السابق بوضع

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad y_1 - \frac{1}{\varepsilon}$$

بحيث أن

$$.\|y_1\, A_1 + S - C\| = \left\| -\frac{1}{\varepsilon}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \varepsilon$$

نظرية ١٣.٦

إذا كانت المسألة الثنائية ليس لها سهم محسن فإن المسألة الأساسية إما أن يكون لها حلول مسموح بها أو ليس لها حلول مسموح بها ضعيف. وبالمثل إذا كانت المسألة الأساسية ليس لها سهم محسن فإن المسألة الثنائية إما أن يكون لها حلول مسموح بها أو أن ليس لها حلول مسموح بها ضعيف.

البرهان: انظر [Dk].

هناك وصف بديل لعدم وجود الحلول المسموح بها الضعيف وذلك بتقدم مفهوم السهم المحسن الضعيف. حيث أن السهم المحسن للمسألة الأساسية يؤدي إلى عدم وجود حلول مسموح بها فعلياً للمسألة الثنائية، والعكس صحيح فإن السهم المحسن الضعيف يؤدي إلى عدم وجود حلول مسموح بها ضعيف.

تعريف ١٤.٦

نقول أن المسألة الأساسية لها سهم محسن ضعيف إذا وجد متتالية

$$\bar{X}^{(k)}, \qquad k=1,2,...$$

بحيث أن

$$\lim_{k\to\infty} \min \left|\operatorname{tr}(A_i \bar{X}^{(k)})\right| = 0 \qquad i=1,.......,m$$

$$\lim_{k\to\infty} \max \ \operatorname{tr}(C\, \bar{X}^{(k)}) = -1$$

وبالمثل نقول أن المسألة الثنائية لها سهم محسن ضعيف إذا وجد متتاليات

$\bar{S}^{(k)} \geq 0$ و $\bar{y}^{(k)} \in \mathbb{R}^m$ و $\bar{S}^{(k)} \succeq 0, \qquad k=1,2,...$

بحيث أن

$$\lim_{k\to\infty} \min \left\| \bar{S}^{(k)} + \sum_{i=1}^{m} \bar{y}^{(k)} A_i \right\| = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} \min \; b^T \bar{y}^{(k)} = 1$$

الآن لدينا النظرية التالية:

نظرية ١٥.٦

المسألة الأساسية ليس لها حلول مسموح بها ضعيف إذا وإذا فقط كانت المسألة الثنائية لها سهم محسن ضعيف، وبالمثل المسألة الثنائية ليس لها حلول مسموح بها ضعيف إذا وإذا فقط كانت المسألة الأساسية لها سهم محسن ضعيف.

البرهان: انظر [Dk].

٥.٦ شروط الأمثلة **Optimality Conditions**

من نظرية الثنائية الضعيف نظرية ٣.٦ نرى أن $X^* \in \mathcal{P}$ وأن $S^* \in \mathcal{D}$ هي عبارة عن حلول مثلى إذا كانت الفجوة الثنائية عند (X^*, S^*) صفراً. أي أن $\text{tr}\,(X^*S^*) = 0$. وهذا الشرط يكافئ أن تكون $X^*S^* = 0$ ، لأن $X^* \succeq 0$ وأن $S^* \succeq 0$. ينتج عن ذلك أن الشروط الكافية للأمثلة للمسألة الأساسية والثنائية هي :

$$\begin{aligned} &\text{tr}\,(A_i X) = b_i,\; X \ge 0\;, \qquad i = 1, \ldots, m \\ &\sum_{i=1}^{m} y_i\, A_i + S = C,\; S \ge 0 \\ &XS = 0 \end{aligned} \tag{٨.٦}$$

يسمى الشرط $XS=0$ بشرط المتممة complementarity condition، والحلول المثلى التي تحقق هذا الشرط تسمى متتامة أو حلول متممة complementary.

ونتيجة ٧.٦ التي اُشتقت من نظرية الثنائية القوية تقتضي أن شرط الأمثلة هي أيضاً لازمة إذا كانت كلٌ من المسألة الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلية.

نظرية ١٦.٦

إذا كانت المسألتان الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلياً فإن النظام (٨.٦) هو الشرط اللازم والكافي لشروط الأمثلة للمسألتين.

البرهان: انظر نتيجة ٧.٦.

في حالة البرمجة الخطية دائماً تتحقق لدينا المتممة الفعلية، أي أنه يوجد دائماً حلول مثلى X^* و S^* بحيث أن $X^*+S^*>0$. ولكن في حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة فإن هذا الوضع ليس دائماً صحيح، وهذا المثال التالي يبين ذلك:

مثال ١٧.٦

إن هذا المثال يرجع إلى [Ali2]. لتكن $n=m=3$, $b=[1 \quad 0 \quad 0]$ وأن

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\ A_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

إن الحلول المثلى للمسألتين الأساسية والثنائية هي :

$$X^*=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ y_i^*=0\ \ (i=1,2,3),\quad S^*=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

إنه من الواضح أن X^* هو الحل الأمثل، لأن $C \geq 0$ وبالتالي

$$\operatorname{tr}(CX) \succeq 0 \quad \forall \; X \in P \,.$$

أيضاً من السهل أن نرى أن الزوج (X^*, S^*) هو زوج وحيد، فيتبين أن المتممة الفعلية لا تتحقق في هذا المثال.

تمارين الباب السادس

١.٦ اذكر شروط الأمثلة للمثال ١٧.٦؟

٢.٦ لتكن $n = m = 3$، $b = [1 \quad 0 \quad 0]$، وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اكتب مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة على الشكل القياسي؟ وأيضاً اكتب الشكل القياسي للمسألة الثنائية؟

٣.٦ أوجد $\mathcal{L}$ و $\mathcal{L}^{\perp}$ للتمرين السابق؟

٤.٦ أوجد البرنامج الثنائي للمسألة التالية:

$n = 2$ ، $m = 3$ ،

$b = [1 \quad 2 \quad 1]^T$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ثم أوجد الفجوة الثنائية؟

٥.٦ أثبت نظرية الثنائية الضعيف ٣.٦؟

٦.٦ لدينا البرنامج التالي

$$\text{maximize} \quad y_1 + y_2 \ , \qquad y \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{subject to} \quad y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

أوجد البرنامج الثنائي والفجوة الثنائية؟