الباب الثالث

طريقة تابع المسار
Path Following Method

• مقدمة • تقدير قيمة ملائمة لوسيط دالة الجزء • حساب اتجاهات الخطوة • طريقة نيوتن • اختيار طول خطوة الوسيط • تحليل التقارب

١.٣ مقدمة Introduction

في هذا الباب، سوف نُعرِّف طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية التي تسمى طريقة تابع المسار. ولا تنس أنه لحل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس هناك مرحلتين لخطوات الحل، بينما تحتاج طريقة تابع المسار إلى مرحلة واحدة فقط. هذا يعني بأن هذه الطريقة يمكن أن تبدأ من نقطة خارج منطقة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية أو الثنائية وستصل مباشرة إلى

الحل الأمثل. لذلك نبدأ باختيار عشوائي لقيم موجبة لكل المتغيرات الأساسية والثنائية، أي أن $(x,w,y,z)>0$ ، وبعد ذلك نُحدّث هذه القيم بشكل متكرر كالتالي:

١- نقترح قيمة ملائمة لـ μ (أصغر من القيمة " الحالية " لكن ليست صغيرة جداً).

٢- نحسب اتجاهات الخطوة $(\Delta x,\Delta w,\Delta y,\Delta z)$ بحيث تشير تقريباً إلى النقطة $(x_\mu,w_\mu,y_\mu,z_\mu)$ على المسار الأوسط.

٣- نحسب طول الخطوة للوسيط θ ، حيث تكون النقاط الجديدة:

$$\tilde{x}=x+\theta\Delta x \qquad \tilde{y}=y+\theta\Delta y$$
$$\tilde{w}=w+\theta\Delta w \qquad \tilde{z}=z+\theta\Delta z$$

نستمر حتى نحصل على مركبات موجبة.

٤- نستبدل (x,w,y,z) بالحلول الجديدة $(\tilde{x},\tilde{w},\tilde{y},\tilde{z})$.

لتعريف طريقة تابع المسار بالكامل، يكفي عمل كل من هذه الخطوات الأربع بشكل دقيق. في الفصول التالية، سنبدأ بشرح تلك الخطوات بشكل دقيق حسب الترتيب أعلاه. وفي الفصل الأخير سنشرح تحليل التقارب.

٢.٣ تقدير قيمة ملائمة لوسيط دالة الحاجز

Estimating an Appropriate Value for the Barrier Parameter

سوف نشرح الآن كيفية اختيار μ . هناك خياران إما أن تكون μ كبيرة جداً أو صغيرة جداً، إذا اخترنا μ لتصبح ذات قيمة كبيرة جداً، فإنه من الممكن أن المتتالية تتقارب إلى المركز التحليلي analytic center لمنطقة الحلول

المسموح بها، وهذا ما لا نريد الوصول إليه. ومن ناحية أخرى إذا اخترنا μ لتصبح ذات قيمة صغيرة جداً، فإنه من الممكن أن المتسلسلة تبقى بعيدة جداً عن المسار الأوسط، وبالتالي قد تتعثر الخوارزمية عند حدود منطقة الحلول المسموح بها في مكان أمثل فرعي. الفكرة المثالية أن نجد تسوية معقولة بين هذين الطرفين. ولعمل هذا علينا أن نَعْرف أولاً القيم التي سوف تُمثِل القيمة الحالية μ بشكل ما ومن ثم نختار قيمة أصغر من ذلك ولتكن كسر ثابت منه.

معطى لدينا النقطة (x, w, y, z) وهي بالتأكيد ليست على المسار الأوسط، إذ لو كانت على المسار الأوسط فإن هناك عدة صيغ يمكننا من خلالها استعادة قيمة μ. على سبيل المثال يمكننا فقط حساب $z_j x_j$ لأي دليل ثابت j. أو يمكننا أن نحسب $y_i w_i$ لأي دليل ثابت i. كما يمكننا أن نأخذ القيمة المتوسطة لكل تلك القيم:

$$\mu = \frac{z^T x + y^T w}{n+m}$$

هذه الصيغة تعطينا بالضبط قيمة μ، حينما يُعلم أن (x, w, y, z) تقع على المسار الأوسط. إن النقطة الرئيسية هنا هي أننا سوف نستخدم هذه الصيغة لإيجاد تقريب لقيمة μ حتى لو كان الحل الحالي (x, w, y, z) لا يقع على المسار الأوسط. بالطبع الخوارزمية تحتاج لقيمة μ التي تمثل نقطة أقرب إلى الحل الأمثلة من الحل الحالي. وبالتالي فإن الخوارزمية تأخذ القيمة أعلاه ونخفضها من خلال وسيط كسري.

$$\mu = \delta \frac{z^T x + y^T w}{n+m}$$

حيث أن δ عدد بين الصفر والواحد ، وفي التطبيق وجد أن وضع δ تساوي تقريباً $1/10$ يعطي أفضل النتائج. ولكن لاختلاف الأداء في ذلك سنتركه كوسيط .

٣.٣ حساب اتجاهات الخطوة Calculating Step Directions

هدفنا أن نجد $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ بحيث أن النقطة الجديدة $(x+\Delta x, w+\Delta w, y+\Delta y, z+\Delta z)$ تقع تقريباً على المسار الأوسط الأساسي الثنائي في النقطة $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$. نذكر أن المعادلات المُعرفة لهذه النقطة على المسار الأوسط هي:

$$\begin{aligned} Ax + w &= b \\ A^T y - z &= c \\ XZe &= \mu e \\ YWe &= \mu e \end{aligned}$$

نرى أن النقطة الجديدة $(x+\Delta x, w+\Delta w, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ، إذا كانت ستقع بشكل تام على المسار الأوسط عند μ ، فإنها تُعرَّف على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} A(x+\Delta x) + (w+\Delta w) &= b \\ A^T(x+\Delta y) - (z+\Delta z) &= c \\ (X+\Delta X)(Z+\Delta Z)e &= \mu e \\ (Y+\Delta Y)(W+\Delta W)e &= \mu e \end{aligned}$$

بالتفكير في (x, w, y, z) على أنها بيانات معلومة و $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ على أنها مجاهيل، نعيد كتابة هذه المعادلات ونضع المجاهيل على اليسار و قيم البيانات على اليمين:

$$A\Delta x + \Delta w = b - Ax - w = \rho$$
$$A^T \Delta y - \Delta z = c - A^T y + z = \sigma$$
$$Z\Delta x + X\Delta z + \Delta X \Delta Ze = \mu e - XZe$$
$$W\Delta y + Y\Delta w + \Delta Y \Delta We = \mu e - YWe$$

لاحظ أننا قدمنا رمزين للاختصار هما: ρ و σ. إن هذين المتجهين يمثلان الحلول الغير مسموح بها الأساسية و الحلول الغير مسموح بها الثنائية على التوالي.

وهذه المعادلات تشكل نظام معادلات غير خطية حيث المتغيرات هي $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$ ونريد أن يصبح لدينا نظام خطي، لذا يجب أن نتخلص من الحدود غير خطية، فيصبح لدينا النظام الخطي التالي:

$$A\Delta x + \Delta w = \rho \tag{١.٣}$$
$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma \tag{٢.٣}$$
$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe \tag{٣.٣}$$
$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe \tag{٤.٣}$$

هذا النظام من المعادلات هو نظام خطي مكون من $2n + 2m$ معادلة في $2n + m$ مجهول. سوف نوضح لاحقاً أن هذا النظام غير شاذ (حيث أن A لها رتبة كاملة) ولهذا يكون لها حل وحيد، هذا الحل سوف يُعرِّف اتجاهات الخطوة التالية لطريقة تابع المسار.

إن حذف الحدود غير الخطية في هذا النظام هو أمر شائع لحل نظام معادلات غير خطية، وتسمى هذه الطريقة بطريقة نيوتن، كما سوف يتم شرحها في الفصل التالي.

٤.٣ طريقة نيوتن Newton's Method

ليكن لدينا الدالة:

$$F(\xi)=\begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_n(\xi) \end{bmatrix}, \quad \xi=\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

من $\mathbb{R}^n$ إلى $\mathbb{R}^n$ ، والمطلوب لحل المسألة هو أن نجد نقطة $\xi^* \in \mathbb{R}^n$ بحيث $F(\xi^*)=0$. مثل هذه النقطة تسمى جذر أو صفر لـ F . طريقة نيوتن هي طريقة تكرارية لحل هذه المسائل.

فيما يلي نوضح أحد خطوات هذه الطريقة. معطى نقطة اختيارية $\xi \in \mathbb{R}^n$ ، الهدف منها هو إيجاد اتجاه الخطوة $\Delta\xi$ بحيث $F(\xi+\Delta\xi)=0$. وإذا كانت F غير خطية لا يمكن إيجاد أي اتجاه للخطوة. لذلك يكون اتجاه الخطوة مقرب باستخدام أول حدين من سلسلة تايلور الموسعة:

$$F(\xi+\Delta\xi)\approx F(\xi)+F'(\xi)\Delta\xi,$$

حيث

$$F'(\xi)=\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_n} \end{bmatrix}.$$

إن التقريب خطي في $\Delta\xi$. لذلك عند مساواته بالصفر يعطينا نظاماً خطياً. حيث ينتج من الحل اتجاه الخطوة:

$$F'(\xi)\Delta\xi = -F(\xi)$$

لدينا $\Delta\xi$ ، طريقة نيوتن تُحدِّث الحل الحالي ξ باستبداله بـ $\xi + \Delta\xi$. وتستمر هـذه العمليـة إلى أن يـصبح الحـل الحـالي جـذر ($F(\xi) \approx 0$). إن طريقـة نيـوتن تعمل بشكل جيد في الحالات العامة، وقد تفشل إذا كانت F غير مستقرة أو أن نقطة البداية بعيدة عن الحل.

لإيجاد نقطة على المسار الأوسط نضع:

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad F(\xi) = \begin{bmatrix} Ax + w - b \\ A^T y - z - c \\ XZe - \mu e \\ YWe - \mu e \end{bmatrix} ،$$

نـرى أن مجموعـة المعـادلات الـتي تُعـرِّف $(x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$ هـي جـذر لـ F. إن مصفوفة اشتقاقات F هـي:

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} A & 0 & I & 0 \\ 0 & A^T & 0 & -I \\ Z & 0 & 0 & X \\ 0 & W & Y & 0 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن

$$\Delta\xi = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

من السهل ملاحظة أن اتجاه نيوتن يتوافق مع الاتجاه الحاصل من حل المعادلات (١.٣)-(٤.٣).

٥.٣ اختيار طول خطوة الوسيط Choosing the Step Length

إن اتجاهات الخطوة التي حُددت باستعمال طريقة نيوتن، حددت تحت فرضية أن وسيط اتجاه الخطوة θ يساوي واحد (أي أن : $\tilde{x} = x + \Delta x$). لكن أخذ مثل هذه الخطوة قد يجعل المتغيرات الأساسية والثنائية في الحل الجديد غير موجبة. لذا قد نحتاج لاستعمال قيمة أصغر لـ θ . والتي تضمن أن:

$$x_j + \theta \Delta x_j > 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

بنقل Δx_j إلى الجانب الآخر، وبعد ذلك بالقسمة على θ و x_j (كليهما موجباً) نرى أن θ يجب أن تحقق

$$\frac{1}{\theta} > -\frac{\Delta x_j}{x_j}, \qquad j = 1, 2, ..., n.$$

بالطبع هذه المتباينة يجب أن تتحقق للمتغيرات y و w و z أيضاً. وعند وضعها مع بعضها البعض فإن القيمة الأكبر لـ θ ستتحقق من خلال:

$$\frac{1}{\theta} = \max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\}$$

حيث أننا أسأنا استعمال الترميز قليلاً باستعمال $\max_{ij}$ للدلالة على الحد الأعلى لكل النسب للمجموعة المحددة. وعلى أية حال فإن اختيار θ لن يضمن تبايناً فعلياً، لذا فإننا نقدم الوسيط r ، الذي يعتبر رقم قريب من ولكن أقل فعلياً من واحد، ونضع:

$$\theta = r\left(\max_{ij}\left\{-\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j}\right\}\right)^{-1} \wedge 1$$

هذه الصيغة قد تبدو غير واضحة، ولا يتعين على أحد حسابها يدوياً، ولكن تصبح بديهية عند برمجتها بواسطة الحاسب الآلي. مثل هذا الروتين سيكون سريعاً جداً (يتطلب $2n+2m$ عملية حسابية فقط).

إن خلاصة الخوارزمية المبينة في هذا الفصل موضحة كالتالي:

خوارزمية ١.٣ (خوارزمية طريقة تابع المسار)

مدخلات نقاط البداية x, w, y, z حيث $(x, w, y, z) > 0$

بينما

$$\rho = b - Ax - w$$
$$\sigma = c - A^T y + z$$
$$\gamma = z^T x + y^T w$$
$$\mu = \delta \frac{\gamma}{n+m}$$

ليست مثالية

حل

$$A\Delta x + \Delta w = \rho$$
$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$$
$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe$$
$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe$$

$$\theta = r\left(\max_{ij}\left\{-\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j}\right\}\right)^{-1} \wedge 1$$

$$x = x + \theta\Delta x \qquad w = w + \theta\Delta w$$
$$y = y + \theta\Delta y \qquad z = z + \theta\Delta z$$

في الفصل القادم، سوف نقوم بتحليل التقارب وسوف نستنتج ما إذا كانت هذه الخوارزمية تتقارب إلى الحل الأمثل.

٦.٣ تحليل التقارب Convergence Analysis

في هذا الفصل، سوف نستقصي خصائص التقارب في خوارزمية تابع المسار. في البداية نود أن نذكّر بأن طريقة السمبلكس Simplex method هي خوارزمية فيها عدد الدورات منتهي (بافتراض أن الخطوات مأخوذة بحيث لا يكون هناك دوران). بينما في طريقة النقطة الداخلية فإن الحالة مختلفة لأن كل حل ناتج تكون جميع متغيراته موجبة. ولكي نصل للحل الأمثل يتطلب ذلك تلاشي العديد من المتغيرات. وهذا التلاشي يمكن أن يحدث فقط عند النهاية. وهذا يثير بعض التساؤلات، أهمها: هل متتالية الحلول الناتجة عن طريقة تابع المسار تتقارب؟ و إذا كانت كذلك هل الحل هو الأمثل؟ وكم مقدار سرعة هذا التقارب؟ بشكل خاص إذا حددنا مقدار تحمّل الأمثلة tolerances فكم عدد الدورات لإنجاز هذا المقدار من التحمّل؟ سوف نوضح هذه المسائل في هذا الفصل.

سوف نحتاج لقياس حجم متجهات مختلفة، و هناك عدة خيارات على سبيل المثال لكل $1 \le p < \infty$ يمكننا أن نُعرِّف معيار $p-\text{norm}$ للمتجه x على أنه:

$$\|x\|_p = \left(\sum_j |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ويكون لدينا ما يسمى المعيار الجزئي $\text{sup}-\text{norm}$ عندما p تقترب من مالا نهاية، وهو معرف كالتالي:

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$$

سوف نتطرق الآن لدراسة قياس التحسن، بالتذكير بالنظرية الثنائية. حيث أن هناك ثلاثة موازين يجب أن تنطبق لكي يكون الحل الأساسي الثنائي أمثل:

١- وجود حلول مسموح بها للمسألة الأساسية.

٢- وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية.

٣- تحقق نظرية المتممة complementarity.

لكل واحد من هذه الموازين، نقدم مقياس لمدى إخفاق تحقيقها.

بالنسبة للميزان الأول، وهو وجود منطقة غير خالية للحلول المسموح بها للمسألة الأساسية، سوف نستخدم معيار 1-norm لمتجه أساسي ليس داخل منطقة الحلول المسموح بها.

$$\rho = b - Ax - w$$

وأما بالنسبة للميزان الثاني وهو وجود منطقة غير خالية للحلول المسموح بها للمسألة الثنائية، سوف نستخدم معيار 1-norm لمتجه ثنائي ليس داخل منطقة الحلول المسموح بها.

$$\sigma = c - A^T y + z$$

للمتممة سوف نستخدم

$$.\ \gamma = z^T x + y^T w$$

سوف ندرس الآن مقدار التحسن في الدورة الواحدة. ولأجل التحليل في هذا الفصل يفضل أن نقوم بإجراء بعض التعديلات في الخوارزمية بجعلها ذات خطوات أقصر من المحددة سابقاً، فنضع

$$\theta = r\left(\max_{ij}\left\{\left|\frac{\Delta x_j}{x_j}\right|,\left|\frac{\Delta w_i}{w_i}\right|,\left|\frac{\Delta y_i}{y_i}\right|,\left|\frac{\Delta z_j}{z_j}\right|\right\}\right)^{-1} \wedge 1$$

$$= \frac{r}{\max\left(\left\|X^{-1}\Delta x\right\|_\infty,\ldots,\left\|Z^{-1}\Delta z\right\|_\infty\right)} \wedge 1 \qquad (٥.٣)$$

لاحظ أن التغيير الوحيد الذي أحدثناه هو استبدال النسب السالبة بالقيمة المطلقة لنفس النسبة. وبما أن القيمة العظمى للقيم المطلقة يمكن أن تكون أكبر من القيم العظمى للنسب نفسها، فإن هذه الصيغة تعطي قيمة أصغر لـ θ. لتكن x, y ، تدل على الكميات من دورة واحدة للخوارزمية، ونضع تلدا على نفس الأحرف للدلالة على نفس الكمية في الدورة القادمة للخوارزمية. لذلك

$$\tilde{x} = x + \theta\Delta x \qquad \tilde{y} = y + \theta\Delta y$$
$$\tilde{w} = w + \theta\Delta w \qquad \tilde{z} = z + \theta\Delta z$$

والآن دعنا نقوم بحساب بعض الكميات الأخرى. نبدأ بمنطقة الحلول الغير مسموح بها الأساسية:

$$\tilde{\rho} = b - A\tilde{x} - \tilde{w}$$
$$= b - Ax - w - \theta(A\Delta x + \Delta w)$$

ولكن $b - Ax - w$ تساوي منطقة الحلول الغير مسموح بها الأساسية ρ و $A\Delta x + \Delta w$ أيضاً تساوي ρ ، حيث أن هذه المعادلة هي بالضبط نفس المعادلة (١.٣). وبالتالي:

$$\tilde{\rho} = (1-\theta)\rho$$

بنفس الطريقة

$$\tilde{\sigma} = c - A^T\tilde{y} + \tilde{z}$$
$$= c - A^T y + z - \theta(A\Delta y - \Delta z)$$
$$= (1-\theta)\sigma$$

وحيث أن θ هو عدد بين الصفر و الواحد ، يترتب على ذلك أن كل دورة ينتج عنها تناقص في الحلول غير المسموح بها لكلٍ من المسألة الأساسية والثنائية وهذا التناقص بدوره يقرب θ من الواحد.

إن تحليل المتممة أكثر تعقيداً ، حيث أننا نقوم هنا بالتخلص من الحدود غير الخطية ، وجعل النظام خطياً.

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \tilde{z}^T \tilde{x} + \tilde{y}^T \tilde{w} \\ &= (z+\theta\Delta z)^T (x+\theta\Delta x) + (y+\theta\Delta y)^T (w+\theta\Delta w) \\ &= z^T x + y^T w + \theta(z^T \Delta x + \Delta z^T x + y^T \Delta w + \Delta y^T w) \\ &\quad + \theta^2 (\Delta z^T \Delta x + \Delta y^T \Delta w)\end{aligned}$$

نحتاج لتحليل كل حد من حدود θ بشكل منفصل. من (٣.٣) نلاحظ:

$$\begin{aligned}z^T \Delta x + \Delta z^T x &= e^T (Z\Delta x + X\Delta z) \\ &= e^T (\mu e - ZXe) \\ &= \mu n - z^T x\end{aligned}$$

بنفس الطريقة ، من (٣.٣)، لدينا

$$\begin{aligned}y^T \Delta w + \Delta y^T w &= e^T (Y\Delta w + W\Delta y) \\ &= e^T (\mu e - YWe) \\ &= \mu m - y^T w\end{aligned}$$

أخيراً ، من (١.٣) و(٢.٣) ينتج لدينا :

$$\begin{aligned}\Delta z^T \Delta x + \Delta y^T \Delta w &= (A^T \Delta y - \sigma)^T \Delta x + \Delta y^T (\rho - A\Delta x) \\ &= \Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x\end{aligned}$$

بتعويض هذه المعادلات في المعادلة الأخيرة لـ $\tilde{\gamma}$ ، نحصل على

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= z^T x + y^T w + \theta\left(\mu(n+m) - \left(z^T x + y^T w\right)\right) \\ &\quad + \theta^2 \left(\Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x\right)\end{aligned}$$

حتى الآن، قمنا بترتيب $z^T x + y^T w = \gamma$ وكذلك $\mu(n+m) = \delta\gamma$. لذلك

$$\tilde{\gamma} = \left(1-(1-\delta)\theta\right)\gamma + \theta^2\left(\Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x\right)$$

يجب علينا الآن أن نبتعد عن المساواة ونعمل على التقدير. والأداة المفضلة للتقدير هي المتباينة التالية:

$$\left|v^T w\right| = \left|\sum_j v_j w_j\right| \le \sum_j \left|v_j\right|\left|w_j\right|$$

$$\le (\max_j \left|v_j\right|)(\sum_j \left|w_j\right|) = \|v\|_\infty \|w\|_1$$

هذه المتباينة هي حالة بسيطة من متباينة هولدر Holder's inequality ، ومنها نلاحظ أن

$$\left|\Delta y^T \rho\right| \le \|\rho\|_1 \|\Delta y\|_\infty \quad \text{و} \quad \left|\sigma^T \Delta x\right| \le \|\sigma\|_1 \|\Delta x\|_\infty$$

لذلك،

$$\tilde{\gamma} \le \left(1-(1-\delta)\theta\right)\gamma + \theta\left(\|\rho\|_1 \|\theta\Delta y\|_\infty + \|\sigma\|_1 \|\theta\Delta x\|_\infty\right)$$

وبعد ذلك نستخدم الاختيار المحدد لطول الخطوة θ لنحصل على حد لكل من $\|\theta\Delta y\|_\infty$ و $\|\theta\Delta x\|_\infty$.

من(٥.٣) نستنتج

$$\theta \le \frac{r}{\left\|X^{-1}\Delta x\right\|_\infty} \le \frac{x_j}{\left|\Delta x_j\right|} \quad for\ all\ j$$

لذلك

$$\|\theta\Delta x\|_\infty \le \|x\|_\infty$$

و بنفس الطريقة

$$\|\theta\Delta y\|_\infty \le \|y\|_\infty$$

إذا افترضنا أن الحدود $\|x\|_\infty$ و $\|y\|_\infty$ محدودة بعدد حقيقي كبير M ، حيث x و y هما متتاليتا المتجهات المستخرجة من خوارزمية تابع المسار فبالتالي نستطيع تقدير المتممة الجديدة على أنها:

$$\tilde{\gamma} \le \big(1-(1-\delta)\theta\big)\gamma + M\,\|\rho\|_1 + M\,\|\sigma\|_1 .$$

والآن سوف ندرس قاعدة التوقف stopping criteria نضع $\varepsilon > 0$ عدداً تحمّلياً موجباً صغيراً، ونضع $M < \infty$ عدداً تحمّلياً منتهياً كبيراً. إذا أصبحت $\|x\|_\infty$ أكبر من M نتوقف ونوضح أن المسألة الأساسية غير محدودة. وإذا أصبح $\|y\|_\infty$ أكبر من M نتوقف ونوضح أن المسألة الثنائية غير محدودة. وفي النهاية إذا كان $\|\rho\|_1 < \varepsilon,\ \|\sigma\|_1 < \varepsilon$ و $\gamma < \varepsilon$ ، نتوقف ونوضح أن الحل الحالي هو الأمثل (ضمن نطاق التحمّل الصغير).

بما أن مقياس المتممة هو γ ، والمتممة تتعلق بالفجوة الثنائية duality gap، فإنه من المتوقع أن قيمة صغيرة لـ γ يجب أن تترجم إلى فجوة ثنائية صغيرة. وهذا حاصل فعلاً. فمن تعريف γ,σ و ρ نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned}\gamma &= z^T x + y^T w\\ &= (\sigma + A^T y - c)^T x + y^T (b - Ax - \rho)\\ &= b^T y - c^T x + \sigma^T x - \rho^T y\end{aligned}$$

سوف نستخدم متباينة هولدر Holder inequality لحد بعض هذه الحدود، نستطيع تقدير الفجوة الثنائية:

$$\begin{aligned}\left|b^T y - c^T x\right| &\le \gamma + \left|\sigma^T x\right| + \left|y^T \rho\right|\\ &\le \gamma + \|\sigma\|_1 \|x\|_\infty + \|\rho\|_1 \|y\|_\infty\end{aligned}$$

والآن إذا كانت كل من γ ، $\|\sigma\|_1$ و $\|\rho\|_1$ صغيرة وكانت $\|x\|_\infty$ و $\|y\|_\infty$ ليست كبيرة جداً تصبح الفجوة الثنائية صغيرة. هذا التقدير يوضح لنا أن لا نتوقع أن الفجوة الثنائية تصبح صغيرة إلى أن تصبح المسألة الأساسية والثنائية قريبة جداً من منطقة الحلول المسموح بها. وتؤكد التطبيقات الفعلية هذا التوقع.

سوف نتطرق الآن إلى مقدار التحسن في خوارزمية تابع المسار من خلال عدة دورات.

الآن نضع $\rho^{(k)}, \sigma^{(k)}, \gamma^{(k)}, \theta^{(k)}$ ، لترمز لقيمة هذه الكميات عند الدورة k th . النظرية التالية توضح الأداء العام للخوارزمية:

نظرية ٢.٣

نفترض أن هناك عدداً حقيقياً $t > 0$ ، وعدداً حقيقياً $M < \infty$ ، و العدد الصحيح K حيث أنه لكل $k \le K$

$$\theta^{(k)} \ge t, \quad \left\|x^{(k)}\right\|_\infty \le M, \quad \left\|y^{(k)}\right\|_\infty \le M.$$

فإنه يوجد عدد ثابت $\bar{M} < \infty$ بحيث

$$\left\|\rho^{(k)}\right\|_1 \le (1-t)^k \left\|\rho^{(0)}\right\|_1, \quad \left\|\sigma^{(k)}\right\|_1 \le (1-t)^k \left\|\sigma^{(0)}\right\|, \quad \gamma^{(k)} \le (1-\tilde{t})^k \bar{M},$$

لكل $k \le K$ حيث

$$\tilde{t} = t(1-\delta).$$

البرهان: إنظر [Wr].

إن النظرية أعلاه هي إثبات جزئي للتقارب. لأنها تعتمد على افتراض أن أطوال الخطوة تبقى محدودة وبعيدة عن الصفر. ولتكون أطوال الخطوة بعيدة عن الصفر هذا يتطلب تعديل الخوارزمية، بحيث تكون نقطة البداية مختارة بدقة. إن هذه التفاصيل تقنية ولذلك حذفت. (انظر المراجع).

تمارين الباب الثالث

١.٣ بالبدء من $(x,w,y,z)=(e,e,e,e)$ ، وباستخدام $\delta=1/10$ و $r=9/10$ ، حيث $e=[1,1,\ldots,1]^T$ احسب (x,w,y,z) بعد خطوة واحدة من خوارزمية تابع المسار للمسائل التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 3x_1+2x_2+3x_3 \\ \text{subject to} & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_i \ge 0 \qquad i=1,2,3$$

٢.٣ أعد السؤال السابق للمسألة التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & z=-4x_1-3x_2+12x_3 \\ \text{subject to} & \\ & -2x_1-3x_2+12x_3 \le -5 \\ & -x_1+x_2+3x_3 \le -3 \\ & x \ge 0 \end{array}$$

٣.٣ أعد السؤال السابق للمسألة التالية:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 5x_1+6x_2+9x_3+8x_4 \\ \text{subject to} & \\ & x_1+2x_2+3x_3+x_4 \le 5 \\ & x_1+x_2+2x_3+3x_4 \le 3 \\ & x_1,x_2,x_3,x_4 \ge 0 \end{array}$$

٤.٣ بالبدء من $(x,w,y,z)=(e,e,e,e)$ ، وباستخدام $\delta=1/10$ و $r=9/10$ ، حيث $e=[1,1,\ldots,1]^T$ احسب (x,w,y,z) بعد خطوة واحدة من خوارزمية تابع المسار للمسائل التالية:

$$\text{maximize} \qquad 3x_1+4x_2+x_3+7x_4$$

subject to

$$\begin{aligned} &8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \le 7 \\ &2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \le 3 \\ &x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \le 8 \\ &x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

٥.٣ ضع $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) : \mu \ge 0\}$ تدل على المسار الأوسط. أثبت أن:

$$\lim_{\mu\to\infty} b^T y_\mu - c^T x_\mu = \infty$$

٦.٣ باعتبار مسألة البرمجة الخطية التي منطقة الحلول المسموح بها محدودة وغير خالية من الداخل. استعمل نتيجة التمرين ٥.٣ لإثبات أن المسائل الثنائية لمجموعة الحلول المسموح بها غير محدودة.