الباب الأول

البرمجة الخطية
Linear Programming

• مقدمة • بعض نماذج البرمجة الخطية • المجموعات المحدبة • فوق المستوى ونصف الفضاء • المخروطات المحدبة • مخروط المنطقة المضلعة • النقاط الحدية • الحل الهندسي • الصياغة القياسية للبرنامج الخطي • الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي.

١.١ مقدمة Introduction

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محدده تسمى دالة الهدف objective function، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات. هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود constraints. ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

مثال ١.١

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && z = x_1^2 + x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 - x_2 = 3 \\ & && x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

إن هذه المسألة هي مسألة برمجه رياضية أو أمثلة Optimization فيها دالة الهدف z ، والمتغيرات هما x_1 و x_2 ، وهما مقيدان بالشرطين المذكورين آنفاً. إنه من المرغوب فيه إيجاد قيم x_1 و x_2 التي تخفّض من قيمة دالة الهدف، ضمن القيود المعطاة.

إن الصياغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\text{optimize} \quad z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\text{subject to} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \quad \left\{\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix}\right.$$

حيث optimize تعني الحل الأفضل أو الأمثل، وهي إما أن تكون minimize تصغير كتقليل تكلفة إنتاج منتج معين أو maximize تكبير كتعظيم ربح شركة في منتج معين.

يعتبر علم البرمجة من العلوم الحديثة، فقبل عام ١٩٤٠م لم يكن هناك طرق كثيرة لحل البرامج الرياضية في عدة متغيرات. ولكن وبعد ظهور الحاسب الآلي ظهرت طرائق عديدة لحل مشكلات البرمجة الرياضية. ففي الفترة ما بين

١٩٤٠- ١٩٦٠م شهد العالم تقدماً كبيراً في فرع مهم من فروع الأمثلة، وهو ما يعرف بالبرمجة الخطية. ثم بعد ذلك ظهرت طرائق لحل مسائل البرمجة الرياضية بمعظم أشكالها.

إن للبرمجة الرياضية تطبيقات عديدة وهامة في مختلف مجالات الحياة: في العلوم، الهندسة، الرياضيات، الاقتصاد، التجارة وغيرها. نذكر منها:

١. تصميم المفاعلات الكيميائية.

٢. صناعة البلاستيك مثل الـ MTBE.

٣. تصميم محركات الطائرات.

٤. تصميم المباني والجسور.

٥. مسائل النقل والإنتاج.

وهناك استخدامات للبرمجة الرياضية في فروع التحليل العددي نذكر منها:

١. ملائمة البيانات Data fitting.

٢. المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.

هذه فقط أمثلة بسيطة على التطبيقات العديدة للبرمجة الرياضية.

ولكي نعطي فكرة عن البرمجة الرياضية، نأخذ في عين الاعتبار مسألة التصميم الأفضل لبرج التقطير. إن الغرض من برج التقطير هو فصل أكبر كمية ممكنة من مركبات الخليط الداخل إلى البرج. دالة الهدف في هذا المثال والتي نود إيجاد القيمة العظمى لها هي كمية المنتج أو مقدار الربح الناتج. المتغيرات هي: معدل التدفق للخليط الداخل، مقدار تركيبة السائل والغاز لكل مركب في كل طبقة من طبقات البرج، وكذلك قياس الحرارة والضغط. هذه المتغيرات مقيدة بعدة أشكال من القيود. على سبيل المثال المركبات وكمية المادة الخام يجب أن تكون غير سالبة. كما أن درجة

الحرارة لا يمكن أن تتعدى حد معين. وهناك قيود أكثر تعقيداً توضح كيف تتكون المركبات مثل العلاقة التي تربط كمية السائل بالغاز لكل مركب، وهي $v_i = l_i\phi(t_i)$ حيث $\phi(t_i)$ دالة غير خطية. وقد يكون الوضع أكثر تعقيداً لو سمحنا لعدد من طبقات البرج أن تتغير، حيث يكون المتغير هنا عدداً طبيعياً.

إن أكثر أنواع البرامج الرياضية سهولة هي التي تكون فيها الدوال $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ خطية أي أن

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n$$

حيث أن c_i و a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$ ثوابت معلومة، تُعرف المعاملات c_i بمعاملات التكلفة cost coefficients. هذا النوع من البرامج يعرف بالبرنامج الخطي.

سوف ندرس في هذا الباب عدداً من الأساسيات المتعلقة بالبرمجة الخطية. ففي البداية سندرس بشكل مختصر بعض المسائل التطبيقية التي يمكن أن تظهر في كثير من التطبيقات العملية.

إن مسألة البرمجة الخطية عادة ما يُعبّر عنها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax \ge b \\ & x \ge 0 \end{aligned}$$

حيث x متجه من $\mathbb{R}^n$ وكذلك c. أما A فهي مصفوفة من نوع $m \times n$ و b متجه من $\mathbb{R}^m$. إن $f(x)$ تسمى دالة الهدف وهي دالة خطية و $Ax \ge b$ هي

مجموعة قيود على شكل علاقات رياضية خطية ، بالإضافة إلى ذلك هناك شرط عدم سالبية المتغيرات و المعبر عنه بـ $x \geq 0$. حيث $x \geq 0$ تعني جميع مركبات x أكبر من أو تساوي الصفر.

٢.١ بعض نماذج البرمجة الخطية

Some linear programming models

يتضمن هذا الفصل بعض النماذج التي تبين طبيعة البرمجة الخطية. وسوف تتم صياغتها بشكل رياضي مما يتيح إبراز الصياغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية. سنعطي الآن مثال تطبيقي على البرنامج الخطي ثم ننتقل إلى النماذج الخطية بعد ذلك.

مثال ٢.١

على قطعة معينة من الأرض نود أن نبني عدة مساكن، ونود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسة والبعض الآخر ذات دورين. فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وكم ينبغي أن يكون عدد النوع الآخر كي تستوعب أكبر عدد من السكان، علماً أن المعطيات مبينة في الجدول الآتي:

عدد الأدوار	تكلفة المبنى الواحد	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل مبنى	عدد السكان في المبنى الواحد	عدد المباني
5	600,000	120	800	30	x
2	200,000	60	600	12	y

جدول ١.١ : جدول يبين المعطيات اللازمة لبناء مساكن

ثم إن المبلغ المتوفر هو: 18,000,000 وساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة ومساحة الأرض الكلية تبلغ 42,000 .

إن الصياغة الرياضية لهذه المسألة هي كما يلي:

$$\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & 30x+12y \\
\text{subject to} \quad & 800x+600y \le 42,000 \\
& 120x+60y \le 4500 \\
& 600,000x+200,000y \le 18,000,000 \\
& x \ge 0, y \ge 0
\end{aligned}$$

وعند حل هذه المسألة يتبين أن الحل الأمثل يتحقق عندما $y=45,\ x=15$ ويتبقى $300m^2$ دون أن تبنى.

النموذج الأول (مسألة التغذية) The Diet Problem

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبة غذائية من قائمة تحتوي على n نوع من الأطعمة، بحيث تحتوي على كميات معينة من m نوع من الفيتامينات وتكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن. لنرمز بـ a_{ij} لكمية الفيتامين من النوع i في وحدة الطعام j ، ولنرمز بـ b_i لكمية الفيتامين من النوع i التي يجب أن تحتويها الوجبة، و لنرمز c_j لتكلفة الوحدة من الطعام j . والمطلوب هو تحديد الكمية x_j من نوع الطعام j بحيث تكون حلاً للبرنامج الآتي:

$$\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \qquad i=1,\cdots,m \\
& x_j \ge 0, \qquad j=1,\cdots,n
\end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت المعطيات كما هي مبينة في الجدول ٢.١. فإن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\
\text{subject to} \quad & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20 \\
& 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 \\
& 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

حيث x_1 تمثل عدد اللترات من الحليب و x_2 تمثل كمية اللحم بالكيلو و x_3 تمثل عدد البيض.

الفيتامين	كمية الفيتامين المتوفرة في وحدة الطعام			كمية الفيتامين التي يجب توفرها
	حليب	لحم	بيض	
A	10	15	10	20
B	100	10	10	50
C	10	100	10	10
تكلفة الوحدة	2	3	1	

جدول ٢.١ : مثال لمسألة التغذية

النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) The Production Problem

مصنع ينتج n صنفاً و يحتاج في سبيل ذلك إلى m من المواد الخام، وكل صنف يحتاج إلى كمية معينة من كل مادة خام. لنرمز بـ a_{ij} إلى كمية المادة الخام i التي تحتاجها الوحدة من الصنف j. ولتكن b_i هي الكمية المتوفرة من المادة i ولنفترض أن c_j هو ربح الوحدة من الصنف j والمطلوب هو تعيين الكمية x_j من الصنف المنتج j بحيث يتحقق مايلي:

$$\text{maximize} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \qquad i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \ge 0, \qquad j = 1, \cdots, n$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المعطيات المبينة في الجدول الآتي:

المادة الخام	كمية المادة الخام اللازم لإنتاج وحدة من الصنف			كمية المادة الخام المتوفرة
	الكرسي	الطاولة	الدولاب	
الصنوبر	3	4	2	57
السنديان	2	1	2	27
ساعات العمل	4	5	4	73
الربح في وحدة الصنف	160	210	100	

جدول ٣.١: مثال لمسألة الإنتاج

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\text{maximize} \quad 160x_1 + 210x_2 + 100x_3$$

$$\text{subject to}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\le 57 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 27 \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 &\le 73 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

حيث x_1 تمثل عدد الكراسي وx_2 تمثل عدد الطاولات وx_3 تمثل عدد الدواليب.

٣.١ المجموعات المحدبة Convex sets

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية، ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي. ولذا سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأفضل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية. سندرس في هذا الفصل بعض أساسيات التحليل المحدب. ومن ثم سنعطي فكرة عن الحل الهندسي في الفصول التالية وننتقل إلى الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

تعريف ٣.١

تدعى المجموعة الجزئية $C \subset \mathbb{R}^n$ محدبة إذا تحقق مايلي:

لكل $x_1, x_2 \in C$ و $\lambda \in [0,1]$ فإن $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$

لاحظ أن $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين x_1, x_2. وبالتالي فإن تحدب C يعني هندسياً بأنه لأي نقطتين x_1, x_2 في C فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تنتمي إلى C. إن المجموعة $\{x : Ax = b\}$ هي مجموعة محدبة وكذلك $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$ هي مجموعة محدبة. إذا كانت $K_1, K_2, \ldots, K_r$ مجموعات محدبة في $\mathbb{R}^n$ عندئذ تكون المجموعة الآتية:

$$K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_r.$$

أيضاً محدبة. المستوى H في $\mathbb{R}^n$ هو مجموعة محدبة.

٤.١ فوق المستوى ونصف الفضاء Hyperplane and halfspace

إن فوق المستوى في $\mathbb{R}^n$ هو تعميم لفكرة الخط المستقيم في $\mathbb{R}^2$ وكذلك لفكرة المستوى في $\mathbb{R}^3$.

تعريف ٤.١

فوق المستوى H في $\mathbb{R}^n$ هو مجموعة لها الشكل التالي:

$$H = \left\{x : p^T x = k\right\} \tag{١.١}$$

بحيث أن p هو متجه غير صفري في $\mathbb{R}^n$ و k عدد ثابت. إن المتجه p عمودي على H. لتكن $x_\circ \in H$ وبالتالي $px_\circ = k$ وبما أن لكل $x \in H$ يكون $px = k$ لذا بطرح المعادلتين نحصل على $p^T\left(x - x_o\right) = 0$. أي أنه يمكن تمثيل فوق المستوى H بمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة $p^T\left(x - x_o\right) = 0$ بحيث أن x_o هي أي نقطة ثابتة في H. إن فوق المستوى مجموعة محدبة.

إن فوق المستوى H يقسم $\mathbb{R}^n$ إلى منطقتين تسمى كل واحدة منهما نصف فضاء، وبالتالي فإن نصف الفضاء هو عبارة عن مجموعة النقاط التي على الشكل التالي:

$$\left\{x : p^T x \geq k\right\}$$

أيضاً من الممكن تمثيل نصف الفضاء بالمجموعة التالية:

$$\left\{x : p^T x \leq k\right\}$$

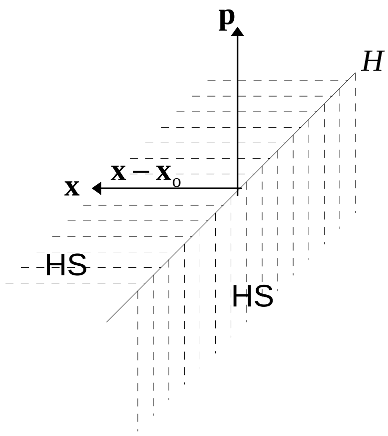
إن اتحاد المجموعتين السابقتين هو $\mathbb{R}^n$ وبالرجوع إلى النقطة الثابتة x_o فإن نصف الفضاء يمكن أن يمثل بـ

$$\left\{x : p^T\left(x - x_o\right) \geq 0\right\}$$

أو

$$\left\{x : p^T\left(x - x_o\right) \leq 0\right\}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل ١.١ : فوق المستوى ونصف الفضاء

إن فوق المستوى وأنصاف الفضاءات هي مجموعات محدبة.

٥.١ المخروطات المحدبة **Convex cones**

إن المخروطات المحدبة هي مجموعات خاصة ومهمة من المجموعات المحدبة.

تعريف ٥.١

المخروط المحدب K هو مجموعة تحقق الخاصية التالية:

$$\lambda x \in K \quad \text{لكل} \quad x \in K \quad \text{و} \quad \lambda \geq 0$$

من الملاحظ أن المخروطات المحدبة دائماً تحوي نقطة المركز وذلك بجعل $\lambda = 0$ ، وكذلك إذا أعطينا أي نقطة $x \in K$ فإن نصف المستقيم λx ينتمي إلى K . وبالتالي فإن المخروط المحدب هو عبارة عن مجموعة محدبة تتكون بشكل كامل من أنصاف مستقيمات منبعثة من المركز.

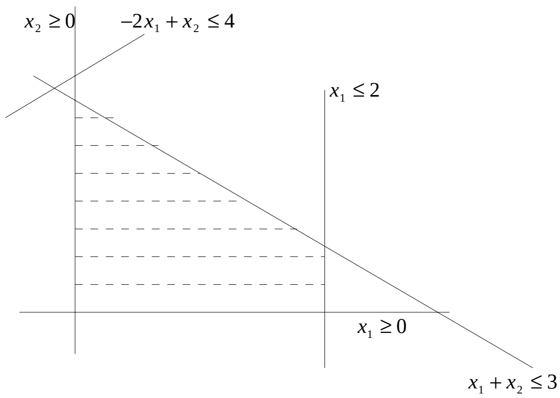
٦.١ مخروط المنطقة المضلعة Polyhedral Cones

مجموعة المنطقة المضلعة هي عبارة عن تقاطع عدد منتهي من أنصاف الفضاءات، وبما أن أنصاف الفضاءات يمكن أن تمثل بواسطة متباينات من النوع $a_i^T x \le b_i$ فإن المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بواسطة نظام متباينات من النوع $i=1,\ldots,m$ $a_i^T x \le b_i$. وبالتالي فإن مجموعة المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بالمجموعة $\{x : Ax \le b\}$ حيث A هي مصفوفة $m \times n$ ، سنعطي الآن مثالاً يوضح المنطقة المضلعة.

ليكن لدينا أنصاف الفضاءات التالية:

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 &\le 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن تقاطع الخمسة أنصاف فضاءات هذه يعطي المنطقة المخططة في الشكل التالي وهي منطقة مضلعة، من الواضح أنها منطقة محدبة.



شكل ٢.١: منطقة مضلعة

٧.١ النقاط الحدية **Extreme points**

مفهوم النقطة الحدية يلعب دوراً رئيساً في نظرية البرمجة الخطية. في البداية نعطي التعريف التالي:

تعريف ٦.١

لتكن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ نقاطاً من مجموعة C. يقال إن النقطة x هي تركيب محدب من النقاط $x_1, x_2, \ldots, x_m$ إذا أمكن كتابة x على النحو التالي:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_m x_m \qquad (٢.١)$$

حيث $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ أعداد غير سالبة وتحقق الشرط التالي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 1$$

تعريف ٧.١

يقال إن النقطة x في المجموعة المحدبة C نقطة حدية لـ C إذا لم نستطيع تمثيل x كتركيب محدب من نقطتين مختلفتين في C. أو بصياغة أخرى إذا كان $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ لكل $\lambda \in [0,1]$ وكان $x_1, x_2 \in C$ فإن $x = x_1 = x_2$.

نظرية ٨.١

إذا كانت K منطقة مضلعة محدودة وكانت $x_1, x_2, \ldots, x_m$ هي نقاطها الحدية. عندئذ يمكن كتابة أي نقطة $x \in K$ على شكل تركيب محدب من النقاط الحدية.

البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

٨.١ الحل الهندسي Geometric Solution

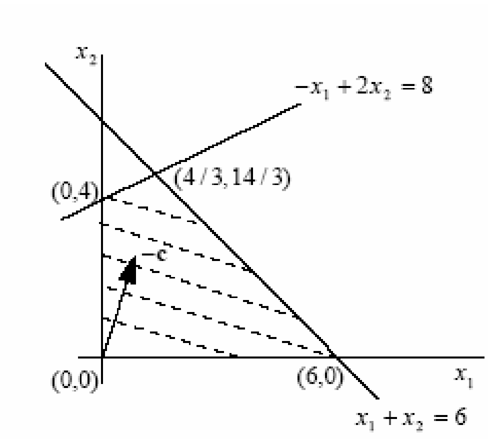
سنعالج في هذا الفصل حل البرامج الخطية البسيطة بطريقة هندسية وهذه الطريقة سوف تساعد على فهم البرنامج الخطي وطريقة حله. سنورد في البداية مثالاً يوضح طريقة الرسم وسنشرح الخطوات التي يتم إتباعها.

مثال ٩.١

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & -x_1 - 3x_2 \\ \text{subject to} & \\ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$

في البداية نحدد منطقة الحلول المسموح بها feasible solutions. وهي تلك التي تحقق المتباينات أو شروط البرنامج الخطي. لتحديد منطقة الحلول المسموح بها نرسم تلك المتباينات فنحصل على الشكل التالي:



شكل ٣.١: منطقة الحل المسموح بها

إن المنطقة المنقّطة هي منطقة الحلول المسموح بها. كما أن الشرطين الأول والثاني ممثلان بالمنطقة أسفل المستقيمين $-x_1 + 2x_2 = 8$ و $x_1 + x_2 = 6$ على الترتيب. لاحظ أن كل قيد من قيود البرنامج الخطي يمثل نصف فضاء. وأن منطقة الحلول المسموح بها هي عبارة عن تقاطع أنصاف الفضاءات الممثلة لتلك المتباينات وهي منطقة محدبة. فالحل الأفضل هو الحل الذي يحقق جميع شروط البرنامج الخطي، أي أنه حل مسموح به والذي تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل ما يمكن. وللحصول على الحل الأفضل من الرسم نجعل دالة الهدف ممثلة بالمستقيمات المتقطعة في الرسم. هذه المستقيمات تتحرك في اتجاه المتجه $-c$ حتى تصل إلى آخر حد ممكن. فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل عند تقاطع المستقيمين (١) و(٢) عند النقطة $(4/3, 14/3)$ وهي إحدى النقاط الحدية الأربعة.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية:

نظرية ١٠.١ (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{maximize (or minimize)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

subject to

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{array}\right\} \begin{array}{c} \le \\ = \\ \ge \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array}\right. \qquad (٣.١)$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = 1, \cdots, n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة. أما إذا كانت

المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة.
البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

٩.١ الصياغة القياسية للبرنامج الخطي
Canonical form for linear programming

لاحظنا من النماذج السابقة أن الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة خطية (تدعى دالة الهدف) تخضع متغيراتها لشروط خطية على شكل متباينات أو معادلات. ومهما اختلفت صياغة البرنامج الخطي فإنه يمكن التعبير عنه في كل الأحوال بالصيغة القياسية الآتية:

$$\begin{array}{ll}
\text{minimize} & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
\text{subject to} & \\
& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0, \qquad i = 1, \cdots, n
\end{array} \qquad (٤.١)$$

ونعني بذلك أن نظام المعادلات (٤.١) قياسياً (انظر الفصل ١٠.١)، والمعاملات a_{ij}, b_j, c_i هي أعداد ثابتة، بينما x_i هي المتغيرات التي يراد تعيينها. ومن الممكن التعبير عن الصيغة القياسية (٤.١) بشكل مختصر على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) = c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \ge b \\ &&& x \ge 0 \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كانت دالة الهدف تعظيمية (maximize) فيمكن إعادتها إلى دالة هدف تصغيرية (minimize) وذلك بجعل $z' = -z$.

مثال ١١.١

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z = 3x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} && \\ &&& 2x_1 - x_2 \le 1 \\ &&& 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ &&& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الذي يمكن تحويله للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && z' = -3x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} && \\ &&& 2x_1 - x_2 \le 1 \\ &&& 3x_1 + 2x_2 \le 3 \\ &&& x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

إن أعظم قيمة لـ z تقابل أصغر قيمة لـ z'. فأعظم قيمة لـ z تساوي سالب أصغر قيمة لـ z'. وللمسألتين الحل الأمثل نفسه.

١٠.١ الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي

Non Canonical form for linear programming

قبل الشروع في دراسة المسألة المعروضة نود أن نستعرض أشكالاً أخرى غير قياسية ونوضح كيفية إعادتها إلى الشكل القياسي:

المتغيرات الإضافية The Slack Variables

إذا كان البرنامج الخطي مصاغاً على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{subject to} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}$$

فإنه يمكن إعادته إلى الشكل القياسي وذلك بإدخال متغيرات جديدة

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$$

ندعوها متغيرات إضافية. عندها تتحول المتباينات إلى معادلات، مما يجعل عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات. وبالتالي لا يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات السابقة، ويكون الشكل الجديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{subject to} \\
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
&x_i \ge 0, \quad i = 1, \cdots, n+m
\end{aligned}$$

المتغيرات الزائدة Surplus Variables

هي حالة معاكسة للحالة السابقة ويكون البرنامج الخطي المصاغ على النحو التالي:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{subject to} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \ge b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \ge b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \ge b_m \\
&\quad x_i \ge 0, \qquad i = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

هذا البرنامج يمكن إعادته إلى الشكل القياسي بإدخال متغيرات جديدة نسميها متغيرات زائدة، وذلك كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{subject to} \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2 \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m \\
&\quad x_i \ge 0, \qquad i = 1, \cdots, n+m
\end{aligned}
$$

المتغيرات الحرة Free Variables

إذا كان البرنامج الخطي مكتوباً بالصياغة القياسية إلا أن أحد المتغيرات x_j لم يفترض فيه أن يكون غير سالب أي أنه متغير حر، فهناك طريقة لتحويله إلى الصيغة القياسية. نستعرضها فيما يلي:

يمكن استبدال المتغير x_j بمتغيرين جديدين غير سالبين μ_j, v_j وذلك بأن نكتب

$$x_j = \mu_j - v_j,$$

وبالتالي فإن البرنامج الخطي الآن ممثل بالمتغيرات الـ $n+1$ وهي

$$x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, \mu_j, v_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$$

وذلك بعد حذف x_j وإضافة المتغيرين μ_j, v_j غير السالبين إلى البرنامج الخطي.

تمارين الباب الأول

١.١ باستخدام واحد من المعادلات الـ m والتي معامل x_j فيها لا يساوي الصفر. على سبيل المثال

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

أوجد طريقة أخرى للتخلص من المتغير الحر x_j ؟

٢.١ شركة لإنتاج مواد البلاستيك، تريد إنتاج منتج جديد من أربع مركبات كيميائية. هذه المركبات مكونة من ثلاث مواد هي A ,B وC. نسب المواد في هذه المركبات وتكلفتها معطاة في الجدول التالي:

المركب الكيميائي	1	2	3	4
نسبة A في المركب	30	20	40	20
نسبة B في المركب	20	60	30	40
نسبة C في المركب	40	15	25	30
التكلفة/ الكيلو	20	30	20	15

المنتج الجديد يحتوي على 20٪ من مادة A. ويحتوي على الأقل 30٪ من مادة B. ويحتوي على الأقل 20٪ من ماده C. وبسبب المضاعفات الجانبية فإن نسبة المركبات 1 و2 يجب أن لاتتعدى ٢٠٪ و٣٠٪ من المنتج

الجديد على التوالي. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة.

٣.١ اعتبر المسألة التالية:

$$\begin{aligned}&\text{maximize} \quad 2x_1 + 3x_2\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 \le 2\\&\quad 4x_1 + 6x_2 \le 9\\&\quad x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

أوجد النقاط الحدية (الركنية) للمنطقة المضلعة، ثم أوجد الحل الأمثل هندسياً؟

٤.١ أثبت أنه إذا كانت المنطقة المسموح بها للبرنامج الخطي

$$\text{minimize} \quad c^T x \quad \text{subject to} \;\; Ax = b \;\; x \ge 0 ,$$

محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل متواجد عند نقطة حرجة(ركنية) من هذه المنطقة.

٥.١ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}&\text{minimize} \quad |x_1| + |x_2| + |x_3|\\&\text{subject to}\\&\quad x_1 + x_2 \le 1\\&\quad 2x_1 + x_3 = 3\end{aligned}$$