

# طرق النقطة

## الداخلية

تأليف

د. سليمان الحميدان

قسم الرياضيات والإحصاء

جامعة الملك فهد للبترول والمعادن

١٤٢٨هـ

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# طرق النقطة

## الداخلية

تأليف

د. سليمان الحميدان

قسم الرياضيات والإحصاء

جامعة الملك فهد للبترول والمعادن

١٤٢٨هـ

## Introduction

إن الكتب العربية في كثير من فروع العلوم البحتة محدودة جداً وغالبيتها لا يتجاوز الموضوعات الأساسية للعلم ومقدماته ومبادئه الأولية. وينطبق هذا على العلوم الرياضية عامة، وعلى علم الأمثلة خاصة. وحرصاً على سد جزء من ذلك الفراغ الكبير، تم إصدار هذا الكتاب. وهو كتاب متقدم لُخصت فيه مجموعة من البحوث التي كتبت حديثاً لطرق النقطة الداخلية وهو مناسب لطلاب الدراسات العليا.

عُرِضت الموضوعات المتقدمة في هذا الكتاب بشكل مبسط، ووضحت أساليب الحل فيه بحيث يسهل متابعتها، ورُبطت الأجزاء النظرية بالاستخدامات التطبيقية، وفي نهاية كل باب بُسِطت مجموعة من التمارين تساعد الباحث على استيعاب المفاهيم الرياضية والخطوات العملية بصورة أعمق، كما أنها توضح له أهمية تقنيات الأمثلة وطرق النقطة الداخلية.

تختص طرق النقطة الداخلية بحل مسائل البرمجة الخطية والبرمجة الموجبة شبه المعرفة. إن البرمجة الخطية تهتم بإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة خطية ذات  $n$  متغير حقيقي، بحيث تخضع هذه المتغيرات إلى شروط خطية على شكل متباينات أو معادلات، بينما تهتم البرمجة الموجبة شبه المعرفة بإيجاد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة خطية تكون متغيراتها على شكل مصفوفات، تخضع هذه المتغيرات إلى شروط خطية وغير خطية.

والبرمجة الخطية فرع حديث من فروع الرياضيات، كانت بدايتها الحقيقية عام ١٩٤٧م، عندما أُكتشفت طريقة عمليه لحل مسألة البرمجة الخطية عرفت باسم طريقه السمبلكس . ثم ظهرت بعد ذلك طريقة مجسم القطع الناقص عام ١٩٧٩م وهي حالة خاصة من طريقة النقطة الداخلية التي أُكتشفت عام ١٩٨٤م، والتي لاقت نجاحاً كبيراً خاصة في حل المسائل ذات الحجم الكبير. بعد ذلك وفي عام ١٩٩٠م عممت طرق النقطة الداخلية لحل مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة.

أما تطبيقات البرمجة الخطية والبرمجة الموجبة شبه المعرفة فهي عديدة وهامة، وذلك لعدة أسباب ومن أهمها: أن المختصون بالتحليل العددي يسعون للحصول على تقريب أمثل للدوال المتصلة. وشركات البترول تقوم بمزج أصناف مختلفة من البترول الخام بنسب معينة كي تضاعف أرباحها. كما أن المهندس الزراعي يهتم بتخطيط الأرض الزراعية بطريقة تعود عليه بالأرباح. ولرجال الاقتصاد اهتمامات عديدة في البرمجة الخطية ومما يدل على ذلك أنه قد منحت جائزة نوبل في الاقتصاد عام ١٩٧٥م لعالمين استخدموا البرمجة الخطية كوسيلة للتطبيق في هذا المجال. وقد ذكرت في هذا الكتاب عدداً من التطبيقات العملية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة.

نفترض في الباحث أن تكون لديه خلفية جيدة في مواد الرياضيات الأساسية على المستوى الجامعي. حيث أن هذا الكتاب صمم لكي يدرس في للدراسات العليا بعد الدراسة الجامعية، خلال فصل دراسي واحد. كما أن هذا الكتاب يُعد مدخلاً إلى مواضيع أكثر تقدماً في الأمثلة مثل البرمجة الموجبة شبه المعرفة ونظرية التحكم وغيرها.

ز

تمهيد

يتكون هذا الكتاب من تسعة أبواب تتعرض لحل مسألة البرمجة الخطية والبرمجة الموجبة شبه المعرفة بطريقة النقطة الداخلية حيث خصصنا الأبواب الأربعة الأولى للبرمجة الخطية. الباب الأول يحتوي على مقدمة عن البرمجة الخطية، والباب الثاني بينا فيه المسار الأوسط الذي هو أساس طرق النقطة الداخلية، وفي الباب الثالث والرابع شرحنا إحدى طرق النقطة الداخلية وهي طريقة تابع المسار. أما الأبواب الخمسة الأخيرة فقد خصصت للبرمجة الموجبة شبه المعرفة حيث شرحنا في الباب الخامس كيف مُدّدت طرق النقطة الداخلية من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة، ثم في الأبواب التالية شرحنا المسار الأوسط وبعض الأساسيات النظرية التي تعتمد عليها الخوارزميات في حل مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة.

أخيراً أود أن اشكر بعض من ساهم في أخراج هذا الكتاب منهم الأستاذ يوسف الزيادي الذي قام بطباعة هذا الكتاب، وأخي أستاذ اللغة العربية محمد الحميدان الذي قام بالمراجعة اللغوية، وزوجتي العزيزة التي ساعدت في صف وإخراج الكتاب.

وفي الختام أدعو الله العزيز الكريم أن أكون قد وفقت بعلمي هذا والذي أمل أن ينفع الله به ويجعل فيه ثواباً من عنده. وإن كان هناك نقص أو قصور وهذا من طبيعة عمل البشر فإني أسأل الباري عز وجل عفوه ومغفرته فالكمال لله وحده.

والله الموفق

المؤلف



٣	الباب الأول البرمجة الخطية
٣	١,١ مقدمة
٧	٢,١ بعض نماذج البرمجة الخطية
١١	٣,١ المجموعات المحدبة
١٢	٤,١ فوق المستوى ونصف الفضاء
١٣	٥,١ المخروطات المحدبة
١٤	٦,١ مخروط المنطقة المضلعة
١٥	٧,١ النقاط الحدية
١٦	٨,١ الحل الهندسي
١٨	٩,١ الصياغة القياسية للبرنامج الخطي
١٩	١٠,١ الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي
٢٢	تمارين الباب الأول
٢٥	الباب الثاني المسار الأوسط
٢٥	١,٢ مقدمة
٢٦	٢,٢ معادلة الحاجز



٢٩	٣,٢ مضاريب لاجرانج
٣٤	٤,٢ دالة لاجرانج
٣٦	٥,٢ المرتبة الثانية لشرط الأمثلية و وجود الحل
٣٩	تمارين الباب الثاني
٤١	الباب الثالث طريقة تابع المسار
٤١	١,٣ مقدمة
٤٢	٢,٣ تقدير قيمة ملائمة لوسيط دالة الحاجز
٤٤	٣,٣ حساب اتجاهات الخطوة
٤٦	٤,٣ طريقة نيوتن
٤٨	٥,٣ اختيار طول خطوة الوسيط
٥٠	٦,٣ تحليل التقارب
٥٧	تمارين الباب الثالث
٥٩	الباب الرابع نظام كاريش كون تكرر
٥٩	١,٤ مقدمة
٦٠	٢,٤ نظام KKT المخفض
٦١	٣,٤ المعادلات الناظمية
٦٣	تمارين الباب الرابع
	الباب الخامس من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة
٦٧	شبه المعرفة
٦٧	١,٥ مقدمة
٧٠	٢,٥ أهمية البرمجة الموجبة شبه المعرفة
٧٠	٣,٥ حالات خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة

ك	المحتويات
٧٢	٤,٥ التطبيقات
٧٧	٥,٥ طريقة النقطة الداخلية
٨٦	تمارين الباب الخامس
٨٩	الباب السادس الثنائية وشروط الأمثلة
٨٩	١,٦ مقدمة
٩١	٢,٦ المسائل بالشكل القياسي
٩٥	٣,٦ الثنائية القوي والضعيف
٩٨	٤,٦ مجموعة الحلول المسموح بها
١٠٢	٥,٦ شروط الأمثلة
١٠٤	تمارين الباب السادس
١٠٧	الباب السابع المسار الأوسط
١٠٧	١,٧ مقدمة
١٠٨	٢,٧ وجود وحدانية المسار الأوسط
١١٢	٣,٧ تحليل المسار الأوسط
١١٤	٤,٧ نقاط النهاية للمسار الأوسط
١١٦	تمارين الباب السابع
١١٧	الباب الثامن طريقة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية
١١٧	١,٨ مقدمة
١١٩	٢,٨ طمر المسألة ذاتية الثنائية
١٢٢	٣,٨ استراتيجية الطمر وحلها
١٢٦	٤,٨ الخوارزمية الشكلية ودالة الأوسطية
١٢٩	٥,٨ إسقاط اتجاه نيوتن لدالة الحاجز الأساسية

	ل	طرق النقطة الداخلية
١٣٤	٦,٨	اتجاه الموازنة التآلفي
١٣٦	٧,٨	السلوك قرب المسار الأوسط
١٤٠	٨,٨	تحديث وسيط المسار الأوسط
١٤٣	٩,٨	خوارزمية الثنائية
١٤٥	١٠,٨	طرق التحديث الكبيرة
١٤٨		تمارين الباب الثامن
١٥١		الباب التاسع طريقة تابع المسار
١٥١	١,٩	مقدمة
١٥٢	٢,٩	مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT
١٥٨	٣,٩	الحلول المسموح بها لخطوة NT الكاملة
١٦١	٤,٩	التقارب التريبيعي للمسار الأوسط
١٦٤	٥,٩	تحديث وسيط دالة الحاجز $\mu$
١٦٦	٦,٩	خطوة طويلة لطريقة تابع المسار
١٦٨	٧,٩	طرق التنبؤ والتصحيح
١٧١		تمارين الباب التاسع
١٧٣		الرموز
١٧٧		المراجع
١٨٤		ثبت المصطلحات
١٩٣		كشاف المواضيع

# **Linear Programming**



## Linear Programming

- مقدمة • بعض نماذج البرمجة الخطية • المجموعات المحدبة • فوق المستوى ونصف الفضاء • المخروطات المحدبة • مخروط المنطقة المضلعة • النقاط الحدية • الحل الهندسي • الصياغة القياسية للبرنامج الخطي • الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي.

### 1.1 مقدمة Introduction

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محددته تسمى دالة الهدف objective function ، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات. هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها ، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود constraints. ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

## مثال ١.١

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1^2 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

إن هذه المسألة هي مسألة برمجته رياضية أو أمثلة Optimization فيها دالة الهدف  $z$ ، والمتغيرات هما  $x_1$  و  $x_2$ ، وهما مقيدان بالشرطين المذكورين آنفاً. إنه من المرغوب فيه إيجاد قيم  $x_1$  و  $x_2$  التي تخفّض من قيمة دالة الهدف، ضمن القيود المعطاة.

إن الصياغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \text{optimize} \quad & z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{subject to} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right.$$

حيث optimize تعني الحل الأفضل أو الأمثل، وهي إما أن تكون minimize تصغير كتقليل تكلفة إنتاج منتج معين أو maximize تكبير كتعظيم ربح شركة في منتج معين.

يعتبر علم البرمجة من العلوم الحديثة، فقبل عام ١٩٤٠م لم يكن هناك طرق كثيرة لحل البرامج الرياضية في عدة متغيرات. ولكن وبعد ظهور الحاسب الآلي ظهرت طرائق عديدة لحل مشكلات البرمجة الرياضية. ففي الفترة ما بين

١٩٤٠ - ١٩٦٠م شهد العالم تقدماً كبيراً في فرع مهم من فروع الأمثلة، وهو ما يعرف بالبرمجة الخطية. ثم بعد ذلك ظهرت طرائق لحل مسائل البرمجة الرياضية بمعظم أشكالها.

إن للبرمجة الرياضية تطبيقات عديدة وهامة في مختلف مجالات الحياة: في العلوم، الهندسة، الرياضيات، الاقتصاد، التجارة وغيرها. نذكر منها:

١. تصميم المفاعلات الكيميائية.

٢. صناعة البلاستيك مثل الـ MTBE.

٣. تصميم محركات الطائرات.

٤. تصميم المباني والجسور.

٥. مسائل النقل والإنتاج.

وهناك استخدامات للبرمجة الرياضية في فروع التحليل العددي نذكر منها:

١. ملائمة البيانات Data fitting.

٢. المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.

هذه فقط أمثلة بسيطة على التطبيقات العديدة للبرمجة الرياضية.

ولكي نعطي فكرة عن البرمجة الرياضية، نأخذ في عين الاعتبار مسألة التصميم الأفضل لبرج التقطير. إن الغرض من برج التقطير هو فصل أكبر كمية ممكنة من مركبات الخليط الداخل إلى البرج. دالة الهدف في هذا المثال والتي نود إيجاد القيمة العظمى لها هي كمية المنتج أو مقدار الربح الناتج. المتغيرات هي: معدل التدفق للخليط الداخل، مقدار تركيبة السائل والغاز لكل مركب في كل طبقة من طبقات البرج، وكذلك قياس الحرارة والضغط. هذه المتغيرات مقيدة بعدة أشكال من القيود. على سبيل المثال المركبات وكمية المادة الخام يجب أن تكون غير سالبة. كما أن درجة



الحرارة لا يمكن أن تتعدى حد معين. وهناك قيود أكثر تعقيداً توضح كيف تتكون المركبات مثل العلاقة التي تربط كمية السائل بالغاز لكل مركب، وهي  $v_i = l_i \phi(t_i)$  حيث  $\phi(t_i)$  دالة غير خطية. وقد يكون الوضع أكثر تعقيداً لو سمحنا لعدد من طبقات البرج أن تتغير، حيث يكون المتغير هنا عدداً طبيعياً. إن أكثر أنواع البرامج الرياضية سهولة هي التي تكون فيها الدوال

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ (} i=1, 2, \dots, m \text{) خطية أي أن}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

حيث أن  $c_i$  و  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$ ) ثوابت معلومة، تُعرف المعاملات  $c_i$  بمعاملات التكلفة cost coefficients. هذا النوع من البرامج يعرف بالبرنامج الخطي.

سوف ندرس في هذا الباب عدداً من الأساسيات المتعلقة بالبرمجة الخطية. ففي البداية سندرس بشكل مختصر بعض المسائل التطبيقية التي يمكن أن تظهر في كثير من التطبيقات العملية.

إن مسألة البرمجة الخطية عادة ما يُعبّر عنها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) = c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b \\ &&& x \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x$  متجه من  $\mathbb{R}^n$  وكذلك  $c$ . أما  $A$  فهي مصفوفة من نوع  $m \times n$  و  $b$  متجه من  $\mathbb{R}^m$ . إن  $f(x)$  تسمى دالة الهدف وهي دالة خطية و  $Ax \geq b$  هي

مجموعة قيود على شكل علاقات رياضية خطية، بالإضافة إلى ذلك هناك شرط عدم سالبية المتغيرات و المعبر عنه بـ  $x \geq 0$ . حيث  $x \geq 0$  تعني جميع مركبات  $x$  أكبر من أو تساوي الصفر.

## ٢.١ بعض نماذج البرمجة الخطية

### Some linear programming models

يتضمن هذا الفصل بعض النماذج التي تبين طبيعة البرمجة الخطية. وسوف تتم صياغتها بشكل رياضي مما يتيح إبراز الصياغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية. سنعطي الآن مثال تطبيقي على البرنامج الخطي ثم نتقل إلى النماذج الخطية بعد ذلك.

#### مثال ٢.١

على قطعة معينة من الأرض نود أن نبني عدة مساكن، ونود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسة والبعض الآخر ذات دورين. فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وكم ينبغي أن يكون عدد النوع الآخر كي تستوعب أكبر عدد من السكان، علماً أن المعطيات مبينة في الجدول الآتي:

عدد الأدوار	تكلفة المبنى الواحد	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل مبنى	عدد السكان في المبنى الواحد	عدد المباني
5	600,000	120	800	30	$x$
2	200,000	60	600	12	$y$

جدول ١.١: جدول يبين المعطيات اللازمة لبناء مساكن

ثم إن المبلغ المتوفر هو: 18,000,000 وساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة ومساحة الأرض الكلية تبلغ 42,000.

إن الصياغة الرياضية لهذه المسألة هي كما يلي:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & 30x + 12y \\ \text{subject to} \quad & 800x + 600y \leq 42,000 \\ & 120x + 60y \leq 4500 \\ & 600,000x + 200,000y \leq 18,000,000 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

وعند حل هذه المسألة يتبين أن الحل الأمثل يتحقق عندما  $x = 15$ ,  $y = 45$  ويتبقى  $300m^2$  دون أن تبني.

### النموذج الأول (مسألة التغذية) The Diet Problem

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبة غذائية من قائمة تحتوي على  $n$  نوع من الأطعمة، بحيث تحتوي على كميات معينة من  $m$  نوع من الفيتامينات وتكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن. لنرمز بـ  $a_{ij}$  لكمية الفيتامين من النوع  $i$  في وحدة الطعام  $j$ ، ولنرمز بـ  $b_i$  لكمية الفيتامين من النوع  $i$  التي يجب أن تحتويها الوجبة، ولنرمز بـ  $c_j$  لتكلفة الوحدة من الطعام  $j$ . والمطلوب هو تحديد الكمية  $x_j$  من نوع الطعام  $j$  بحيث تكون حلاً للبرنامج الآتي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال إذا كانت المعطيات كما هي مبينة في الجدول ٢.١. فإن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{subject to} \quad & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20 \\ & 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 \\ & 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x_1$  تمثل عدد اللترات من الحليب و  $x_2$  تمثل كمية اللحم بالكيلو و  $x_3$  تمثل عدد البيض.

كمية الفيتامين التي يجب توفرها	المتوفرة في وحدة الطعام			الفيتامين
	بيض	لحم	حليب	
20	10	15	10	A
50	10	10	100	B
10	10	100	10	C
	1	3	2	تكلفة الوحدة

جدول ٢.١: مثال لمسألة التغذية

### النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) The Production Problem

مصنع ينتج  $n$  صنفاً ويحتاج في سبيل ذلك إلى  $m$  من المواد الخام، وكل صنف يحتاج إلى كمية معينة من كل مادة خام. لنرمز بـ  $a_{ij}$  إلى كمية المادة الخام  $i$  التي تحتاجها الوحدة من الصنف  $j$ . ولتكن  $b_i$  هي الكمية المتوفرة من المادة  $i$  ولنفترض أن  $c_j$  هو ربح الوحدة من الصنف  $j$  والمطلوب هو تعيين الكمية  $x_j$  من الصنف المنتج  $j$  بحيث يتحقق مايلي:

طرق النقطة الداخلية

١٠

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ &\text{subject to} && \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &&& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المعطيات المبينة في الجدول الآتي:

كمية المادة الخام المتوفرة	اللازم لإنتاج وحدة من الصنف			المادة الخام
	الدولاب	الطاولة	الكرسي	
57	2	4	3	الصنوبر
27	2	1	2	السنديان
73	4	5	4	ساعات العمل
	100	210	160	الربح في وحدة الصنف

جدول ٣.١: مثال لمسألة الإنتاج

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 160x_1 + 210x_2 + 100x_3 \\ &\text{subject to} && 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 57 \\ &&& 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 27 \\ &&& 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 73 \\ &&& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x_1$  تمثل عدد الكراسي و  $x_2$  تمثل عدد الطاولات و  $x_3$  تمثل عدد الدواليب.

### ٣.١ المجموعات المحدبة Convex sets

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية، ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي. ولذا سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكنا من معرفة الحل الأفضل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية. سندرس في هذا الفصل بعض أساسيات التحليل المحدب. ومن ثم سنعطي فكرة عن الحل الهندسي في الفصول التالية وننتقل إلى الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

#### تعريف ٣.١

تدعى المجموعة الجزئية  $C \subset \mathbb{R}^n$  محدبة إذا تحقق مايلي:

لكل  $x_1, x_2 \in C$  و  $\lambda \in [0,1]$  فإن  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$

لاحظ أن  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$  تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين  $x_1, x_2$ . وبالتالي فإن تحدب  $C$  يعني هندسياً بأنه لأي نقطتين  $x_1, x_2$  في  $C$  فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تنتمي إلى  $C$ . إن المجموعة  $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$  هي مجموعة محدبة وكذلك  $\{x : Ax = b, x \geq 0\}$  هي مجموعة محدبة. إذا كانت  $K_1, K_2, \dots, K_r$  مجموعات محدبة في  $\mathbb{R}^n$  عندئذ تكون المجموعة الآتية:

$$K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$$

أيضاً محدبة. المستوى  $H$  في  $\mathbb{R}^n$  هو مجموعة محدبة.

### ٤.١ فوق المستوى ونصف الفضاء Hyperplane and halfspace

إن فوق المستوى في  $\mathbb{R}^n$  هو تعميم لفكرة الخط المستقيم في  $\mathbb{R}^2$  وكذلك لفكرة المستوى في  $\mathbb{R}^3$ .

#### تعريف ٤.١

فوق المستوى  $H$  في  $\mathbb{R}^n$  هو مجموعة لها الشكل التالي:

$$H = \{x : p^T x = k\} \quad (١.١)$$

بحيث أن  $p$  هو متجه غير صفري في  $\mathbb{R}^n$  و  $k$  عدد ثابت. إن المتجه  $p$  عمودي على  $H$ . لتكن  $x_0 \in H$  وبالتالي  $p x_0 = k$  وبما أن لكل  $x \in H$  يكون  $p x = k$  لذا بطرح المعادلتين نحصل على  $p^T (x - x_0) = 0$ . أي أنه يمكن تمثيل فوق المستوى  $H$  بمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة  $p^T (x - x_0) = 0$  بحيث أن  $x_0$  هي أي نقطة ثابتة في  $H$ . إن فوق المستوى مجموعة محدبة. إن فوق المستوى  $H$  يقسم  $\mathbb{R}^n$  إلى منطقتين تسمى كل واحدة منهما نصف فضاء، وبالتالي فإن نصف الفضاء هو عبارة عن مجموعة النقاط التي على الشكل التالي:

$$\{x : p^T x \geq k\}$$

أيضاً من الممكن تمثيل نصف الفضاء بالمجموعة التالية:

$$\{x : p^T x \leq k\}$$

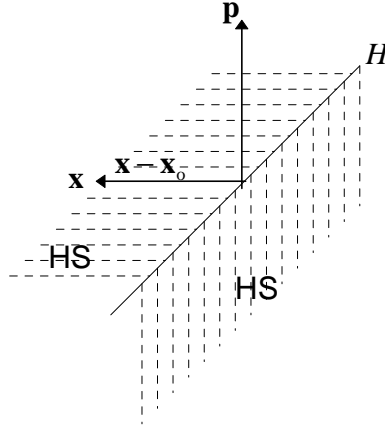
إن اتحاد المجموعتين السابقتين هو  $\mathbb{R}^n$  وبالرجوع إلى النقطة الثابتة  $x_0$  فإن نصف الفضاء يمكن أن يمثل بـ

$$\{x : p^T (x - x_0) \geq 0\}$$

أو

$$\{x : p^T (x - x_0) \leq 0\}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل ١.١: فوق المستوى ونصف الفضاء

إن فوق المستوى وأنصاف الفضاءات هي مجموعات محدبة.

### ٥.١ المخروطات المحدبة Convex cones

إن المخروطات المحدبة هي مجموعات خاصة ومهمة من المجموعات المحدبة.

#### تعريف ٥.١

المخروط المحدب  $K$  هو مجموعة تحقق الخاصية التالية:

$$\lambda x \in K \text{ لكل } x \in K \text{ و } \lambda \geq 0$$

من الملاحظ أن المخروطات المحدبة دائماً تحوي نقطة المركز وذلك يجعل  $\lambda = 0$  ، وكذلك إذا أعطينا أي نقطة  $x \in K$  فإن نصف المستقيم  $\lambda x$  ينتمي إلى  $K$ . وبالتالي فإن المخروط المحدب هو عبارة عن مجموعة محدبة تتكون بشكل كامل من أنصاف مستقيمتان منبعثة من المركز.



### ٦.١ مخروط المنطقة المضلعة Polyhedral Cones

مجموعة المنطقة المضلعة هي عبارة عن تقاطع عدد منتهى من أنصاف الفضاءات، وبما أن أنصاف الفضاءات يمكن أن تمثل بواسطة متباينات من النوع  $a_i^T x \leq b_i$  فإن المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بواسطة نظام متباينات من النوع  $a_i^T x \leq b_i \quad i=1, \dots, m$ . وبالتالي فإن مجموعة المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بالمجموعة  $\{x : Ax \leq b\}$  حيث  $A$  هي مصفوفة  $m \times n$ ، سنعطي الآن مثالاً يوضح المنطقة المضلعة.

ليكن لدينا أنصاف الفضاءات التالية:

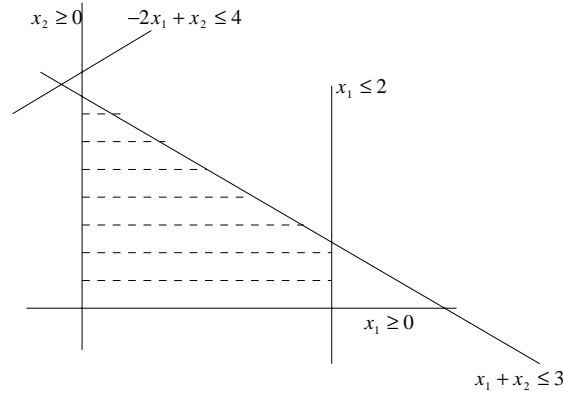
$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

إن تقاطع الخمسة أنصاف فضاءات هذه يعطي المنطقة المخططة في الشكل التالي وهي منطقة مضلعة، من الواضح أنها منطقة محدبة.



شكل ٢.١: منطقة مضلعة

### ٧.١ النقاط الحدية Extreme points

مفهوم النقطة الحدية يلعب دوراً رئيساً في نظرية البرمجة الخطية. في

البداية نعطي التعريف التالي:

#### تعريف ٦.١

لتكن  $x_1, x_2, \dots, x_m$  نقاطاً من مجموعة  $C$ . يقال إن النقطة  $x$  هي تركيب محدب من النقاط  $x_1, x_2, \dots, x_m$  إذا أمكن كتابة  $x$  على النحو

التالي:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \quad (٢.١)$$

حيث  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  أعداد غير سالبة وتحقق الشرط التالي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$$

#### تعريف ٧.١

يقال إن النقطة  $x$  في المجموعة المحدبة  $C$  نقطة حدية لـ  $C$  إذا لم نستطيع تمثيل  $x$  كتركيب محدب من نقطتين مختلفتين في  $C$ . أو بصياغة أخرى إذا كان  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  لكل  $\lambda \in [0, 1]$  وكان  $x_1, x_2 \in C$  فإن  $x = x_1 = x_2$ .

#### نظرية ٨.١

إذا كانت  $K$  منطقة مضلعة محدودة وكانت  $x_1, x_2, \dots, x_m$  هي نقاطها الحدية. عندئذ يمكن كتابة أي نقطة  $x \in K$  على شكل تركيب محدب من النقاط الحدية.

البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

## ٨.١ الحل الهندسي Geometric Solution

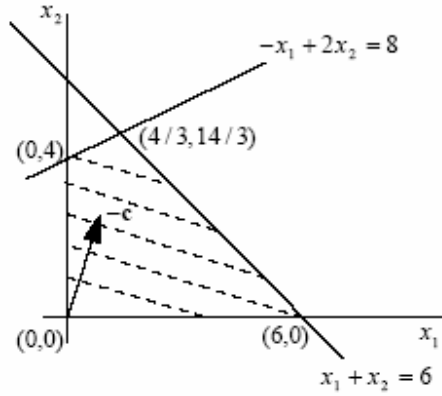
سنعالج في هذا الفصل حل البرامج الخطية البسيطة بطريقة هندسية وهذه الطريقة سوف تساعد على فهم البرنامج الخطي وطريقة حله. سنورد في البداية مثالاً يوضح طريقة الرسم وسنشرح الخطوات التي يتم إتباعها.

### مثال ٩.١

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -x_1 - 3x_2 \\ &\text{subject to} && x_1 + x_2 \leq 6 \\ & && -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

في البداية نحدد منطقة الحلول المسموح بها feasible solutions. وهي تلك التي تحقق المتباينات أو شروط البرنامج الخطي. لتحديد منطقة الحلول المسموح بها نرسم تلك المتباينات فنحصل على الشكل التالي:



شكل ٣.١: منطقة الحل المسموح بها

إن المنطقة المنقطة هي منطقة الحلول المسموح بها. كما أن الشرطين الأول والثاني ممثلان بالمنطقة أسفل المستقيمين  $-x_1 + 2x_2 = 8$  و  $x_1 + x_2 = 6$  على الترتيب. لاحظ أن كل قيد من قيود البرنامج الخطي يمثل نصف فضاء. وأن منطقة الحلول المسموح بها هي عبارة عن تقاطع أنصاف الفضاءات الممثلة لتلك المتباينات وهي منطقة محدبة. فالحل الأفضل هو الحل الذي يحقق جميع شروط البرنامج الخطي، أي أنه حل مسموح به والذي تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل ما يمكن. وللحصول على الحل الأفضل من الرسم نجعل دالة الهدف ممثلة بالمستقيمات المتقطعة في الرسم. هذه المستقيمات تتحرك في اتجاه المتجه  $-c$  حتى تصل إلى آخر حد ممكن. فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل عند تقاطع المستقيمين (١) و(٢) عند النقطة  $(4/3, 14/3)$  وهي إحدى النقاط الحدية الأربعة.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية:

### نظرية ١٠.١ (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{maximize (or minimize)} \quad z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

subject to

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة. أما إذا كانت

المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة.  
البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

### ٩.١ الصياغة القياسية للبرنامج الخطي

#### Canonical form for linear programming

لاحظنا من النماذج السابقة أن الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة خطية (تدعى دالة الهدف) تخضع متغيراتها لشروط خطية على شكل متباينات أو معادلات. ومهما اختلفت صياغة البرنامج الخطي فإنه يمكن التعبير عنه في كل الأحوال بالصيغة القياسية الآتية:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
 &&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (٤.١) \\
 &&& \vdots \\
 &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

ونعني بذلك أن نظام المعادلات (٤.١) قياسياً (انظر الفصل (١٠.١))، والمعاملات  $a_{ij}, b_j, c_i$  هي أعداد ثابتة، بينما  $x_i$  هي المتغيرات التي يراد تعيينها. ومن الممكن التعبير عن الصيغة القياسية (٤.١) بشكل مختصر على النحو التالي:

البرمجة الخطية

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) = c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b \\ &&& x \geq 0 \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كانت دالة الهدف تعظيمية (maximize) فيمكن إعادةتها إلى دالة هدف تصغيرية (minimize) وذلك بجعل  $z' = -z$ .

## مثال ١١.١

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && z = 3x_1 - 2x_2 \\ &\text{subject to} && \\ &&& 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ &&& 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الذي يمكن تحويله للبرنامج التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && z' = -3x_1 + 2x_2 \\ &\text{subject to} && \\ &&& 2x_1 - x_2 \leq 1 \\ &&& 3x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ &&& x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

إن أعظم قيمة لـ  $z$  تقابل أصغر قيمة لـ  $z'$ . فأعظم قيمة لـ  $z$  تساوي سالب أصغر قيمة لـ  $z'$ . وللمسألتين الحل الأمثل نفسه.

## ١٠.١ الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي

**Non Canonical form for linear programming**

قبل الشروع في دراسة المسألة المعروضة نود أن نستعرض أشكالاً أخرى

غير قياسية ونوضح كيفية إعادةتها إلى الشكل القياسي:

**المتغيرات الإضافية The Slack Variables**

إذا كان البرنامج الخطي مصاغاً على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\text{subject to} && \\ &&& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ &&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \\ &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

فإنه يمكن إعادته إلى الشكل القياسي وذلك بإدخال متغيرات جديدة

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$$

ندعوها متغيرات إضافية. عندها تتحول المتباينات إلى معادلات، مما يجعل عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات. وبالتالي لا يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات

السابقة، ويكون الشكل الجديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ &\text{subject to} && \\ &&& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ &&& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\ &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+m \end{aligned}$$

**المتغيرات الزائدة Surplus Variables**

هي حالة معاكسة للحالة السابقة ويكون البرنامج الخطي المصاغ على النحو

التالي:

البرمجة الخطية

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{subject to} \end{aligned}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geq b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

هذا البرنامج يمكن إعادته إلى الشكل القياسي بإدخال متغيرات جديدة نسميها متغيرات زائدة، وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ &\text{subject to} \end{aligned}$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n - x_{n+1} = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n - x_{n+2} = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n - x_{n+m} = b_m$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n+m$$

### المتغيرات الحرة Free Variables

إذا كان البرنامج الخطي مكتوباً بالصياغة القياسية إلا أن أحد المتغيرات  $x_j$  لم يفترض فيه أن يكون غير سالب أي أنه متغير حر، فهناك طريقة لتحويله إلى الصيغة القياسية. نستعرضها فيما يلي:

يمكن استبدال المتغير  $x_j$  بمتغيرين جديدين غير سالبين  $\mu_j, V_j$  وذلك بأن نكتب

$$x_j = \mu_j - V_j,$$

وبالتالي فإن البرنامج الخطي الآن ممثل بالمتغيرات الـ  $n+1$  وهي



$$x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \mu_j, \nu_j, x_{j+1}, \dots, x_n$$

وذلك بعد حذف  $x_j$  وإضافة المتغيرين  $\mu_j, \nu_j$  غير السالبين إلى البرنامج الخطي.

### تمارين الباب الأول

١.١ باستخدام واحد من المعادلات الـ  $m$  والتي معامل  $x_j$  فيها لا يساوي

الصفر. على سبيل المثال

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

أوجد طريقة أخرى للتخلص من المتغير الحر  $x_j$  ؟

٢.١ شركة لإنتاج مواد البلاستيك، تريد إنتاج منتج جديد من أربع مركبات

كيميائية. هذه المركبات مكونة من ثلاث مواد هي A، B، و C. نسب

المواد في هذه المركبات وتكلفتها معطاة في الجدول التالي:

المركب الكيميائي	1	2	3	4
نسبة A في المركب	30	20	40	20
نسبة B في المركب	20	60	30	40
نسبة C في المركب	40	15	25	30
التكلفة/ الكيلو	20	30	20	15

المنتج الجديد يحتوي على 20% من مادة A. ويحتوي على الأقل 30% من

مادة B. ويحتوي على الأقل 20% من مادة C. وبسبب المضاعفات الجانبية

فإن نسبة المركبات 1 و 2 يجب أن لا تتعدى 20% و 30% من المنتج

الجديد على التوالي. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة.

٣.١ اعتبر المسألة التالية:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{subject to} && \\ &&& x_1 + x_2 \leq 2 \\ &&& 4x_1 + 6x_2 \leq 9 \\ &&& x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

أوجد النقاط الحدية (الركنية) للمنطقة المضلعة، ثم أوجد الحل الأمثل هندسياً؟

٤.١ أثبت أنه إذا كانت المنطقة المسموح بها للبرنامج الخطي

$$\text{minimize} \quad c^T x \quad \text{subject to} \quad Ax = b \quad x \geq 0,$$

محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل متواجد عند نقطة حرجة (ركنية) من هذه المنطقة.

٥.١ أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ &\text{subject to} && \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 \leq 1 \\ &2x_1 + x_3 = 3 \end{aligned}$$



## The Central Path

- مقدمة • معادلة الحاجز •
- مضاريب لاجرانج • دالة لاجرانج •
- المرتبة الثانية لشرط الأمثلية ووجود  
الحل

### 1.2 مقدمة Introduction

في هذا الباب سوف ندرس الأسلوب الأبسط والبدليل لحل مسائل البرمجة الخطية. والخوارزمية التي نحن بصدد شرحها تسمى طريقة تابع المسار path-following method. وهي تنتمي إلى صنف الطرق التي تسمى طرق النقطة الداخلية interior-point methods. إن طريقة النقطة الداخلية هي الطريقة الأسهل والأكثر طبيعية بين جميع الطرق من هذا الصنف. وقبل البدء في شرح هذه الطريقة، يجب أن نشرح المسار الذي يظهر في مسمى هذه الطريقة. هذا المسار يسمى المسار الأوسط central path وهو موضوع هذا الباب. وقبل مناقشة وشرح المسار الأوسط يجب وضع بعض الأسس عن طريق تحليل مسألة غير

خطية والتي تسمى مسألة الحاجز barrier problem المرتبطة بمسائل البرمجة الخطية التي نحن بصدد حلها.

## ٢.٢ معادلة الحاجز The Barrier Equation

في هذا الفصل، سوف نعتبر مسألة البرمجة الخطية الأساسية prime مع

قيود متباينة و متغيرات غير سالبة كالتالي:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & f(x) = c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

إن المسألة الثنائية dual المقابلة لها هي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y^T b \\ \text{subject to} \quad & y^T A \leq c^T \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

وإذا ما أضفنا بعض المتغيرات المكملة (إضافية أو زائدة) لتحويل كلتا المسألتين

إلى صيغة المساواة:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x \\ \text{subject to} \quad & Ax + w = b \\ & x, w \geq 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

و

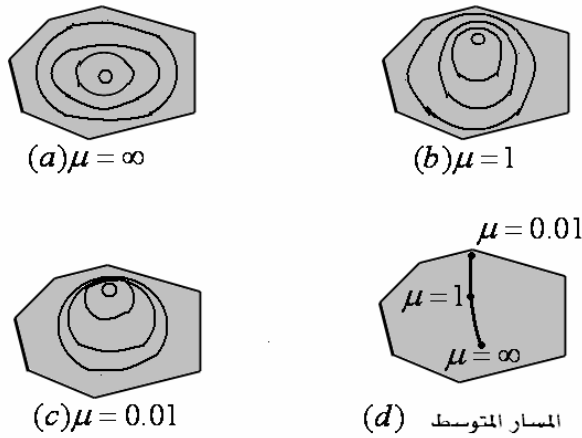
$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & y^T b \\ \text{subject to} \quad & y^T A - z = c^T \\ & y, z \geq 0 \end{aligned}$$

فيكون لدينا هنا مسألة تعظيم ذات قيود، حيث يوجد فيها بعض القيود متباينة. مثل مسائل البرمجة الخطية الأساسية. ويمكننا استبدال أي قيد متباين بحد إضافي في دالة الهدف. على سبيل المثال، في (٢.٢) يمكننا إزالة القيد الذي يحدد المتغير، لنقل  $x$  بأنه غير سالب، وذلك بإضافة حد لدالة الهدف يكون سالب ما لا نهاية عندما تكون  $x$  سالبة، وصفر في الحالات الأخرى. ولا يظهر فائدة على وجه الخصوص من إعادة صياغتها بهذا الشكل. وذلك لأن دالة الهدف الجديدة فيها عدم اتصال مفاجئ، وهذا يمنعنا من استخدام حساب التفاضل والتكامل لدراساتها. ولكن لنفترض أننا قمنا باستبدال هذه الدالة الغير متصلة بدالة أخرى تكون سالب ما لا نهاية عندما تكون  $x$  سالبة وتكون منتهية عندما تكون  $x$  موجبة وتقترب من سالب ما لا نهاية عندما تكون  $x$  تقترب من الصفر. بمعنى آخر فإن هذا يملس smoothness عدم اتصال الدالة ويكون سبباً في تحسين قدرتنا على تطبيق حساب التفاضل والتكامل لدراساتها. وأبسط هذه الدوال هي دالة اللوغاريتم. ولذلك فإننا نضيف حد لكل متغير في دالة الهدف والذي يكون عبارة عن ثابت مضروب في لوغاريتم المتغير:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i \\ \text{subject to} \quad & Ax + w = b \end{aligned} \quad (3.2)$$

في الواقع إن هذه المسألة رغم أنها لا تكافئ المسألة الأصلية، ولكنها لا تختلف كثيراً عنها، وذلك لأنه عندما يبدأ الوسيط  $\mu$  بالتناقص (والذي فرضنا أنه موجب) تقترب المسألة (٣.٢) شيئاً فشيئاً من المسألة (٢.٢).

وتسمى المسألة (٣.٢) بمسألة الحاجز وهي المقابلة لـ (٢.٢). علماً بأنها ليست مسألة واحدة، بل مجموعة كاملة من المسائل. ودليل كل مسألة هو الوسيط  $\mu$ . كل واحدة من هذه المسائل هي مسألة برمجة غير خطية لأن دالة الهدف غير خطية. وهذه الدالة الغير خطية تسمى مسألة الحاجز أو بالتحديد تسمى دالة الحاجز اللوغاريتمية.



شكل ١.٢: مجموعة مستويات لقيم مختلفة لـ  $\mu$ . (d) تبين المسار الأوسط

ومن المفيد أن تكون الصورة الهندسية لدالة الحاجز في مخيلتنا. تذكر أن مجموعة الحلول المسموح بها للمسائل المصاغة بالشكل القياسي هي عبارة عن متعدد سطوح يتميز كل سطح من سطوحه بخاصية أن أحد المتغيرات في هذا السطح يساوي صفراً. لذلك فإن دالة الحاجز هي عبارة عن سالب مالا نهاية في كل وجه من وجوه متعدد السطوح. علاوة على ذلك فإن قيمة دالة الحاجز

منتھية في المناطق الداخلية من متعدد السطوح وتقترب من سالب مالا نهاية عندما تقترب من الحدود. الشكل ١.٢ يوضح مستوى بعض المجموعات لدالة الحاجز لمسألة محددة ولقيم مختلفة للوسيط  $\mu$ . لاحظ أن لكل  $\mu$  تكون القيمة العظمى عند نقطة داخلية، ومع اقتراب قيمة  $\mu$  من الصفر تقترب النقطة الداخلية من الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الأصلية (حيث تكون في أعلى الرأس). بالنظر في دالة الحاجز للمتغير  $\mu$ ، فإن مجموعة الحلول المثلى تشكل مسار في المنطقة الداخلية للمتعدد السطوح في منطقة الحلول المسموح بها. يسمى هذا المسار بالمسار الأوسط central path. سوف نقوم الآن بتطوير هذه الآلية لدراسة المسار الأوسط. تسمى هذه الآلية بمضاريب لاجرانج Lagrange multipliers.

## ٣.٢ مضاريب لاجرانج Lagrange Multipliers

نود في البداية أن نناقش باختصار المسألة العامة لتحقيق الحد الأعظم لدالة خاضعة لقيود واحد أو أكثر من قيود المساواة. إن الدوال هنا مسموح لها أن تكون غير خطية، لكن من المفترض أن تكون ملساء وقابلة للاشتقاق مرتين. لنفترض بأن هناك معادلة قيد وحيدة. ومن ثم تكون المسألة العامة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && f(x) \\ & \text{subject to} && g(x) = 0 \end{aligned}$$

في هذه الحالة فإن التمثيل الهندسي للمسألة يكون واضحاً. إن انحدار  $f$  المرموز له بـ  $\nabla f$ ، هو متجه يُشير في اتجاه تزايد  $f$  عندما تتزايد أسرع ما

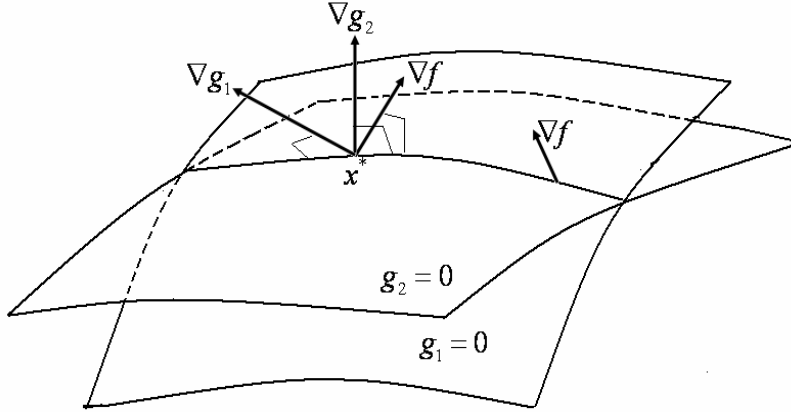


يمكن. وفي حالة مسألة الأمثلة بدون قيود نقوم بوضع قيمة المتجه  $\nabla f$  مساوياً للصفر لتحديد ما يسمى بالنقاط الحرجة لـ  $f$ ، والنقطة العظمى إن وجدت يجب أن تكون ضمن هذه المجموعة. ولكن عندما يصبح لدينا القيد  $g(x)=0$ ، لم يعد صحيحاً أن نبحث عن النقاط التي يتلاشى فيها الانحدار. بدلاً من ذلك يجب أن يكون الانحدار متعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها  $\{x: g(x)=0\}$ . بالطبع عند كل نقطة  $x$  في مجموعة الحلول المسموح بها،  $\nabla g(x)$ ، هو متجه متعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها عند النقطة  $x$  لذلك فإن متطلبنا الجديد للنقطة  $x^*$  لتصبح نقطة حرجة بأن تكون ضمن مجموعة الحلول المسموح بها وأن تكون  $\nabla f(x^*)$  متناسبة مع  $\nabla g(x^*)$ ، وعند كتابة هذا كنظام معادلات يكون لدينا:

$$\begin{aligned} g(x^*) &= 0 \\ \nabla f(x^*) &= y \nabla g(x^*) \end{aligned} \quad (٤.٢)$$

حيث  $y$  هو حد التناسب، ومن الممكن أن يكون أي عدد حقيقي، إما سالباً أو موجباً أو صفراً. إن حد التناسب هذا يسمى مضروب لاجرانج. الآن لنأخذ بعين الاعتبار عدة قيود:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && f(x) \\ &\text{subject to} && \\ & && g_1(x) = 0 \\ & && g_2(x) = 0 \\ & && \vdots \\ & && g_m(x) = 0 \end{aligned}$$



**شكل ٢.٢:** مجموعة الحلول المسموح بها هي المنحنى المولد بتقاطع  $g_1(x)=0$  و  $g_2(x)=0$ . إن النقطة  $x^*$  هي المثلى، لأن الانحدار عمودي على مجموعة الحلول المسموح بها.

في هذه الحالة إن منطقة الحلول المسموح بها هي تقاطع  $m$  فوق مستوى، انظر الشكل ٢.٢. إن الفضاء المتعامد مع مجموعة الحلول المسموح بها عند المتجه  $x$  لم يعد مجموعة ذات بعد واحد محدد بمتجه انحدار واحد، ولكن هو عبارة عن فضاء له بعد عالي (تُعرّف هذا البعد بـ  $m$ ) والمولد بجميع الانحدارات. لذا يتطلب وجود  $\nabla f(x^*)$  في هذا التوليد. هذا ينتج المجموعة التالية من المعادلات للنقطة الحرجة:

$$g(x^*)=0$$

$$\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m y_i \nabla g_i(x^*)$$

إن اشتقاق هذه المعادلات كان بشكل كلي هندسياً، لكن هناك صياغة جبرية بسيطة ينتج عنها نفس المعادلات. وهذه الفكرة يمكن أن تقدم بما يسمى دالة لاجرانج.

$$L(x, y) = f(x) - \sum_i y_i g_i(x)$$

ونبحث عن نقاطها الحرجة للمتجهين  $x$  و  $y$ ، وبما أنها الآن أصبحت مسألة أمثلة بدون قيود، فإن النقاط الحرجة محددة ببساطة عن طريق وضع جميع الاشتقاق الأول مساوياً للصفر:

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i y_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = -g_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

إن كتابة هذه المعادلات على شكل متجهات، نرى بأنها مكافئة لتلك المشتقة باستعمال الطريقة الهندسية. هذه المعادلات عادة ما يطلق عليها المرتبة الأولى لشرط الأمثلة first-order optimality conditions. لتحديد ما إذا كنا نحتاج إلى الحل الذي يحقق المرتبة الأولى لشرط الأمثلة، فإن إيجاد الحل الأعظم الشامل قد يكون صعباً. وعلى أية حال إذا كانت كل القيود خطية فإن الخطوة الأولى (في الغالب تكون كافية) وهي أن ننظر إلى مصفوفة الاشتقاق الثانية:

$$H(x) = \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

هذه المصفوفة تسمى مصفوفة هاس لدالة  $f$  عند النقطة  $x$  Hessian matrix .

### نظرية ١.٢

إذا كانت القيود خطية، تكون النقطة الحرجة  $x^*$  نقطة عظمى محلية

إذا كان

$$u^T Hf(x^*)u < 0 \quad (٥.٢)$$

لكل  $u \neq 0$  تحقق

$$u^T \nabla g_i(x^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (٦.٢)$$

**البرهان:**

نبدأ بالحددين الأولين من متسلسلة تايلور فنمدها لـ  $f$  حول النقطة  $x^*$

$$f(x^* + u) = f(x^*) + \nabla f(x^*)^T u + \frac{1}{2} u^T Hf(x^*)u + o(\|u\|^2).$$

إن المتجه  $u$  يمثل الإزاحة من النقطة الحالية  $x^*$ . إن عمليات الاستبدال الوحيدة ذات العلاقة هي تلك التي تكمن في مجموعة الحلول المسموح بها. لذلك نجعل  $u$  في اتجاه المتجه الذي يحقق (٦.٢). من (٤.٢) و (٦.٢) نرى أن  $\nabla f(x^*)^T u = 0$ ، ولذا

$$f(x^* + u) = f(x^*) + \frac{1}{2} u^T Hf(x^*)u + o(\|u\|^2).$$

بتطبيق (٥.٢) ينتهي الإثبات. □

بالإشارة إلى أنه إذا كانت (٥.٢) متحققة ليس فقط في  $x^*$  بل في كل  $x$ ، فإن  $x^*$  هي الحل الأعظم الشامل الوحيد. في الفصل القادم سوف نستخدم مضاريب لاجرانج لدراسة المسار الأوسط بالاعتماد على مسألة الحاجز.

## ٤.٢ دالة لاجرانج Lagrange function

في هذا الفصل، سوف نستخدم آلية مضاريب لاجرانج لدراسة حلول مسألة الحاجز. بشكل خاص سوف نوضح أنه لكل قيمة من قيم وسيط الحاجز  $\mu$  هناك حل وحيد لمسألة الحاجز. كذلك سوف نوضح أنه بينما  $\mu$  تقترب من الصفر، يقترب حل مسألة الحاجز من حل مسألة البرمجة الخطية الأصلية. أثناء دراستنا سوف نُعرِّج بشكل طبيعي على المسار الأوسط للمسألة الثنائية. كذلك المعادلات التي تُعرِّف المسارات الأوسطية للمسألة الأساسية والثنائية، ولذا سوف نقدم ترميز للمسار الأوسط للمسألة الأساسية والثنائية.

نبدأ بالتذكير بمسألة الحاجز:

$$\begin{aligned} \text{maximize} \quad & c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i \\ \text{subject to} \quad & Ax + w = b \end{aligned}$$

هذه مسألة أمثلة ذات قيود متساوية، نستطيع تطبيق أدوات مضاريب لاجرانج على هذه المسألة والتي قمنا بتطويرها في الفصل السابق. إن معادلة لاجرانج هي:

$$L(x, w, y) = c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i + y^T (b - Ax - w)$$

وبأخذ الاشتقاق بالنسبة لكل متغير ووضع قيمتها تساوي صفراً، نحصل على المرتبة الأولى لشرط الأمثلة:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j} &= c_j + \mu \frac{1}{x_j} - \sum_i y_i a_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ \frac{\partial L}{\partial w_i} &= \mu \frac{1}{w_i} - y_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \\ \frac{\partial L}{\partial y_i} &= b_i - \sum_j a_{ij} x_j - w_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

نكتب هذه المعادلات على شكل مصفوفات فتصبح:

$$A^T y - \mu X^{-1} e = c$$

$$y = \mu W^{-1} e$$

$$Ax + w = b$$

حيث  $X, W$  مصفوفات قطرية ويوجد في القطر عناصر المتجهين  $x, w$ . أيضاً يجب أن نتذكر أننا نستخدم  $e$  للدلالة على المتجه الذي يحتوي على واحد في كل مركبة.

وبإضافة متجه جديد مُعرف بـ  $z = \mu X^{-1} e$  يمكننا كتابة المرتبة الأولى

لشروط الأمثلة على هذه الطريقة:

$$Ax + w = b$$

$$A^T y - z = c$$

$$y = \mu W^{-1} e$$

$$z = \mu X^{-1} e$$

أخيراً، إذا قمنا بضرب المعادلة الثالثة بـ  $W$  والمعادلة الرابعة بـ  $X$

نصل إلى الصيغة الأساسية الثنائية المتماثلة التالية:

$$Ax + w = b$$

$$A^T y - z = c$$

$$YWe = \mu e$$

$$XZe = \mu e$$

(٧.٢)

لاحظ أن المعادلة الأولى فيها قيد للمساواة والتي ظهرت في المسألة الأساسية، بينما المعادلة الثانية هي قيد المساواة للمسألة الثنائية. علاوة على ذلك تكتب مركبات المعادلة الثالثة والرابعة على الشكل التالي:

طرق النقطة الداخلية

$$x_j z_j = \mu, \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$y_i w_i = \mu, \quad i=1, 2, \dots, m,$$

نرى بوضوح علاقة هذه المعادلات بشروط التمام. فإذا وضعنا قيمة  $\mu$  تساوي صفرًا، فسنحصل بالضبط على شروط المثمة المعروفة، التي يجب أن تتحقق عند الحل الأمثل. لهذا السبب، نسمي المعادلتين الأخيرتين شروط المثمة.

كما هو واضح من (٧.٢) المرتبة الأولى لشروط الأمثلة تعطينا  $2n + 2m$  معادلة في  $2n + 2m$  مجهول. إذا كانت هذه المعادلات خطية، فيمكن حلها باستخدام طريقة جاوس للحذف Gaussian elimination، وبعد ذلك يصبح موضوع البرمجة الخطية أكثر سهولة من حل نظام معادلات خطية. ولكن للأسف هذه المعادلات غير خطية بفرق بسيط جداً عن المعادلات الخطية. إن التعابير الغير خطية في هذه المعادلات هي عمليات ضرب بسيطة مثل  $x_j z_j$ . وهذا الفرق هو الذي يجعل البرمجة الخطية غير سهلة. ويجب أن نتساءل ما إذا كان كلا الحلين موجودين للمعادلة (٧.٢) وكذلك ما إذا كان وحيداً.

## ٥.٢ المرتبة الثانية لشروط الأمثلية ووجود الحل

### Second-Order Optimality Condition and Existence

لإظهار الحل، إذا كان موجوداً، يجب أن يكون الحل وحيداً. سوف

نستخدم معلومات من المرتبة الثانية لدالة الحاجز:

$$f(x, w) = c^T x + \mu \sum_j \log x_j + \mu \sum_i \log w_i \quad (٨.٢)$$

إن الاشتقاق الأولى هي:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = c_j + \frac{\mu}{x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial f}{\partial w_i} = \frac{\mu}{w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

و الاشتقاقات الثانية هي:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} = -\frac{\mu}{x_j^2}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial w_i^2} = -\frac{\mu}{w_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

كل هذه الاشتقاقات الثانية المختلطة تتلاشى، لهذا فإن مصفوفة هاس هي مصفوفة قطرية ذات مداخل سالبة. ولذلك وباستخدام النظرية ١.٢ يمكن أن يكون هناك على الأكثر نقطة حرجة واحدة إذا وجدت، وهي نقطة عظمى شاملة.

والسؤال الآن، هل يوجد دائماً حل لمسألة الحاجز؟ والجواب: ليس دائماً. اعتبر على سبيل المثال، مسألة الأمثلة البسيطة التالية على نصف الخط الغير سالب:

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & 0 \\ \text{subject to} & x \geq 0 \end{array}$$

لهذه المسألة، إن دالة الحاجز هي :

$$f(x) = \mu \log x$$



ليس لها نقطة عظمى ( إن النقطة العظمى هي مالانهايه وذلك عندما  $x = \infty$  ).  
على أية حال فإن مثل هذه الحالة نادرة. لتغير دالة الهدف في هذا المثال لكي  
تصبح  $x = 0$  هي الحل الأمثل الوحيد:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && -x \\ &\text{subject to} && x \geq 0 \end{aligned}$$

في هذه الحالة ، إن دالة الحاجز هي:

$$f(x) = -x + \mu \log x$$

النقطة العظمى فيها تتحقق عندما  $x = \mu$  .

وبشكل عام لدينا النظرية التالية:

### نظرية ٢.٢

يوجد حل لمسألة الحاجز إذا وإذا فقط كانت منطقة الحل المسموح بها  
للمسألة الأساسية والثائية غير خالية.  
البرهان: ارجع إلى كتاب [Va].

نلخص نتيجتنا الرئيسية والتي هي نتيجة مباشرة للنظرية السابقة بالنظرية  
التالية:

### نظرية ٣.٢

إذا كانت مجموعة الحلول المسموح بها للبرمجة الخطية الأساسية  
(الثائية) غير خالية ومحدودة ، فإنه لكل  $\mu > 0$  يوجد حل وحيد  
 $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$  للنظام (٧.٢).  
البرهان: مباشر من نظرية ٢.٢.

إن المسار  $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) : \mu > 0\}$  يسمى المسار الأساسي الثنائي  
الأوسط. وهو يلعب دوراً أساسياً في طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية. في

الباب التالي سوف نُعرِّف أبسط أنواع طريقة النقطة الداخلية. وهو إجراء تكراري في كل دورة نحاول التحرك نحو نقطة على المسار الأوسط، والذي يكون أقرب إلى الحل الأمثل من النقطة الحالية.

## تمارين الباب الثاني

١.٢ احسب المسار الأوسط للدالة التالية:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ &\text{subject to} && 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \\ &&& x_1 - x_3 = 1 \\ &&& x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

٢.٢ لنفرض أن المجموعة  $\{x : Ax \leq b, x \geq 0\}$  محدودة. وليكن  $r \in \mathbb{R}^n$  و  $s \in \mathbb{R}^m$  متجهين مُركباتهما عناصر موجبة. بواسطة دالة الحاجز.

أثبت وجود حل وحيد لنظام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned} Ax + w &= b \\ A^T y - z &= c \\ YWe &= s \\ XZe &= r \\ x, y, z, w &> 0 \end{aligned}$$



## Path Following Method

- مقدمة • تقدير قيمة
  - ملائمة لوسيط دالة الجزء •
  - حساب اتجاهات الخطوة •
  - طريقة نيوتن • اختيار طول
  - خطوة الوسيط • تحليل
- التقارب

### 1.3 مقدمة Introduction

في هذا الباب، سوف نُعرِّف طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية التي تسمى طريقة تابع المسار. ولا تنس أنه لحل البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس هناك مرحلتين لخطوات الحل، بينما تحتاج طريقة تابع المسار إلى مرحلة واحدة فقط. هذا يعني بأن هذه الطريقة يمكن أن تبدأ من نقطة خارج منطقة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية أو الثنائية وستصل مباشرة إلى

الحل الأمثل. لذلك نبدأ باختيار عشوائي لقيم موجبة لكل المتغيرات الأساسية والثائية، أي أن  $(x, w, y, z) > 0$ ، وبعد ذلك نُحدِّث هذه القيم بشكل متكرر كالتالي:

١- نقترح قيمة ملائمة لـ  $\mu$  ( أصغر من القيمة " الحالية " لكن ليست صغيرة جداً ).

٢- نحسب اتجاهات الخطوة  $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$  بحيث تشير تقريباً إلى النقطة  $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$  على المسار الأوسط.

٣- نحسب طول الخطوة للوسيط  $\theta$ ، حيث تكون النقاط الجديدة:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= x + \theta \Delta x & \tilde{y} &= y + \theta \Delta y \\ \tilde{w} &= w + \theta \Delta w & \tilde{z} &= z + \theta \Delta z\end{aligned}$$

نستمر حتى نحصل على مركبات موجبة.

٤- نستبدل  $(x, w, y, z)$  بالحلول الجديدة  $(\tilde{x}, \tilde{w}, \tilde{y}, \tilde{z})$ .

لتعريف طريقة تابع المسار بالكامل، يكفي عمل كل من هذه الخطوات الأربع بشكل دقيق. في الفصول التالية، سنبدأ بشرح تلك الخطوات بشكل دقيق حسب الترتيب أعلاه. وفي الفصل الأخير سنشرح تحليل التقارب.

### ٢.٣ تقدير قيمة ملائمة لوسيط دالة الحاجز

#### Estimating an Appropriate Value for the Barrier Parameter

سوف نشرح الآن كيفية اختيار  $\mu$ . هناك خياران إما أن تكون  $\mu$  كبيرة جداً أو صغيرة جداً، إذا اخترنا  $\mu$  لتصبح ذات قيمة كبيرة جداً، فإنه من الممكن أن المتتالية تتقارب إلى المركز التحليلي analytic center لمنطقة الحلول

المسموح بها، وهذا ما لا نريد الوصول إليه. ومن ناحية أخرى إذا اخترنا  $\mu$  لتصبح ذات قيمة صغيرة جداً، فإنه من الممكن أن المتسلسلة تبقى بعيدة جداً عن المسار الأوسط، وبالتالي قد تتعثر الخوارزمية عند حدود منطقة الحلول المسموح بها في مكان أمثل فرعي. الفكرة المثالية أن نجد تسوية معقولة بين هذين الطرفين. ولعمل هذا علينا أن نعرف أولاً القيم التي سوف تمثل القيمة الحالية  $\mu$  بشكل ما ومن ثم نختار قيمة أصغر من ذلك ولتكن كسر ثابت منه.

معطى لدينا النقطة  $(x, w, y, z)$  وهي بالتأكيد ليست على المسار الأوسط، إذ لو كانت على المسار الأوسط فإن هناك عدة صيغ يمكننا من خلالها استعادة قيمة  $\mu$ . على سبيل المثال يمكننا فقط حساب  $z, x_j$  لأي دليل ثابت  $j$ . أو يمكننا أن نحسب  $y, w_i$  لأي دليل ثابت  $i$ . كما يمكننا أن نأخذ القيمة المتوسطة لكل تلك القيم:

$$\mu = \frac{z^T x + y^T w}{n + m}$$

هذه الصيغة تعطينا بالضبط قيمة  $\mu$ ، حينما يُعلم أن  $(x, w, y, z)$  تقع على المسار الأوسط. إن النقطة الرئيسية هنا هي أننا سوف نستخدم هذه الصيغة لإيجاد تقريب لقيمة  $\mu$  حتى لو كان الحل الحالي  $(x, w, y, z)$  لا يقع على المسار الأوسط. بالطبع الخوارزمية تحتاج لقيمة  $\mu$  التي تمثل نقطة أقرب إلى الحل الأمثلة من الحل الحالي. وبالتالي فإن الخوارزمية تأخذ القيمة أعلاه ونخفضها من خلال وسيط كسري.

$$\mu = \delta \frac{z^T x + y^T w}{n + m}$$

حيث أن  $\delta$  عدد بين الصفر والواحد، وفي التطبيق وجد أن وضع  $\delta$  تساوي تقريباً  $1/10$  يعطي أفضل النتائج. ولكن لاختلاف الأداء في ذلك سنتركه كوسيط.

### ٣.٣ حساب اتجاهات الخطوة Calculating Step Directions

هدفنا أن نجد  $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$  بحيث أن النقطة الجديدة  $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$  تقع تقريباً على المسار الأوسط الأساسي الثنائي في النقطة  $(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu)$ . نذكر أن المعادلات المعرفة لهذه النقطة على المسار الأوسط هي:

$$Ax + w = b$$

$$A^T y - z = c$$

$$XZe = \mu e$$

$$YWe = \mu e$$

نرى أن النقطة الجديدة  $(x + \Delta x, w + \Delta w, y + \Delta y, z + \Delta z)$ ، إذا كانت ستقع بشكل تام على المسار الأوسط عند  $\mu$ ، فإنها تُعرّف على الشكل التالي:

$$A(x + \Delta x) + (w + \Delta w) = b$$

$$A^T(x + \Delta y) - (z + \Delta z) = c$$

$$(X + \Delta X)(Z + \Delta Z)e = \mu e$$

$$(Y + \Delta Y)(W + \Delta W)e = \mu e$$

بالتفكير في  $(x, w, y, z)$  على أنها بيانات معلومة و  $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$  على أنها مجاهيل، نعيد كتابة هذه المعادلات ونضع المجاهيل على اليسار و قيم البيانات على اليمين:

$$A\Delta x + \Delta w = b - Ax - w = \rho$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = c - A^T y + z = \sigma$$

$$Z\Delta x + X\Delta z + \Delta X \Delta Z e = \mu e - XZe$$

$$W\Delta y + Y\Delta w + \Delta Y \Delta W e = \mu e - YWe$$

لاحظ أننا قدمنا رمزين للاختصار هما:  $\rho$  و  $\sigma$ . إن هذين المتجهين يمثلان الحلول الغير مسموح بها الأساسية و الحلول الغير مسموح بها الشائبة على التوالي.

وهذه المعادلات تشكل نظام معادلات غير خطية حيث المتغيرات هي  $(\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z)$  ونريد أن يصبح لدينا نظام خطي، لذا يجب أن نتخلص من الحدود غير خطية، فيصبح لدينا النظام الخطي التالي:

$$A\Delta x + \Delta w = \rho \quad (١.٣)$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma \quad (٢.٣)$$

$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe \quad (٣.٣)$$

$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe \quad (٤.٣)$$

هذا النظام من المعادلات هو نظام خطي مكون من  $2n + 2m$  معادلة في  $2n + m$  مجهول. سوف نوضح لاحقاً أن هذا النظام غير شاذ (حيث أن  $A$  لها رتبة كاملة) ولهذا يكون لها حل وحيد، هذا الحل سوف يُعرّف اتجاهات الخطوة التالية لطريقة تابع المسار.

إن حذف الحدود غير الخطية في هذا النظام هو أمر شائع لحل نظام معادلات غير خطية، وتسمى هذه الطريقة بطريقة نيوتن، كما سوف يتم شرحها في الفصل التالي.



## ٤.٣ طريقة نيوتن Newton's Method

ليكن لدينا الدالة:

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} F_1(\xi) \\ F_1(\xi) \\ \vdots \\ F_n(\xi) \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

من  $\mathbb{R}^n$  إلى  $\mathbb{R}^n$ ، والمطلوب لحل المسألة هو أن نجد نقطة  $\xi^* \in \mathbb{R}^n$  بحيث  $F(\xi^*) = 0$ . مثل هذه النقطة تسمى جذر أو صفر لـ  $F$ . طريقة نيوتن هي طريقة تكرارية لحل هذه المسائل.

فيما يلي نوضح أحد خطوات هذه الطريقة. معطى نقطة اختيارية  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ، الهدف منها هو إيجاد اتجاه الخطوة  $\Delta \xi$  بحيث  $F(\xi + \Delta \xi) = 0$ . وإذا كانت  $F$  غير خطية لا يمكن إيجاد أي اتجاه للخطوة. لذلك يكون اتجاه الخطوة مقرب باستخدام أول حدين من سلسلة تايلور الموسعة:

$$F(\xi + \Delta \xi) \approx F(\xi) + F'(\xi)\Delta \xi,$$

حيث

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial \xi_n} \end{bmatrix}.$$

إن التقريب خطي في  $\Delta \xi$ . لذلك عند مساواته بالصفر يعطينا نظاماً خطياً. حيث ينتج من الحل اتجاه الخطوة:

$$F'(\xi)\Delta\xi = -F(\xi)$$

لدينا  $\Delta\xi$  ، طريقة نيوتن تُحدِّث الحل الحالي  $\xi$  باستبداله بـ  $\xi + \Delta\xi$  . وتستمر هذه العملية إلى أن يصبح الحل الحالي جذر (  $F(\xi) \approx 0$  ) . إن طريقة نيوتن تعمل بشكل جيد في الحالات العامة ، وقد تفضل إذا كانت  $F$  غير مستقرة أو أن نقطة البداية بعيدة عن الحل .  
لإيجاد نقطة على المسار الأوسط نضع :

$$F(\xi) = \begin{bmatrix} Ax + w - b \\ A^T y - z - c \\ XZe - \mu e \\ YWe - \mu e \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix}$$

نرى أن مجموعة المعادلات التي تُعرِّف  $(x_\mu, y_\mu, w_\mu, z_\mu)$  هي جذر لـ  $F$  . إن مصفوفة اشتقاق  $F$  هي :

$$F'(\xi) = \begin{bmatrix} A & 0 & I & 0 \\ 0 & A^T & 0 & -I \\ Z & 0 & 0 & X \\ 0 & W & Y & 0 \end{bmatrix}.$$

لاحظ أن

$$\Delta\xi = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta w \\ \Delta z \end{bmatrix}$$

من السهل ملاحظة أن اتجاه نيوتن يتوافق مع الاتجاه الحاصل من حل المعادلات (١.٣)-(٤.٣).

### ٥.٣ اختيار طول خطوة الوسيط Choosing the Step Length

إن اتجاهات الخطوة التي حُددت باستعمال طريقة نيوتن، حددت تحت فرضية أن وسيط اتجاه الخطوة  $\theta$  يساوي واحد (أي أن  $\tilde{x} = x + \Delta x$ ). لكن أخذ مثل هذه الخطوة قد يجعل المتغيرات الأساسية والثائية في الحل الجديد غير موجبة. لذا قد نحتاج لاستعمال قيمة أصغر لـ  $\theta$ . والتي تضمن أن:

$$x_j + \theta \Delta x_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

بنقل  $\Delta x_j$  إلى الجانب الآخر، وبعد ذلك بالقسمة على  $\theta$  و  $x_j$  (كليهما موجباً) نرى أن  $\theta$  يجب أن تحقق

$$\frac{1}{\theta} > -\frac{\Delta x_j}{x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

بالطبع هذه المتباينة يجب أن تتحقق للمتغيرات  $y$  و  $w$  و  $z$  أيضاً. وعند وضعها مع بعضها البعض فإن القيمة الأكبر لـ  $\theta$  ستتحقق من خلال:

$$\frac{1}{\theta} = \max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\}$$

حيث أننا أسأنا استعمال الترميز قليلاً باستعمال  $\max_{ij}$  للدلالة على الحد الأعلى لكل النسب للمجموعة المحددة. وعلى أية حال فإن اختيار  $\theta$  لن يضمن تبايناً فعلياً، لذا فإننا نقدم الوسيط  $r$ ، الذي يعتبر رقم قريب من ولكن أقل فعلياً من واحد، ونضع:

$$\theta = r \left( \max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1} \wedge 1$$

هذه الصيغة قد تبدو غير واضحة، ولا يتعين على أحد حسابها يدوياً، ولكن تصبح بديهية عند برمجتها بواسطة الحاسب الآلي. مثل هذا الروتين سيكون سريعاً جداً (يتطلب  $2n + 2m$  عملية حسابية فقط).

إن خلاصة الخوارزمية المبينة في هذا الفصل موضحة كالتالي:

### خوارزمية ١.٣ (خوارزمية طريقة تابع المسار)

مدخلات                      نقاط البداية  $x, w, y, z$  حيث  $(x, w, y, z) > 0$

بينما

$$\rho = b - Ax - w$$

$$\sigma = c - A^T y + z$$

$$\gamma = z^T x + y^T w$$

$$\mu = \delta \frac{\gamma}{n + m}$$

ليست مثالية

حل

$$A \Delta x + \Delta w = \rho$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$$

$$Z \Delta x + X \Delta z = \mu e - X Z e$$

$$W \Delta y + Y \Delta w = \mu e - Y W e$$

$$\theta = r \left( \max_{ij} \left\{ -\frac{\Delta x_j}{x_j}, -\frac{\Delta w_i}{w_i}, -\frac{\Delta y_i}{y_i}, -\frac{\Delta z_j}{z_j} \right\} \right)^{-1} \wedge 1$$

$$x = x + \theta \Delta x \quad w = w + \theta \Delta w$$

$$y = y + \theta \Delta y \quad z = z + \theta \Delta z$$

في الفصل القادم، سوف نقوم بتحليل التقارب وسوف نستنتج ما إذا كانت هذه الخوارزمية تتقارب إلى الحل الأمثل.

### ٦.٣ تحليل التقارب Convergence Analysis

في هذا الفصل، سوف نستقصي خصائص التقارب في خوارزمية تابع المسار. في البداية نود أن نذكر بأن طريقة السمبلكس Simplex method هي خوارزمية فيها عدد الدورات منتهي (بافتراض أن الخطوات مأخوذة بحيث لا يكون هناك دوران). بينما في طريقة النقطة الداخلية فإن الحالة مختلفة لأن كل حل ناتج تكون جميع متغيراته موجبة. ولكي نصل للحل الأمثل يتطلب ذلك تلاشي العديد من المتغيرات. وهذا التلاشي يمكن أن يحدث فقط عند النهاية. وهذا يثير بعض التساؤلات، أهمها: هل متتالية الحلول الناتجة عن طريقة تابع المسار تتقارب؟ وإذا كانت كذلك هل الحل هو الأمثل؟ وكم مقدار سرعة هذا التقارب؟ بشكل خاص إذا حددنا مقدار تحمّل الأمثلة tolerances فكم عدد الدورات لإنجاز هذا المقدار من التحمّل؟ سوف نوضح هذه المسائل في هذا الفصل.

سوف نحتاج لقياس حجم متجهات مختلفة، وهناك عدة خيارات على سبيل المثال لكل  $1 \leq p < \infty$  يمكننا أن نُعرّف معيار  $p$ -norm للمتجه  $x$  على أنه:

$$\|x\|_p = \left( \sum_j |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ويكون لدينا ما يسمى المعيار الجزئي sup-norm عندما  $p$  تقترب من ما لا نهاية، وهو معرف كالتالي:

$$\|x\|_{\infty} = \max_j |x_j|$$

سوف نتطرق الآن لدراسة قياس التحسن، بالتذكير بالنظرية الثنائية. حيث أن هناك ثلاثة موازين يجب أن تنطبق لكي يكون الحل الأساسي الثنائي أمثل:

١- وجود حلول مسموح بها للمسألة الأساسية.

٢- وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية.

٣- تحقق نظرية المتممة complementarity.

لكل واحد من هذه الموازين، نقدم مقياس مدى إخفاق تحقيقها.

بالنسبة للميزان الأول، وهو وجود منطقة غير خالية للحلول المسموح بها للمسألة الأساسية، سوف نستخدم معيار 1-norm لمتجه أساسي ليس داخل منطقة الحلول المسموح بها.

$$\rho = b - Ax - w$$

وأما بالنسبة للميزان الثاني وهو وجود منطقة غير خالية للحلول المسموح بها للمسألة الثنائية، سوف نستخدم معيار 1-norm لمتجه ثنائي ليس داخل منطقة الحلول المسموح بها.

$$\sigma = c - A^T y + z$$

للمتممة سوف نستخدم

$$\gamma = z^T x + y^T w$$

سوف ندرس الآن مقدار التحسن في الدورة الواحدة. ولأجل التحليل في هذا الفصل يفضل أن نقوم بإجراء بعض التعديلات في الخوارزمية يجعلها ذات خطوات أقصر من المحددة سابقاً، فنضع

$$\theta = r \left( \max_{ij} \left\{ \left| \frac{\Delta x_j}{x_j} \right|, \left| \frac{\Delta w_i}{w_i} \right|, \left| \frac{\Delta y_i}{y_i} \right|, \left| \frac{\Delta z_j}{z_j} \right| \right\} \right)^{-1} \wedge 1$$

$$= \frac{r}{\max \left( \|X^{-1} \Delta x\|_{\infty}, \dots, \|Z^{-1} \Delta z\|_{\infty} \right)} \wedge 1 \quad (٥.٣)$$

لاحظ أن التغيير الوحيد الذي أحدثناه هو استبدال النسب السالبة بالقيمة المطلقة لنفس النسبة. وبما أن القيمة العظمى للقيم المطلقة يمكن أن تكون أكبر من القيم العظمى للنسب نفسها، فإن هذه الصيغة تعطي قيمة أصغر لـ  $\theta$ . لتكن  $x, y$ ، تدل على الكميات من دورة واحدة للخوارزمية، ونضع تلدا على نفس الأحرف للدلالة على نفس الكمية في الدورة القادمة للخوارزمية. لذلك

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x + \theta \Delta x & \tilde{y} &= y + \theta \Delta y \\ \tilde{w} &= w + \theta \Delta w & \tilde{z} &= z + \theta \Delta z \end{aligned}$$

والآن دعنا نقوم بحساب بعض الكميات الأخرى. نبدأ بمنطقة الحلول

الغير مسموح بها الأساسية:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= b - A\tilde{x} - \tilde{w} \\ &= b - Ax - w - \theta(A\Delta x + \Delta w) \end{aligned}$$

ولكن  $b - Ax - w$  تساوي منطقة الحلول الغير مسموح بها الأساسية  $\rho$  و  $A\Delta x + \Delta w$  أيضاً تساوي  $\rho$ ، حيث أن هذه المعادلة هي بالضبط نفس المعادلة (١.٣). وبالتالي:

$$\tilde{\rho} = (1 - \theta)\rho$$

بنفس الطريقة

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= c - A^T \tilde{y} + \tilde{z} \\ &= c - A^T y + z - \theta(A\Delta y - \Delta z) \\ &= (1 - \theta)\sigma \end{aligned}$$

وحيث أن  $\theta$  هو عدد بين الصفر و الواحد ، يترتب على ذلك أن كل دورة ينتج عنها تناقص في الحلول غير المسموح بها لكل من المسألة الأساسية والشائية وهذا التناقص بدوره يقرب  $\theta$  من الواحد .  
 إن تحليل المتمة أكثر تعقيداً ، حيث أننا نقوم هنا بالتخلص من الحدود غير الخطية ، وجعل النظام خطياً .

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= \tilde{z}^T \tilde{x} + \tilde{y}^T \tilde{w} \\ &= (z + \theta \Delta z)^T (x + \theta \Delta x) + (y + \theta \Delta y)^T (w + \theta \Delta w) \\ &= z^T x + y^T w + \theta (z^T \Delta x + \Delta z^T x + y^T \Delta w + \Delta y^T w) \\ &\quad + \theta^2 (\Delta z^T \Delta x + \Delta y^T \Delta w)\end{aligned}$$

نحتاج لتحليل كل حد من حدود  $\theta$  بشكل منفصل. من (٣.٣) نلاحظ:

$$\begin{aligned}z^T \Delta x + \Delta z^T x &= e^T (Z \Delta x + X \Delta z) \\ &= e^T (\mu e - Z X e) \\ &= \mu n - z^T x\end{aligned}$$

بنفس الطريقة ، من (٣.٣) ، لدينا

$$\begin{aligned}y^T \Delta w + \Delta y^T w &= e^T (Y \Delta w + W \Delta y) \\ &= e^T (\mu e - Y W e) \\ &= \mu m - y^T w\end{aligned}$$

أخيراً ، من (١.٣) و (٢.٣) ينتج لدينا:

$$\begin{aligned}\Delta z^T \Delta x + \Delta y^T \Delta w &= (A^T \Delta y - \sigma)^T \Delta x + \Delta y^T (\rho - A \Delta x) \\ &= \Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x\end{aligned}$$

بتعويض هذه المعادلات في المعادلة الأخيرة لـ  $\tilde{\gamma}$  ، نحصل على

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma} &= z^T x + y^T w + \theta (\mu (n + m) - (z^T x + y^T w)) \\ &\quad + \theta^2 (\Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x)\end{aligned}$$



حتى الآن، قمنا بترتيب  $z^T x + y^T w = \gamma$  وكذلك  $\mu(n+m) = \delta\gamma$ . لذلك

$$\tilde{\gamma} = (1 - (1 - \delta)\theta)\gamma + \theta^2 (\Delta y^T \rho - \sigma^T \Delta x)$$

يجب علينا الآن أن نبتعد عن المساواة ونعمل على التقدير. والأداة المفضلة للتقدير

هي المتباينة التالية:

$$\begin{aligned} |v^T w| &= \left| \sum_j v_j w_j \right| \leq \sum_j |v_j| |w_j| \\ &\leq (\max_j |v_j|) (\sum_j |w_j|) = \|v\|_\infty \|w\|_1 \end{aligned}$$

هذه المتباينة هي حالة بسيطة من متباينة هولدر Holder's inequality، ومنها

نلاحظ أن

$$|\Delta y^T \rho| \leq \|\rho\|_1 \|\Delta y\|_\infty \quad \text{و} \quad |\sigma^T \Delta x| \leq \|\sigma\|_1 \|\Delta x\|_\infty$$

لذلك،

$$\tilde{\gamma} \leq (1 - (1 - \delta)\theta)\gamma + \theta (\|\rho\|_1 \|\theta \Delta y\|_\infty + \|\sigma\|_1 \|\theta \Delta x\|_\infty)$$

وبعد ذلك نستخدم الاختيار المحدد لطول الخطوة  $\theta$  لنحصل على حد لكل من

$$\|\theta \Delta x\|_\infty \quad \text{و} \quad \|\theta \Delta y\|_\infty$$

من (٥.٣) نستنتج

$$\theta \leq \frac{r}{\|X^{-1} \Delta x\|_\infty} \leq \frac{x_j}{|\Delta x_j|} \quad \text{for all } j$$

لذلك

$$\|\theta \Delta x\|_\infty \leq \|x\|_\infty$$

و بنفس الطريقة

$$\|\theta \Delta y\|_\infty \leq \|y\|_\infty$$

إذا افترضنا أن الحدود  $\|x\|_\infty$  و  $\|y\|_\infty$  محدودة بعدد حقيقي كبير  $M$ ، حيث  $x$  و  $y$  هما متتاليتا المتجهات المستخرجة من خوارزمية تابع المسار فبالتالي نستطيع تقدير المتممة الجديدة على أنها:

$$\tilde{\gamma} \leq (1 - (1 - \delta)\theta)\gamma + M \|\rho\|_1 + M \|\sigma\|_1$$

والآن سوف ندرس قاعدة التوقف stopping criteria نضع  $\varepsilon > 0$  عدداً تحملياً موجباً صغيراً، ونضع  $M < \infty$  عدداً تحملياً منتهياً كبيراً. إذا أصبحت  $\|x\|_\infty$  أكبر من  $M$  نتوقف ونوضح أن المسألة الأساسية غير محدودة. وإذا أصبح  $\|y\|_\infty$  أكبر من  $M$  نتوقف ونوضح أن المسألة الثنائية غير محدودة. وفي النهاية إذا كان  $\|\sigma\|_1 < \varepsilon$ ،  $\|\rho\|_1 < \varepsilon$  و  $\gamma < \varepsilon$ ، نتوقف ونوضح أن الحل الحالي هو الأمثل (ضمن نطاق التحمل الصغير).

بما أن مقياس المتممة هو  $\gamma$ ، والمتممة تتعلق بالفجوة الثنائية duality gap، فإنه من المتوقع أن قيمة صغيرة لـ  $\gamma$  يجب أن تترجم إلى فجوة ثنائية صغيرة. وهذا حاصل فعلاً. فمن تعريف  $\gamma, \sigma$  و  $\rho$  نستطيع أن نكتب

$$\begin{aligned} \gamma &= z^T x + y^T w \\ &= (\sigma + A^T y - c)^T x + y^T (b - Ax - \rho) \\ &= b^T y - c^T x + \sigma^T x - \rho^T y \end{aligned}$$

سوف نستخدم متباينة هولدر Holder inequality لحد بعض هذه الحدود، نستطيع تقدير الفجوة الثنائية:

$$\begin{aligned} |b^T y - c^T x| &\leq \gamma + |\sigma^T x| + |y^T \rho| \\ &\leq \gamma + \|\sigma\|_1 \|x\|_\infty + \|\rho\|_1 \|y\|_\infty \end{aligned}$$

والآن إذا كانت كل من  $\gamma$ ،  $\|\sigma\|_1$  و  $\|\rho\|_1$  صغيرة وكانت  $\|x\|_\infty$  و  $\|y\|_\infty$  ليست كبيرة جداً تصبح الفجوة الثنائية صغيرة. هذا التقدير يوضح لنا أن لا نتوقع أن الفجوة الثنائية تصبح صغيرة إلى أن تصبح المسألة الأساسية والثنائية قريبة جداً من منطقة الحلول المسموح بها. وتؤكد التطبيقات الفعلية هذا التوقع.

سوف نتطرق الآن إلى مقدار التحسن في خوارزمية تابع المسار من خلال عدة دورات.

الآن نضع  $\theta^{(k)}, \gamma^{(k)}, \sigma^{(k)}, \rho^{(k)}$  لترمز لقيمة هذه الكميات عند الدورة  $k$  th. النظرية التالية توضح الأداء العام للخوارزمية:

### نظرية ٢.٣

نفترض أن هناك عدداً حقيقياً  $t > 0$ ، و عدداً حقيقياً  $M < \infty$ ، و العدد

الصحيح  $K$  حيث أنه لكل  $k \leq K$

$$\theta^{(k)} \geq t, \quad \|x^{(k)}\|_\infty \leq M, \quad \|y^{(k)}\|_\infty \leq M.$$

فإنه يوجد عدد ثابت  $\bar{M} < \infty$  بحيث

$$\|\rho^{(k)}\|_1 \leq (1-t)^k \|\rho^{(0)}\|_1, \quad \|\sigma^{(k)}\|_1 \leq (1-t)^k \|\sigma^{(0)}\|_1, \quad \gamma^{(k)} \leq (1-\tilde{t})^k \bar{M},$$

لكل  $k \leq K$  حيث

$$\tilde{t} = t(1-\delta).$$

**البرهان:** إنظر [Wr].

إن النظرية أعلاه هي إثبات جزئي للتقارب. لأنها تعتمد على افتراض أن أطوال الخطوة تبقى محدودة وبعيدة عن الصفر. ولتكون أطوال الخطوة بعيدة عن الصفر هذا يتطلب تعديل الخوارزمية، بحيث تكون نقطة البداية مختارة بدقة. إن هذه التفاصيل تقنية ولذلك حذف. (انظر المراجع).

## تمارين الباب الثالث

١.٣ بالبدء من  $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$  ، وباستخدام  $\delta = 1/10$

و  $r = 9/10$  ، حيث  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$  احسب  $(x, w, y, z)$  بعد خطوة

واحدة من خوارزمية تابع المسار للمسائل التالية:

$$\text{maximize} \quad 3x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

subject to

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

٢.٣ أعد السؤال السابق للمسألة التالية:

$$\text{maximize} \quad z = -4x_1 - 3x_2 + 12x_3$$

subject to

$$-2x_1 - 3x_2 + 12x_3 \leq -5$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \leq -3$$

$$x \geq 0$$

٣.٣ أعد السؤال السابق للمسألة التالية:

$$\text{maximize} \quad 5x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 8x_4$$

subject to

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 3$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

٤.٣ بالبدء من  $(x, w, y, z) = (e, e, e, e)$  ، وباستخدام  $\delta = 1/10$

و  $r = 9/10$  ، حيث  $e = [1, 1, \dots, 1]^T$  احسب  $(x, w, y, z)$  بعد خطوة

واحدة من خوارزمية تابع المسار للمسائل التالية:

$$\text{maximize} \quad 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4$$

subject to

$$8x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 7$$

$$2x_1 + 6x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 3$$

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

٥.٣ ضع  $\{(x_\mu, w_\mu, y_\mu, z_\mu) : \mu \geq 0\}$  تدل على المسار الأوسط. أثبت أن:

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} b^T y_\mu - c^T x_\mu = \infty$$

٦.٣ باعتبار مسألة البرمجة الخطية التي منطقة الحلول المسموح بها

محدودة وغير خالية من الداخل. استعمل نتيجة التمرين ٥.٣ لإثبات أن

المسائل الثنائية لمجموعة الحلول المسموح بها غير محدودة.

## Karush-Kuhn-Tucker System

- مقدمة • نظام KKT
- المخفض • المعادلات الناظمية

### 1.4 مقدمة Introduction

إن الجانب الأكثر استهلاكاً للوقت لكل دورة في طريقة تابع المسار هو حل نظام المعادلات التي تُعرّف متجهات اتجاه الخطوة  $\Delta x, \Delta w, \Delta y, \Delta z$ :

$$A\Delta x + \Delta w = \rho \quad (1.4)$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma \quad (2.4)$$

$$Z\Delta x + X\Delta z = \mu e - XZe \quad (3.4)$$

$$W\Delta y + Y\Delta w = \mu e - YWe \quad (4.4)$$

بعد تعديلات بسيطة، هذه المعادلات يمكن أن تكتب على شكل مصفوفة من عدة قوالب كالتالي:

$$\begin{bmatrix} -XZ^{-1} & 0 & -I & 0 \\ 0 & 0 & A & I \\ -I & A^T & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & YW^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta y \\ \Delta z \\ \Delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu Z^{-1}e + x \\ \rho \\ \sigma \\ \mu W^{-1}e - y \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

هذا النظام يسمى نظام كاريش-كون-تكر Karush-Kuhn-Tucker، أو بطريقة أبسط يسمى نظام KKT. وهو نظام خطي متماثل مكون من  $2n + 2m$  معادلة في  $2n + m$  مجهول. ويمكن حلها عن طريق تحليل هذا النظام الكبير وبعد ذلك نقوم بتعويض الأمامي والخلفي. وعلى أية حال إن عمل بعض هذه الحسابات يدوياً ومن ثم حل أنظمة صغيرة يجعل حل النظام أكثر فعالية. ويوجد مرحلتان لعمل هذه الأنظمة الصغيرة. المرحلة الأولى هي عبارة عن تحويل النظام الكبير إلى أنظمة صغيرة. يسمى النظام المتبقي بنظام KKT المخفض، وبعد المرحلة الثانية يسمى نظام المعادلات الناظمي. وسوف نناقش هذين النظامين في الفصلين القادمين.

#### ٢.٤ نظام KKT المخفض The Reduced KKT System

تذكر أن  $X$  و  $Y$  هن مصفوفات قطرية وبالتالي المعادلات (٣.٤) و (٤.٤) سهلة الحل، ولذلك يمكن إزالتها من البداية. ولإبقاء التماثل الذي رأيناه في

(٥.٤) يجب حل (٣.٤) و (٤.٤) بالنسبة لـ  $\Delta z$  و  $\Delta w$  على التوالي:

$$\Delta z = X^{-1}(\mu e - XZe - Z \Delta x)$$

$$\Delta w = Y^{-1}(\mu e - YWe - W \Delta y)$$

بتعويض هذه الصيغ في (١.٤) و (٢.٤)، نحصل على ما أسميناه نظام KKT المخفض:

$$A \Delta x - Y^{-1}W \Delta y = \rho - \mu Y^{-1}e + w \quad (6.4)$$

$$A^T \Delta y + X^{-1} Z \Delta x = \sigma + \mu X^{-1} e - z \quad (7.4)$$

بالتعويض في تعريف كل من  $\sigma$  و  $\rho$  ومن ثم كتابة النظام في صيغة مصفوفة نحصل على:

$$\begin{bmatrix} -Y^{-1}W & A \\ A^T & X^{-1}Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta y \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b - Ax - \mu Y^{-1}e \\ c - A^T y + \mu X^{-1}e \end{bmatrix}$$

لاحظ أن مصفوفة KKT المخفضة هي أيضاً مصفوفة متماثلة. إن الطرف الأيمن يُظهر تماثلاً بين المسألة الأساسية والثنائية. لزيادة تخفيض النظام، أولاً نحتاج لكسر هذا التماثل الذي أبقيناه إلى الآن.

### ٣.٤ المعادلات الناظمية The Normal Equation

للمرحلة الثانية، لدينا خياران: أما الأول فهو أن نقوم بحل (٦.٤) بالنسبة لـ  $\Delta y$  ونحذفها من (٧.٤)، وأما الثاني فهو أن نقوم بحل (٧.٤) بالنسبة لـ  $\Delta x$  ونحذفها من (٦.٤). الآن لنفترض أننا نتبع المنهج الأخير. في هذه الحالة نحصل من (٧.٤) على:

$$\Delta x = XZ^{-1}(c - A^T y + \mu X^{-1}e - A^T \Delta y)$$

التي نستخدمها لحذف  $\Delta x$  من (٦.٤) لنحصل على

$$\begin{aligned} -(Y^{-1}W + AXZ^{-1}A^T)\Delta y &= b - Ax - \mu Y^{-1}e \\ &\quad - AXZ^{-1}(c - A^T y + \mu X^{-1}e) \end{aligned}$$

النظام الأخير هو نظام مكون من  $m$  معادلة في  $m$  مجهول. ويسمى نظام معادلات ناظمي للمسألة الأصلية. وهو نظام المعادلات التي تتضمن المصفوفة  $Y^{-1}W + AXZ^{-1}A^T$ . والحد  $Y^{-1}W$  هو مصفوفة قطرية، ولذا فإن الجزء المهم في هذه المصفوفة هو الذي يحتوي على الحد  $AXZ^{-1}A^T$ .



لدينا  $A$  متناثرة sparse (وهذا هو الواقع في كثير من المسائل التي تأتي من التطبيقات الحقيقية العملية)، ويمكن أن نتوقع أن المصفوفة  $AXZ^{-1}A^T$  متناثرة على نفس النمط. وعلى أية حال نحتاج أن نحقق في تناثر  $AXZ^{-1}A^T$  أو عدمه بشكل أكثر دقة. لاحظ أن العناصر  $(i, j)$ th في هذه المصفوفة معطاة كالتالي:

$$(AXZ^{-1}A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{x_k}{z_k} a_{jk} \quad (٨.٤)$$

إن العنصر  $(i, j)$ th هو عبارة عن ضرب داخلي موزون بين الصف  $i$  والصف  $j$  للمصفوفة  $A$ . إذا كانت هذه الصفوف لها نمط غير صفري متباعد فإن الضرب الداخلي لا بد أن يكون صفراً، وفيما عدا ذلك يجب التعامل معه على أنه غير صفري. وهذا غير جيد لأنه إذا كانت  $A$  متناثرة ولها عمود واحد كثيف تصبح المصفوفة (٨.٤) كلها كثيفة.

ويجب أن لا ننس أنه لا يلزم أن نحل المسألة عن طريق معادلات الناظمي الأساسي. ولكن بدلاً من ذلك بإمكاننا أن نختار البديل الآخر للحل (٦.٤) بالنسبة لـ  $\Delta y$ ،

$$\Delta y = -YW^{-1}(b - Ax - \mu Y^{-1}e - A\Delta x)$$

ونقوم بحذفها من (٧.٤):

$$(A^T YW^{-1}A + X^{-1}Z)\Delta x = c - A^T y + \mu X^{-1}e + A^T YW^{-1}(b - Ax - \mu Y^{-1}e)$$

إن هذا النظام هو نظام مكون من  $n$  معادلة في  $n$  مجهول. يسمى نظام معادلات ناظمي للمسألة الثنائية. لاحظ أن الأعمدة الكثيفة لا تمثل مشكلة في هذه المعادلات. بينما هذا النظام أكبر من النظام السابق، هو أيضاً متناثر، وهذا التناثر دائماً ما يكون له أكثر أهمية من بعد المصفوفة.

وبشكل عام لا نستطيع القول أن حل نظام معادلات ناظمي للمسألة الأساسية أو حل نظام معادلات ناظمي للمسألة الثنائية هو الأفضل، فلكل حالة خصائصها وإيجابياتها و سلبياتها. وإنما نستطيع القول أنه إذا كانت المصفوفة  $A$  فيها عمود كثيف يصبح حل نظام ناظمي للمسألة الثنائية أفضل، وإذا كان فيها صف كثيف يصبح حل نظام ناظمي للمسألة الأساسية أفضل، وتكون المشكلة أكبر إذا كانت المصفوفة  $A$  فيها صف وعمود كثيفان حيث يصبح حل النظامين مكلفاً جداً.

### تمارين الباب الرابع

١.٤ أثبت أن المعادلة التالية صحيحة:

$$(E^{-1} + ADA^T)^{-1} = E - EA(A^T EA + D^{-1})^{-1} A^T E$$

حيث أن المصفوفات أعلاه قابلة للعكس.

٢.٤ استخدم المعادلة في التمرين ١.٤ للتحقق من التكافؤ بين المعادلة

$$\Delta x = (D^2 - D^2 A^T (E^{-2} + AD^2 A^T)^{-1} AD^2)(c - A^T y + \mu X^{-1} e) + D^2 A^T (E + AD^2 A^T)(b - Ax - Ye)$$

والمعادلة

$$\Delta x = (A^T E^2 A + D^{-2})^{-1}(c - A^T y + \mu X^{-1} e) + (A^T E^2 A + D^{-2})^{-1} A^T E^2 (b - Ax - \mu Y^{-1} e)$$

وذلك لـ  $\Delta x$ ، حيث  $D^2 = XZ^{-1}$  و  $E^2 = YW^{-1}$



# **Semi-Definite Programming**



## From Linear Programming to Semi-Definite Programming

- مقدمة • أهمية البرمجة
- الموجبة شبه المعرفة • حالات
- خاصة للبرمجة الموجبة شبه
- المعرفة • التطبيقات • طريقة
- النقطة الداخلية • اختيار
- طول خطوة الوسيط • تحليل
- التقارب

### 1.5 مقدمة Introduction

البرمجة الموجبة شبه المعرفة semidefinite programming هي حقل جديد نسبياً في البرمجة الرياضية، وأكثر الأبحاث والكتابات عنها كانت في

التسعينيات، بالرغم من أن جذور هذا الموضوع ممتدة منذ عقود أبعد من ذلك. حيث أن بعض الأبحاث القديمة تسمى هذا الموضوع بالبرمجة الخطية حيث المتغيرات على شكل مصفوفات.

إن الهدف هو تصغير الضرب الداخلي التالي:

$$C \bullet X = \text{tr}(CX)$$

لكل من المصفوفتين  $n \times n$  المتماثلتين  $C$  مصفوفة ثابتة و  $X$  مصفوفة متغيرات، حيث "tr" تدل على الأثر trace وهو مجموع العناصر القطرية للمصفوفة. وهي خاضعة لعدة قيود، أول هذه القيود خطي وهو:

$$\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

حيث  $A_i$  تمثل المصفوفات المتماثلة المعطاة و  $b_i$  تمثل المقاييس المعطاة. إن المسألة الموضحة أعلاه هي مجرد مسألة برمجة خطية حيث عناصر المصفوفة  $X$  تمثل المتغيرات. نضيف الآن القيد الغير خطي المحدب  $X$  أي يجب أن تكون  $X$  متماثلة موجبة شبة معرفة، يرمز لها  $X \succeq 0$ .

التحدب ينتج من تحدد مخروط المصفوفات الموجبة شبة المعرفة  $S_{\mathbb{R}^n}^+$ .

وبالتالي فإن المسألة تكون على الشكل:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \text{tr}(CX) \\ & \text{subject to} && \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & && X \succeq 0 \end{aligned}$$

والتي لها مسألة لاجرانج الثنائية المرافقة التالية:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^T y \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & && S \succeq 0, y \in \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

إن النظرية الثنائية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة أضعف منها في البرمجة الخطية. ولكن شرط الثنائية الضعيف لازال متحقق للمسألتين: إن الحلول المسموح بها  $X, y, S$  تحقق:

$$\begin{aligned} \text{tr}(CX) - b^T y &= \text{tr} \left( \left( S + \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) X \right) - \sum_{i=1}^m y_i \text{tr}(A_i X) \\ &= \text{tr}(SX) \geq 0 \end{aligned}$$

حيث أن عدم المساواة الموجود في  $\text{tr}(SX) \geq 0$  هو بسبب المتباينات  $X \succeq 0$  و  $S \succeq 0$ . أي إن الفجوة الثنائية ليست سالبة للحلول المسموح بها. إن الحلول  $(X, y, S)$  هي حلول مثلى عندما تكون الفجوة الثنائية تساوي الصفر:

$$\text{tr}(CX) - b^T y = \text{tr}(SX) = 0$$

لمسألة البرمجة الخطية، إذا كانت المسألة الأساسية أو الثنائية لها حل أمثل، فإن كلتا المسألتين لهما حل أمثل، وتكون الفجوة الثنائية عند الحل الأمثل تساوي صفراً. هذه إحدى أقوى خصائص الثنائية وتسمى خاصية الثنائية القوية strong duality. وفي حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة فإن هذه الخصائص أضعف: إما لعدم وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية أو أن تكون الفجوة الثنائية موجبة عند الحل، وهذه الأسباب من الممكن التغلب عليها. إن وجود الحلول المثلى الأساسية والثنائية مضمونة إذا كانت كلتا المسألتين الأساسية والثنائية لها حلول مسموح بها موجبة معرفة، على سبيل المثال،  $X \succ 0$  و  $S \succ 0$ . وهذه تسمى: شرط قيد سلتر المؤهل Slater constraint qualification



(أو تسمى شرط سلتر للانتظام (slater regularity condition). وسوف يناقش موضوع الثنائية بالتفصيل في الباب السادس.

## ٢.٥ أهمية البرمجة الموجبة شبه المعرفة

### In the Important of Semi Definite Programming

- مسائل البرمجة شبه المعرفة هي محل اهتمام لعدة أسباب، من ضمنها:  
البرمجة الموجبة شبه المعرفة تحتوي على مواضيع مهمة كثيرة ويكفي أن نعلم أن البرمجة الخطية والبرمجة التربيعية هما حالات خاصة من البرمجة الموجبة شبه المعرفة.
  - نجد تطبيقات مهمة في الأمثلة التوافقية ونظرية التقارب ونظرية التحكم والنظام و الهندسة الميكانيكية والكهربائية.
  - مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة يمكن أن تُحل بدقة عالية وبوقت قياسي بواسطة خوارزميات النقطة الداخلية. فخوارزميات النقطة الداخلية للبرمجة شبه المعرفة تمت دراستها بشكل كبير في التسعينيات، وهذا يفسر وجود نهوض في البحث العلمي فيما يتعلق بالبرمجة شبه المعرفة.
- كل هذه المواضيع ستناقش بشكل مختصر فيما تبقى من هذا الباب.

## ٣.٥ حالات خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة

### Special Cases of Semi Definite Programming

إذا كانت المصفوفة  $X$  مقيدة بحيث تكون قطرية، فإن المتطلب أن  $X \succeq 0$  يتحول للمتطلب بأن عناصر القطر  $X$  يجب أن تكون غير سالبة. من

ناحية أخرى لدينا مسألة البرمجة الخطية ومسائل الأمثلة مع قيود محدبة من الدرجة الثانية. هذه المسائل تعتبر أيضاً حالات خاصة من البرمجة الموجبة شبه المعرفة. وهذا واضح من نظرية متممة شور shcur complement المشهورة. وهكذا يمكننا أن نُمثل القيد من الدرجة الثانية بالشكل التالي:

$$(Ax+b)^T(Ax+b) - (c^T x + d) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

وذلك بواسطة القيد شبه المعرفة

$$\begin{bmatrix} I & Ax+b \\ (Ax+b)^T & c^T x + d \end{bmatrix} \succeq 0$$

بالطريقة نفسها يمكننا تمثيل المخروط من الدرجة الثانية:

$$\left\{ (t, x) \mid t \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right\}$$

باختيار مصفوفة سهم arrow matrix مناسبة تكون موجبة شبه معرفة ينتج لدينا

$$\begin{bmatrix} tI & x \\ x^T & t \end{bmatrix} \succeq 0.$$

مثال آخر غير خطي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ \text{subject to} & Ax \geq b \end{array}$$

حيث أن  $d^T x > 0$  إذا كانت  $Ax \geq b$ . إن المسألة المكافئة وعلى شكل برمجة موجبة شبه معرفة هي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & \begin{bmatrix} t & c^T x & 0 \\ c^T x & d^T x & 0 \\ 0 & 0 & \text{Diag}(Ax-b) \end{bmatrix} \succeq 0 \end{array}$$

عدة مسائل تتضمن تحقيق معيار المصفوفة أو مسألة تصغير القيم الذاتية eigenvalues، من الممكن أن تكتب على شكل برمجة موجبة شبه معرفة. مجموعة من هذه المسائل ممكن أن نجدها في [VB]. أبسط مثال المسألة الكلاسيكية وهي إيجاد القيمة الذاتية العظمى  $\lambda_{\max}(A)$  للمصفوفة المتماثلة  $A$ . إن مفتاح المسألة هنا هو أن  $t \geq \lambda_{\max}(A)$  إذا وإذا فقط  $tI - A \succeq 0$ . لذا مسائل البرمجة شبه المعرفة تصبح على الشكل التالي:

$$\begin{array}{ll} \text{minimize} & t \\ \text{subject to} & tI - A \succeq 0, \quad t \in \mathbb{R} \end{array}$$

إن خوارزمية البرمجة شبه المعرفة لهذه المسألة موضحة في [JRT].

## ٤.٥ التطبيقات Applications

هناك الكثير من التطبيقات للبرمجة شبه الموجبة في الرياضيات والهندسة، سوف نذكر بعض منها.

**مسألة القاطع الأعظم MAX-CUT وامتداداتها:**

تطبيق آخر مشهور للبرمجة الموجبة شبه المعرفة لتحقيق الأمثلية التوافقية هو مسألة القاطع الأعظم. اعتبر الرسم  $G = (V, E)$  حيث أن كل حرف  $(i, j)$  له وزن معطى  $(i \neq j)$ ،  $w_{i,j} \geq 0$ .

الهدف أن نقوم بتلوين جميع رؤوس الرسم  $G$  باستعمال لونين (ولنختار الأحمر والأزرق) بطريقة معينة بحيث يكون الوزن الكلي للحرف الذي لطرفيه لونين مختلفين أكبر ما يمكن، ويسمى الحرف غير المعيب Non defect edges. إن هذه الأحرف غير المعيبة تعرف قاطع في الرسم، بحيث لو تم قطع جميع الأحرف الغير معيبة لثم فصل الرؤوس ذات اللون الأحمر من الرؤوس ذات اللون الأزرق. لذا فإن الوزن الكلي للأحرف الغير معيبة يسمى وزن القاطع.

اشتق [GW] خوارزمية عشوائياً لهذه المسألة باستخدام البرمجة شبه المعرفة. الخطوة الأولى كانت بكتابة مسألة القاطع الأعظم على أنها مسألة أمثلة بولين التربيعية Boolean quadratic optimization problem. حيث متغير بولين يأخذ أحد العددين الصحيحين واحداً أو صفراً، بمعنى آخر هي مسألة أمثلة مع دالة هدف تربيعية ومتغيرات بولين. سوف نعين لكل رأس في  $V$  إحدى القيمتين  $\{-1, 1\}$  بحيث:

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان الرأس } i \text{ أحمر} \\ -1 & \text{إذا كان الرأس } i \text{ أزرق} \end{cases}$$

حيث  $|V|$  و  $i = 1, \dots, |V|$  تمثل عدد العناصر في  $V$ . لاحظ أن للحرف المعطى  $(i, j) \in E$  لدينا

طرق النقطة الداخلية

$$x_i x_j = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } (i, j) \text{ معيب} \\ -1 & \text{إذا كان } (i, j) \text{ غير معيب} \end{cases}$$

وبناء على ذلك يكون وزن القاطع الأكبر هو:

$$MC = \max_{x \in \{-1,1\}^{|V|}} \frac{1}{2} \sum_{i < j} w_{ij} (1 - x_i x_j) = \max_{x \in \{-1,1\}^{|V|}} \frac{1}{4} x^T L x, \quad (1.5)$$

حيث  $L$  هي المصفوفة

$$L = -W + \text{Diag}(We)$$

حيث  $W$  مصفوفة عناصر قطرها أصفار وأما العناصر الغير قطرية فهي غير سالبة تمثل أوزان الأحرف، و  $e$  هو متجه جميع مركباته تساوي الواحد.

إذا كانت كل الأوزان صفراً أو واحداً، فمن ثم تكون  $L$  ببساطه هي عبارة عن لابلاس الرسم Laplacian of the graph. لاحظ أن  $L$  هي مصفوفة قطرية مهيمنة diagonally dominant، وهي بالتالي موجبة شبه معرفة.

يمكننا تخفيف المسألة (1.5) وبالتالي تحويلها إلى مسألة برمجة شبه

معرفة وذلك بملاحظة أربعة أشياء:

١.  $x^T L x = \text{tr}(L x x^T)$ ، من خصائص مؤثر الأثر trace operator.

٢. المصفوفة  $X = x x^T$  موجبة شبه معرفة.

٣. عناصر قطر المصفوفة  $X = x x^T$  معطاة بـ  $x_i^2 = 1$ .

٤. المصفوفة  $X = x x^T$  لها الرتبة واحد.

إذا أسقطنا آخر الشروط (الرتبة واحد) نصل إلى التخفيف المطلوب،

فيكون لدينا مسألة البرمجة شبه المعرفة التالية:

$$\begin{aligned} \text{MC} \leq \text{MCR} = \text{maximize} \quad & \frac{1}{4} \text{tr}(LX) \\ \text{subject to} \quad & \text{diag}(X) = e \\ & X \succeq 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

ابتكر [GW] مخططاً عشوائياً تقريبياً، حيث استعمل الحل الأمثل في (2.5) لتوليد القواطع في الرسم.

### كثيرة الحدود الغير سالبة

من المعروف أن أحادي المتغير لكثيرة الحدود المتجانسة غير سالبة على  $\mathbb{R}$  إذا وإذا فقط أمكن كتابتها كمجموعة مربعات. وهذا غير صحيح في حالة وجود أكثر من متغير. إن البرمجة شبه المعرفة يمكن أن تستخدم لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود متجانسة لها مجموع مربعات قابل للتحليل. إذا كانت كثيرة الحدود متعددة الحدود المتجانسة  $p(x)$  موجبة على  $\mathbb{R}^n$ ، من ثم

$$p(x) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^r \quad (3.5)$$

فإنه يمكن أن تكتب كمجموعة مربعات لـ  $r$  بحيث تكون كبيرة بشكل كافٍ، حتى ولو كان هذا غير متحقق لـ  $p(x)$ . هذه النظرية بواسطة [Po] لها علاقة بالمسألة ١٧ لهيلبرت الشهيرة Hilbert problem 17th.

لقيمة معطاة  $r$  يمكننا استخدام البرمجة الموجبة شبه المعرفة لتحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود (3.5) يمكن أن تكتب كمجموعة مربعات. إن أحد التطبيقات هو أن نضع شروطاً كافية للمصفوفة مزدوجة الإيجاب. نقول أن المصفوفة المتماثلة  $A$  مزدوجة الإيجاب copositive إذا كانت

$$x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n$$

أو بشكل مكافئ

$$p_A(x) = \sum_{ij} a_{ij} x_i^2 x_j^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

حيث  $\mathbb{R}_+^n$  تمثل المتجهات ذات المركبات الموجبة. وبالتالي فإنه من الممكن أن نعطى الشرط الكافي لمزدوجة الإيجاب عن طريق تحديد ما إذا كانت كثيرة الحدود المتجانسة  $p_A(x) \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^r$  قابلة للتحليل إلى مجموعة مربعات لمعطى  $r \geq 1$ . لمزيد من المعلومات انظر [Pa].

#### التطبيقات الهندسية

أحد أغنى الحقول التطبيقية حالياً للبرمجة الموجبة شبه المعرفة هي نظرية التحكم والنظام، حيث أصبحت البرمجة الموجبة شبه المعرفة أداة مؤسسية وقائمة بذاتها. من الممكن الرجوع إلى بعض هذه التطبيقات في [BGFB]. والتغطية الأكثر حداثة لهذا الموضوع كانت لـ [BW]. أمثلة تمهيدية من الممكن أن تجدها في [VB] و [OI]. المرجع الأخير يتعامل مع مسائل التحكم والسيطرة على نشاط الضوضاء: إن مستوى الضوضاء داخل قبة يقل عن طريق إصدار موجات صوتية مع نفس التردد، ولكن مع التغيير المناسب للمرحلة. تتضمن مسألة التحكم التحتية تحقيق الأمثلة على مخروط الرتبة الثانية الموضح في الفصل ٣.٥ على أنه حالة خاصة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة.

التطبيقات الهندسية الأخرى للبرمجة الموجبة شبه المعرفة تتضمن مقياس الترانزيستور و نمط الاعتراف التي تستعمل للقطع الناقص [VB].

تطبيق آخر مهم هو التصميم الإنشائي، حيث أن البرمجة الموجبة شبه المعرفة تتضمن التصميم الجملوني الأمثل. هناك مسألتا أمثلة مختلفتان هما:

- ١- تقليل وزن البنية ، بحيث يبقى التردد الأساسي للمبنى بعيداً عن الوضع الحرج والخطير.
- ٢- التقليل من الالتزام بخزن الطاقة في الدعامة في أسوأ الأحوال ، حيث القيود هي مجموع القوى التي يجب على البنية مقاومتها.
- من الأمور التي يجب التركيز عليها في التصميم المثالي هي القوة. بمعنى آخر : في معظم الأحوال علينا أن نضع مجالاً لعدم دقة البيانات في مسائل تحقيق الأمثلة وحساب أفضل الحلول في أسوأ الأحوال. لمزيد من المعلومات في تطبيقات البرمجة الموجبة شبه المعرفة في التصميم المثالي يرجع إلى [BGN] و [BN]. وهناك تطبيقات أخرى كثيرة على سبيل المثال ارجع إلى [AW,AF,Alh].

### ٥.٥ طريقة النقطة الداخلية Interior Point Method

علينا تذكر الصلة بين البرمجة الخطية والبرمجة الموجبة شبه المعرفة ، وأن خوارزمية النقطة الداخلية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة هي عبارة عن امتداد ناجح لنفس الخوارزمية في البرمجة الخطية.

إن حقل طريقة النقطة الداخلية للبرمجة الخطية بدأ تقريباً بخوارزمية الجسم الناقص لكاشيان [Kh] سنة ١٩٧٩م. إن خوارزمية الجسم الناقص تضع حداً للدورات السيئة. وهذا حل لسؤال ما إذا كانت مسائل البرمجة الخطية قابلة للحل في وقت قياسي ، ولكن التجربة العملية بطريقة الجسم الناقص لم تكن كما هو متوقع. إن التطوير الأساسي كان عن طريق الأبحاث التي قدمها كارماركر [Kr] سنة ١٩٨٤م ، التي قدمت الخوارزمية ولكن بشكل مطور ومعقد ومرتبطة وتظهر فيه الكفاءة الحسابية. في العقد التالي ظهرت آلاف



البحوث في هذا الموضوع. إن تقرير [Go] عبارة عن مسح كامل يغطي الفترة الأخيرة لطرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية حتى سنة ١٩٩٢م. وهناك عدة كتب جديدة ظهرت مؤخراً، من ضمنها كتب لـ روز وآخرون [RTV]. إن تثبيت ادعاء الكفاءة الحسابية لطرق النقطة الداخلية أخذ أكثر من عشر سنوات تقريباً. خرج خلالها عدة دراسات أشارت إلى أن هذه الطرق لها أداء متفوق على طريقة السمبلكس عند حل المسائل ذات الحجم الكبير large scale problem. انظر على سبيل المثال [LMS,AA].

إن أول تمديد لطريقة النقطة الداخلية من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة كان من قبل [Ali1] سنة ١٩٩١م، وبشكل مستقل كان من قبل [NN] سنة ١٩٩٤م. هذا يوضح نهوض البحث العلمي المهتم بالبرمجة الموجبة شبه المعرفة في التسعينات. درس [NN] مسائل الأمثلة المحدبة في الصياغة المخروطية العامة conic formulation:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T x \\ & \text{subject to} && x \in (\mathcal{L} + b) \cap \mathcal{C} \end{aligned}$$

حيث  $\mathcal{L}$  تمثل الفضاء الجزئي الخطي لـ  $\mathbb{R}^n$ ،  $c, b \in \mathbb{R}^n$  و  $\mathcal{C}$  هو مخروط محدب مغلق مدبب غير خالي الداخل nonempty interior. إن المسألة الثنائية المرافقة هي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^T y \\ & \text{subject to} && y \in (\mathcal{L}^\perp + c) \cap \mathcal{C}^* \end{aligned}$$

حيث  $\mathcal{L}^\perp$  هي المتممة المتعامدة مع  $\mathcal{L}$  في  $\mathbb{R}^n$ ، و  $\mathcal{C}^*$  هي المخروط الثنائي لـ  $\mathcal{C}$ :

$$\mathcal{C}^* = \{x \mid \langle x, y \rangle \geq 0 \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

لاحظ أننا تخلصنا من كون المسألة غير خطية بالمخروط المحدب. وفي حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هذا المخروط هو مخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة.

$$\mathcal{S}_n^+ = \{X \mid X \in \mathcal{S}_n, X \succeq 0\},$$

حيث  $\mathcal{S}_n$  تمثل فضاء المصفوفات المتماثلة  $n \times n$ . قام [NN] بتوضيح أن مسائل الأمثلة المخروطية يمكن أن تحل بتقنية متتالية من مسائل التصغير. حيث أن القيد المخروطي أبعد و أضعف حد دالة الحاجز إلى دالة الهدف. هذه دوال محدبة وملساء smooth وقابلة للاشتقاق من الدرجة الثانية وتحقق شرط لبشتز Lipschitz condition بالنسبة إلى مقياس متري محلي (هذا المقياس هو المقياس المقدم بواسطة مصفوفة هاس لدالة نفسها).

إن دالة الحاجز تقترب من مالا نهاية كلما اقتربنا من حد المخروط، ويمكن أن نحصل على الحل الأمثل بطريقة فعالة وذلك بطريقة نيوتن. إن كل مخروط محدب  $\mathcal{C}$  يمتلك حاجزاً طبيعياً ذاتياً، بالرغم من أن مثل هذه الحواجز متوافق فقط مع بعض المخاريط الخاصة. إن الدالة  $f(x) = -\sum_{i=1}^n \log(x_i)$  تمثل حاجزاً للثمن الموجب لـ  $\mathbb{R}^n$ ، ولها دور فعال في تصميم طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية.

وعلى نفس النمط، الدالة

$$f(X) = -\log \det(X)$$

هي حاجز طبيعي ذاتي لمخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. باستعمال هذا الحاجز، هناك الكثير من الخوارزميات التي قد تصاغ بحيث يكون لها في أسوأ الحالات فعالية عالية في إيجاد الحلول المثلى في وقت قياسي، أي أن الحلول

المسموح بها  $(X^*, S^*)$  لها فجوة ثنائية أقل من  $\varepsilon$  ، أي أن  $\text{tr}(X^* S^*) \leq \varepsilon$  ، حيث  $\varepsilon > 0$  مقياس تحمل معطى.

### طرق الحاجز اللوغاريتمية

**الطرق الأساسية:** طرق الحاجز اللوغاريتمية الأساسية primal log-barrier methods تستعمل طريقة نيوتن الإسقاطية لحل المسائل التي لها الصيغة:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \text{tr}(CX) - \mu \log \det(X) \\ & \text{subject to} \quad \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

حيث أن الوسيط  $\mu$  يقل بشكل تدريجي إلى الصفر. مثل هذه الخوارزميات قام بتحليلها [Fa] ولاحقاً من قبل مؤلفين آخرين مثل [HDRT,AF]. لاحظ أن الشرط  $X \succeq 0$  أُستبدل بإضافة (حد حاجز) إلى دالة الهدف. الشرط  $X \succeq 0$  يضمن التحكم بعملية نيوتن بعناية، التناقص الكبير  $\mu$  يستلزم التمسك بخطوات نيوتن بينما التحديثات الصغيرة تسمح بخطوات نيوتن كاملة. هذه النتائج سوف نقوم بدراستها بشكل مفصل في الباب التاسع.

**الطرق الثنائية:** طرق الحاجز اللوغاريتمية الثنائية وهي تشابه الطريقة

الأساسية، ونقوم من خلالها بحل سلسلة من المسائل

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad b^T y - \mu \log \det S \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \end{aligned}$$

حيث أن الوسيط  $\mu$  مرة أخرى يقل بشكل تدريجي إلى الصفر.

لقد كان هناك نهوض في الاهتمام في هذه الطرق مؤخراً. إن السبب هو أننا نستطيع استغلال تناثر تركيبة المسألة، مثل مسألة القاطع الأعظم المخففة المبينة في الفصل الرابع من هذا الباب، حيث نستطيع حلها بشكل أكثر

كفاءة من طرق النقطة الداخلية الأخرى. هذه التطورات سوف نقوم بدراستها بشكل مفصل في الباب التاسع.

**الطرق الأساسية الثنائية:** مثلما لقيت الطرق الأساسية الثنائية للبرمجة الخطية كثيراً من الاهتمام كذلك لقيت تلك الطرق للبرمجة الموجبة شبه المعرفة كثيراً من الاهتمام. وهذه الطرق تصغر الفجوة الثنائية

$$\text{tr}(CX) - b^T y = \text{tr}(XS)$$

وتستخدم ضم دالة الحاجز الأساسية والثنائية

$$-\log \det(X) + \log \det(S) = -\log \det(XS)$$

هذا يعني بأن سلسلة المسائل ذات الصيغة التالية محلولة

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \text{tr}(XS) - \mu \log \det(XS) \\ &\text{subject to} \end{aligned} \quad (٤.٥)$$

$$\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad \forall i$$

$$\sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C$$

إن تصغير المسألة (٤.٥) يحقق

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(A_i X) &= b_i, & i &= 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S &= C \\ XS &= \mu I \\ X, S &\succ 0 \end{aligned} \right\} \quad (٥.٥)$$

هذه المعادلات يمكن أن ينظر إليها كتشويش بسيط على شروط الأمثلة بالنسبة للمسألة الأساسية والثنائية، حيث  $\mu = 0$ . إن النظام (٥.٥) له حل وحيد

تحت فرضية أن  $A_i$  (  $i = 1, \dots, m$  ) مستقلة خطياً linearly independent ، وتوجد حلول مسموح بها للمسألة الأساسية والمسألة الثنائية. هذه الحلول سوف يرمز لها بـ  $X(\mu), S(\mu), y(\mu)$  ، ويمكن أن ينظر له كوسيط يمثل المنحنى الأملس بدلالة الوسيط  $\mu$  ويسمى المسار الأوسط. وخصائص المسار الأوسط بالنسبة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة موضحة بشكل أكبر في الباب السابع. طرق الحاجز اللوغاريتمية تسمى أيضاً طرق تابع المسار ، بسبب العلاقة بين المسار الأوسط ودالة الحاجز اللوغاريتمية.

طرق الحاجز اللوغاريتمية الأساسية الثنائية يمكن من خلالها حل النظام (٥.٥) بشكل تقريبي ، يتبعها تخفيض في  $\mu$  . إن الهدف هو الحصول على اتجاهات أساسية وثنائية  $\Delta X$  و  $\Delta S$  ، على التوالي ، وبذلك تحقق  $X + \Delta X \geq 0$  ,  $S + \Delta S \geq 0$  بالإضافة إلى

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(A_i \Delta X) &= 0, & i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i + \Delta S &= 0 \\ (X + \Delta X)(S + \Delta S) &= \mu I \\ \Delta X &= \Delta X^T \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

إن المعادلة الثالثة في (٦.٥) غير خطية ، والنظام زائد التحديد overdetermined . ربما الحل الأكثر بساطة هو جعل النظام (٦.٥) خطي وبعد ذلك البحث عن حل أصغر مربعات least squares للنظام الخطي زائد التحديد الناتج (طريقة جوس نيوتن Gauss-Newton method). هذا التوجه اشتقه وشرحه كلاً من [DPRT, KMRVW].

وهناك توجه آخر من قبل [Zh] الذي اقترح استبدال المعادلة الغير خطية في

(٦.٥) بـ

$$H_p(\Delta XS + X \Delta S) = \mu I - H_p(XS) \quad (٧.٥)$$

حيث  $H_p$  هي التحويل الخطي المعطى بـ

$$H_p(M) = \frac{1}{2} [PMP^{-1} + P^{-T} M^T P^T]$$

لأي مصفوفة  $M$ . أن مصفوفة الموازنة  $P$  Scaling matrix تحقق استراتيجية التماثل. هناك بعض الخيارات الأخرى الشائعة لـ  $P$  منها:

$P$	المرجع
$I$	[AHO]
$X^{-\frac{1}{2}}$	[Mo,HRVW,KSH]
$S^{\frac{1}{2}}$	[Mo,KSH]
$[X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$	[NT]

جدول ١.٥: خيارات مصفوفة الموازنة  $P$

إذا قمنا باستبدال المعادلة الغير خطية في (٦.٥) بـ (٧.٥)، وأسقطنا المتطلب  $\Delta X = \Delta X^T$ ، سوف نحصل على نظام خطي على شكل مربع كامل. علاوة على ذلك إذا كان لهذا النظام حل فإن  $\Delta X$  متماتلة. إن إثبات وجود ووحداية كل من الاتجاهات أعلاه مذكور في [SSK].

إن الصيغة  $[X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$  في الجدول ١.٥ عليه بعض الملاحظات منها: في [NT] شُرح أن لكل زوج  $X > 0, S > 0$  يوجد مصفوفة  $D$  بحيث أن

$$\nabla^2 f(D)X = S.$$

إن مصفوفة هاس  $\nabla^2 f(D)$  هي مؤثر خطي يحقق

$$\nabla^2 f(D) : X \mapsto D^{-1}XD^{-1}.$$

حيث يترتب على ذلك  $X = DSD$  ، ومنها بسهولة يتبين لنا أن  $D = P^2$  . وبهذه الطريقة نحصل على الموازنة الأساسية الثنائية المتماثلة  $P^{-1}XP^{-1} = PSP$  . هناك العديد من اتجاهات البحث الأساسية الثنائية الأخرى غير المذكورة أعلاه.

تختلف الخوارزميات في كيفية تحديث  $\mu$  ، وكيفية حل المعادلات المتماثلة. هناك الطرق التي تستخدم التخفيضات الكبيرة لـ  $\mu$  تُتبع بعدة خطوات ثابتة لنيوتن تسمى طرق الخطوة الطويلة أو التحديث الكبير. وقام بتحليلها [Ji] وغيره.

وهناك الطرق التي تستخدم التحديثات الديناميكية لـ  $\mu$  ومنها طرق التنبؤ والتصحيح predictor-corrector methods. انظر المراجع [AHO,PS] وغيرها.

كانت هناك عدة تطبيقات لخوارزميات التنبؤ والتصحيح للبرمجة الموجبة شبه المعرفة ، منها سدومي [St] SeDuMi و SDPT3 عن طريق [TTT]. في الباب التاسع سوف نقوم بمراجعة لطرق تابع المسار الأساسية الثنائية التي تستخدم اتجاه [NT].

هناك طرق تبدأ من نقاط خارج الحلول المسموح بها. من الطرق التي تستخدم هذه الإستراتيجية طريقة M الكبيرة big-M موضحة في [VB]، وهناك مراجع أخرى لطرق التي تبدأ من حلول غير مسموح بها منها [KSS,PS] وغيرها.

طريقة أنيقة لتجنب وسائط M الكبيرة هي أن نطمر embed مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة في مسألة أكبر تكون لها نفس الثنائية، ويكون فيها نقطة البداية المسموح بها معروفة. حل مسألة الطمر الثنائية الذاتية self-dual embedding يعطي معلومات لحل المسألة الأساسية. إن فكرة طمر الثنائية الذاتية للبرمجة الخطية تعود إلى الخمسينيات من هذا القرن بمجهودات كل من [GT]. وبعد طرق النقطة الداخلية للبرمجة الخطية أنعشت فكرة الطمر لتستخدم في الخوارزميات التي تبدأ من نقاط خارج الحلول المسموح بها بواسطة [YTM].

إن تمديد فكرة طمر مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة في مسألة ثنائية ذاتية مع وجود نقطة بداية معلومة على المسار الأوسط للبرمجة الموجبة شبه المعرفة قد قام بإثباتها [DRT] وغيرهم. وبشكل مستقل قام بإثباتها [LSZ]، كما امتداد للعمل الذي قام به [PS] باستخدام ما يدعى الطمر المتجانس. وسوف نقوم بشرح مفصل لنظرية الطمر في الباب الثامن.

قام [NN] بعمل كبير له الأثر الواضح، حيث درسنا حالات خاصة لمسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة، بالإضافة إلى التطوير الكامل لمنهجية النقطة الداخلية. كما قام [VB] بتغطية جيدة تعاملت مع النظرية الأساسية والتطبيقات المتنوعة وخوارزميات التصغير المحتملة إلى العام ١٩٩٥م. يوجد ثلاثة



استطلاعات أكثر حداثة وهي تركز أكثر على تطبيقات البرمجة الموجبة شبه المعرفة في تحقيق الأمثلية التوافقية كانت من قبل [Ali2,RP,Go]. كما تعامل [Ali2] مع المنهجية العلمية للنقطة الداخلية أيضاً، بينما [RP] استعرض الخصائص الهندسية للمجموعة العملية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة التي تسمى سبكتوهديرا spectrahedra وهي منطقة الحلول المسموح بها في البرمجة الموجبة شبه المعرفة، بالإضافة إلى النتائج المعقدة والشائبة. نظرة تاريخية لطيفة للتطور البرمجة الموجبة شبه المعرفة مفصلة عند [LO] حيث ركزا على علاقتها بتحقيق الأمثلة للقيمة الذاتية. وأما الأكثر حداثة فهو كتاب عن البرمجة الموجبة شبه المعرفة [WSV] الذي يغطي الجوانب النظرية والتطبيقية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة إلى عام ٢٠٠٠ م.

## تمارين الباب الخامس

١.٥ أوجد المسألة الشائبة المقابلة للمسألة التالية:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \frac{(c^T x)^2}{d^T x} \\ & \text{subject to} && Ax \geq b \end{aligned}$$

٢.٥ لتكن  $n = m = 3$ ،  $b = [1 \ 0 \ 0]$  وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن الحلول المثلى للمسألتين الأساسية والثنائية هي:

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_i^* = 0 \quad (i=1,2,3), \quad S^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

أوجد المسألة الثنائية المقابلة للمسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة أعلاه؟

٣.٥ اثبت لتمرين ٢.٥ أن:

$$\text{tr}(CX) - b^T y = \text{tr}(SX) = 0$$



## Duality and Optimality

- مقدمة • المسائل بشكل
- القياسي • الثنائية القوي
- والضعيف • مجموعة الحلول
- المسموح بها • شروط الأمثلة

### 1.6 مقدمة Introduction

بشكل عام من الممكن إعادة صياغة جميع مسائل الأمثلة المحدبة على شكل ما يسمى البرمجة الخطية المخروطية conic linear programs. هذه المسائل هي دالة هدف خطية ومجموعة حلول مسموح بها هي عبارة عن تقاطع فراغ تآلفي affine space مع مخروط محدب convex cone. إن جميع المعادلات الغير خطية في البرمجة الخطية المخروطية هي متضمنة في تعريف المخروط المحدب. إن للبرمجة الخطية المخروطية خاصية الثنائية القوية تحت قيود مؤهلة.

وإذا كان الفراغ التآلفي يتقاطع مع الداخل النسبي  $\text{relative interior}$  للمخروط، فإن المسألة الثنائية تكون قابلة للحل، حيث قيمة الحل الأمثل لدالة الهدف هي نفسها بالنسبة للمسألة الأساسية. وذلك إذا كانت مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية غير خالية.

من الممكن صياغة تصنيف جزئي subclass من البرمجة الخطية المخروطية إذا اعتبرنا المخاريط التي لها نفس الثنائية، أي أن المخروط الأساسي والثنائي للمسألة متطابقان. هناك ثلاث مخاريط تنطبق عليها هذه الخاصية في الأعداد الحقيقية وهي: الثمن الموجب في  $\mathbb{R}^n$  ومخروط لورنتر Lorentz Cone أو مخروط الرتبة الثانية، ومخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. هذه المخاريط بترتيبها تُعرف كل من مخروط مسائل البرمجة الخطية ومخروط مسائل الرتبة الثانية ومسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة. إن كون هذه المخاريط لها نفس الثنائية يضمن لنا تماثلاً مثالياً بين المسألة الأساسية والمسألة الثنائية، أي أنه من الممكن بشكل دقيق تمثيل المسألة الأساسية والمسألة الثنائية بنفس الصيغة. وكما شرحنا في الباب الخامس إن مسائل البرمجة الخطية وبرمجة الرتبة الثنائية يمكن أن ينظر لها على أنها حالة خاصة من مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة.

في هذا الباب سوف ندرس بعض خواص النظرية الأساسية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة. كما سوف نعرف الشكل القياسي للبرمجة الموجبة شبه المعرفة ونشتق المسألة الثنائية المرافقة. أيضاً سنثبت أن النظريات الكلاسيكية للثنائية القوية والضعيفة تكون هي الشرط اللازم والكافي لشروط الأمثلة للبرمجة الموجبة شبه المعرفة عندما تكون على شكل القياس.

## ٢.٦ المسائل بالشكل القياسي Problems in Standard Form

فيما يلي سوف نعطي الشكل القياسي للمسألة الأساسية:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \text{tr}(CX) \\ & \text{subject to} && \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & && X \in \mathcal{S}_n^+ \end{aligned} \quad (1.6)$$

حيث  $\mathcal{S}_n^+$  ترمز لمجموعة المصفوفات الموجبة شبه المعرفة. وكذلك يكون

الشكل القياسي للمسألة الثنائية على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && b^T y \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & && S \in \mathcal{S}_n^+, y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (2.6)$$

إن  $X$  و  $(y, S)$  هي عبارة عن حلول مسموح بها، لأنهما يحققان قيود المسألة الأساسية والثنائية على التوالي. سوف نرمز لمجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية بالرمز التالي:

$$\mathcal{P} = \{X \mid \text{tr}(A_i X) = b_i, X \succeq 0, i = 1, \dots, m\}$$

وبالمثل سوف نرمز لمجموعة الحلول المسموح بها بالنسبة لمسألة الثنائية بالرمز التالي:

$$\mathcal{D} = \{(y, S) \mid \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, S \succeq 0, y \in \mathbb{R}^m\}$$

بالمثل نرمز لمجموعة الحلول المثلى للمسألة الأساسية بالرمز:

$$\mathcal{P}^* = \{X \in \mathcal{P} \mid \text{tr}(CX) = p^*\}$$

ونرمز لمجموعة الحلول المثلى للمسألة الثنائية بالرمز:

$$\mathcal{D}^* = \{(S, y) \in \mathcal{D} \mid b^T y = d^*\}$$

حيث القيمتين  $p^*$  و  $d^*$  هما قيمة الحل الأمثل لكل من (١.٦) و (٢.٦) بالترتيب. سوف تكون  $p^* = -\infty$  إذا كانت المسألة الأساسية غير محدودة. و  $p^* = \infty$  إذا كانت المسألة الأساسية ليس لها حلول مسموح بها أي أن  $(\mathcal{P} = \emptyset)$ . وبالمثل بالنسبة للمسألة الثنائية.

تكون (١.٦) وبالمثل (٢.٦) قابلة للحل إذا كانت  $\mathcal{P}^*$  غير خالية و  $D^*$  غير خالية. ومن الواضح أن (٢.٦) هي ثنائية لاجرانج لـ (١.٦). لاحظ أن

$$\begin{aligned} p^* &= \min_{X \geq 0} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ \text{tr}(CX) - \sum_{i=1}^m y_i (\text{tr}(A_i X) - b_i) \right\} \\ &= \min_{X \geq 0} \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y + \text{tr} \left( \left( C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) X \right) \end{aligned}$$

من الممكن استنتاج ثنائية لاجرانج لـ (١.٦) بتبديل التعظيم بالتصغير فينتج لدينا:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^T y + \min_{X \geq 0} \text{tr} \left( \left( C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) X \right) \right\} \quad (٣.٦)$$

إن مسألة التصغير الموجودة داخل (٣.٦) محدودة من الأسفل، إذا وإذا فقط

$$\text{tr} \left( \left( C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \right) X \right) \geq 0 \quad \forall X \geq 0$$

أي أنه إذا وإذا فقط

$$C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \geq 0 .$$

في هذه الحالة يتضح أن مسألة التصغير الموجودة داخل (٣.٦) لها قيمة مثلى تساوي الصفر. وبالتالي فالمسألة (٣.٦) يمكن إعادة كتابتها على الشكل التالي:

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} \left\{ b^T y \mid C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \succeq 0 \right\}.$$

وبتعريف  $S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i$  نحصل على (٢.٦).

في هذا الجزء من الكتاب سوف نفترض فرضيتين، الأولى: أن المصفوفات  $A_i$  مستقلة خطياً، وبالتالي فإن  $y$  محددة بشكل وحيد لمصفوفة معطاة  $S$  من مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية، أي أن  $S \in \mathcal{D}$ . وهذا يسمح لنا أن نكتب  $y \in \mathcal{D}$  أو  $S \in \mathcal{D}$  بدلاً من  $(y, S) \in \mathcal{D}$ . إن هذه الفرضية هي نفس الفرضية الموجودة في البرمجة الخطية التي تفترض أن مصفوفة القيود لها الرتبة الكاملة. ولكي ترى ذلك لاحظ أن استقلال المصفوفات  $A_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) خطياً يكافئ استقلال المتجهات  $vec(A_i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) خطياً، حيث  $b = vec(B)$  هو المتجه المكون من أعمدة  $B$  بعضها فوق بعض. وبالتالي من الممكن اعتماد هذه الفرضية من دون أن نفقد العمومية.

والفرضية الثانية هي ما تسمى بوجود الحلول المسموح بها فعلياً strict feasibility. أي أنه يوجد  $X \in \mathcal{P}$  و  $S \in \mathcal{D}$  بحيث أن  $X \succ 0$  و  $S \succ 0$ . إن مثل هذه الحلول تسمى أيضاً بالحلول المسموح بها القوية أو قيد سلتر المؤهل أو شرط سلتر المنظم. وفي بعض الأحيان يُرجع إليها على أنها فرضية النقطة الداخلية.

لاحظ أن الفرضية متوافقة مع شرط سلتر المنظم للأمثلة المحدبة، وذلك إذا استخدمنا الحقيقة أن الداخل النسبي relative interior لـ  $S_n^+$  هو عبارة عن جميع المصفوفات الموجبة المعرفة. لاحظ أنه إذا تحققت الفرضية الثانية فإن الداخل النسبي لمجموعة الحلول المسموح بها الأساسية الثنائية معطى بـ

$$ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D}) = \{(X, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \mid X \succ 0, S \succ 0\}$$



حيث  $ri(\mathcal{P})$  يمثل الداخل النسبي لـ  $\mathcal{P}$ . سوف نلاحظ في الفصل القادم أن الفرضية الثانية تضمن لنا أن  $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$  وأن  $\mathcal{D}^* \neq \emptyset$  وأن  $p^* = d^*$  وسوف نبين ذلك لاحقاً. من السهل إثبات خاصية التعامد التالية للمسألتين (١.٦) و (٢.٦) والتي سوف نستخدمها بشكل مكثف.

### نظرية ١.٦

لتكن  $(X, (y, S)) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$  وأن  $(X^\circ, (y^\circ, S^\circ)) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$  زوجان من

الحلول المسموح بها. ولنرمز لـ

$$\Delta S = S - S^\circ \text{ و } \Delta X = X - X^\circ \text{ فإن } \text{tr}(\Delta X \Delta S) = 0$$

البرهان:

من تعريف  $\Delta S$  و  $\mathcal{D}$

$$\Delta S = \sum_{i=1}^m (y_i^\circ - y_i) A_i$$

أي أن  $\Delta S \in \text{span} \{A_1, \dots, A_m\}$ . وبالمثل بتعريف  $\Delta X$  و  $\mathcal{P}$  نحصل على

$$\text{tr}(A_i \Delta X) = \text{tr}(A_i X) - \text{tr}(A_i X^\circ) = b_i - b_i^\circ, \quad i = 1, \dots, m$$

والذي يقتضي أن

$$\Delta X \in \text{span} \{A_1, \dots, A_m\}^\perp$$

وهذا يبين أن  $\Delta S$  تقع في الفراغ الجزئي  $\mathcal{S}_n$  المولد بالمصفوفات  $\{A_1, \dots, A_m\}$ ،

وأن  $\Delta X$  تقع في المتعممة العمودية لهذا الفراغ الجزئي. □

لنرمز للفراغ الجزئي المولد بالمصفوفات  $\{A_1, \dots, A_m\}$  بالرمز

$$\mathcal{L} = \text{span}\{A_1, \dots, A_m\}$$

وليكن لدينا  $X \in ri(\mathcal{P})$ ، أي أن  $X$  من مجموعة الحلول المسموح بها الفعلية.

سوف نسمي  $\Delta X$  باتجاه مسموح به عند  $X$  إذا كانت  $\Delta X \in \mathcal{L}^\perp$ . وبالمثل سوف

نسمي  $\Delta S$  باتجاه مسموح به عند  $S \in ri(\mathcal{D})$  إذا كانت  $\Delta S \in \mathcal{L}$ . والفكرة

هنا أنه يوجد طول خطوة  $\alpha > 0$  بحيث أن  $X + \alpha \Delta X \in \mathcal{P}$  وأن  $S + \alpha \Delta S \in \mathcal{D}$ . ولهذا السبب سوف نشير إلى  $X + \alpha \Delta X$  و  $S + \alpha \Delta S$  بالخطوات المسموح بها.

إنه من المفيد في بعض الأحيان أن نعيد صياغة المسألتين الأساسية والثنائية بحيث تكونا متماثلتين أي أن المسألتين تكون لهما بالضبط نفس الصيغة. لتكن  $M \in \mathcal{S}_n$  بحيث أن  $\text{tr } A_i M = b_i, i = 1, \dots, m$  وأن  $\text{tr } CM = 0$  بالتالي فإن (١.٦) لها الصيغة البديلة التالية:

$$p^* = \min_X \{ \text{tr } (CX) \mid X \in \mathcal{L}^\perp + M, X \succeq 0 \} \quad (٤.٦)$$

وثنائية لاجرانج لهذه المسألة هي:

$$d^* = \max_S \{ \text{tr } (-MS) \mid S \in \mathcal{L} + C, S \succeq 0 \} \quad (٥.٦)$$

لاحظ أن  $X \in \mathcal{P}$  إذا وإذا فقط كانت  $X$  حلاً مسموح به للمسألة (٤.٦). وبالمثل  $S \in \mathcal{D}$  إذا وإذا فقط كانت  $S$  حلاً مسموح به للمسألة (٥.٦). وأن

$$.S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i \quad \text{إذا كانت } b^T y = \text{tr } (-MS)$$

## ٣.٦ الثنائية القوي والضعيف Weak and Strong Duality

كما في البرمجة الخطية إن الفرق بين قيمة دالة الهدف للمسألة الأساسية

والثنائية يسمى الفجوة الثنائية.

**تعريف ٣.٦ ( الفجوة الثنائية )**

لتكن  $X \in \mathcal{P}$  وأن  $(y, S) \in \mathcal{D}$ . إن المقدار

$$\text{tr } (CX) - b^T y \quad (٦.٦)$$

يسمى الفجوة الثنائية للمسألة الأساسية والثنائية عند  $(X, y, S)$ .

من تعريف المسألة الأساسية والثائية وذلك لحل مسموح به  $(X, y, S)$

نجد أن

$$\begin{aligned} \text{tr}(CX) - b^T y &= \text{tr} \left( \left( \sum_{i=1}^m y_i A_i + S \right) X \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^m y_i \text{tr}(A_i X) \\ &= \text{tr}(SX) \geq 0 \end{aligned}$$

حيث المتباينة متحققة لأن  $X \succeq 0$  ولأن  $S \succeq 0$ . إن قيمة الفجوة الثائية دائماً غير سالبة للحلول المسموح بها، وهذا ما يسمى بخاصية الثائية الضعيف، وسوف نطرحها في النظرية التالية.

#### نظرية ٢.٦ (الثائية الضعيف)

لتكن  $X \in \mathcal{P}$  و  $(y, S) \in \mathcal{D}$  فإن

$$\text{tr}(CX) - b^T y = \text{tr}(SX) \geq 0 \quad (٧.٦)$$

أي أن الفجوة الثائية دائماً غير سالبة في حالة الحلول المسموح بها.  
البرهان: تمرين.

#### تعريف ٤.٦

يقال عن المسألتين الأساسية والثائية أنهما في حالة ثنائية مثالية إذا

$$\text{كانت } p^* = d^* .$$

لاحظ أن هذا التعريف لا يقتضي أن تكون  $\mathcal{P}^*$  و  $\mathcal{D}^*$  غير خاليتين. إذا

كانت  $\mathcal{D}^*$  غير خالية فإننا نقول أن الثائية القوية تتحقق للمسألتين الأساسية والثائية.

### مثال ٥.٦

إن هذا المثال يرجع إلى [VB] ويوضح زوجاً من مسائل الثنائية والتي فيها الثنائية المثالية تتحقق ولكن  $\mathcal{P}^* = \emptyset$ . لنعتبر المسألة التالية في الصيغة القياسية الثنائية:

$$\begin{aligned} & \text{maximize } y_2, \quad y \in \mathbb{R}^2 \\ & \text{subject to } y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

إن هذه المسألة غير قابلة للحل ولكن  $\max y_2 = 1$ . كما أن المسألة الثنائية لهذه المسألة (والتي هي المسألة الأساسية بالصيغة القياسية) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{tr} \left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X \right) \\ & \text{subject to } X = \begin{bmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{12} & 1 \end{bmatrix} \succeq 0. \end{aligned}$$

لاحظ أن  $X \succeq 0$  يقتضي أن  $x_{12} = 0$  أي أن

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succeq 0$$

وهو الحل الأمثل الوحيد وقيمة دالة الهدف تساوي واحد، ولكن  $\mathcal{P}^* = \emptyset$ .

إذا كانت المسألة الأساسية (١.٦) لها حل مسموح به فعلياً والمسألة الثنائية (٢.٦) لها حل مسموح به أو العكس. فإن الثنائية المثالية تتحقق، وتكون  $D^* \neq \emptyset$  أو في الحالة المعاكسة تكون  $\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ . إن إثبات هذه النظرية يحتاج

إلى الرجوع إلى نتائج أساسية في التحليل المحدب، وسوف نذكر النظرية. ومن الممكن الرجوع إلى إثبات النظرية في [Dk].

### نظرية ٦.٦ ( الثنائية القوي )

إذا كانت  $d^* < \infty$  وأن (٢.٦) لها حل مسموح به فعلياً فإن  $P^* \neq \emptyset$  وأن  $p^* = d^*$ . بالمثل إذا كانت  $p^* > -\infty$  وأن (١.٦) لها حل مسموح به فعلياً فإن  $D^* \neq \emptyset$  وأن  $p^* = d^*$ .  
البرهان: إنظر [Dk].

لدينا كنتيجة لهذه النظرية والتي سوف تعطينا الشرط الكافي لثنائية القوي.

### نتيجة ٧.٦

إذا كانت المسألتان الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلياً فإن  $p^* = d^*$  ، وتكون مجموعتا الحلول المثلى غير خالية.  
البرهان:

مباشر من النظرية ٣.٦ تكون  $d^*$  و  $p^*$  منتهيتين. ومن نظرية ٦.٦ يتحقق المطلوب. □

## ٤.٦ مجموعة الحلول المسموح بها Feasible Solutions

لتبين احتمال عدم وجود حلول مسموح بها للمسألتين الأساسية والثنائية وكذلك كون المسألتان غير محدودتين نحتاج إلى التعريف التالي:

### ٨.٦ تعريف

نقول إن المسألة الأساسية لها سهم محسن improving ray إذا وجدت مصفوفة متماثلة  $\bar{X} \geq 0$  بحيث أن  $tr(A_i \bar{X}) = 0$  ,  $i = 1, \dots, m$  ، وكان

بالمقابل نقول إن المسألة الثنائية لها سهم محسن إذا وجد متجه  $tr(C\bar{X}) < 0$ .

$$\bar{y} \in \mathbb{R}^m \text{ بحيث أن } A_i \geq 0 \text{ و } \bar{S} = -\sum_{i=1}^m \bar{y}_i A_i \text{ وكان } b^T \bar{y} > 0.$$

إن الأسهم المحسنة للمسألة الأساسية تسبب عدم وجود حلول مسموح بها للمسألة الثنائية والعكس صحيح.

### نتيجة ٩.٦

إذا وجد سهم محسن ثنائي  $\bar{y}$ ، فإن المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به. وبالمثل إذا وجد سهم محسن أساسي  $\bar{X}$ ، فإن المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به.

### البرهان:

ليكن لدينا  $\bar{y}$  سهم محسن ثنائي. لنفرض وجود حل مسموح به  $X$  للمسألة الأساسية فبالتالي:

$$0 < b^T \bar{y} = \sum_{i=1}^m tr(A_i X) \bar{y}_i = -tr(X\bar{S}) \leq 0$$

□

وهذا تناقض. وبالمثل للمسألة الأساسية.

### تعريف ١٠.٦

إن المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به بقوة *strongly infeasible* إذا كانت المسألة الثنائية لها سهم محسن. ويقال إن المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به بقوة إذا كانت المسألة الأساسية لها سهم محسن. من هذا التعريف نجد أن كل مسألة برمجة خطية ليس لها حل مسموح به هي مسألة ليس لها حل مسموح به بقوة. بينما مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة قد تكون المسألة ليس لها حل مسموح به ضعيف *weak infeasibility*، كما هو بالتعريف التالي:

## تعريف ١١.٦

المسألة الأساسية ليس لها حل مسموح به ضعيف إذا كانت  $\mathcal{P} = \emptyset$  وكان لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $X \succeq 0$  بحيث أن

$$|\text{tr}(A_i X) - b_i| \leq \varepsilon, \quad \forall i$$

وبالمثل المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به ضعيف إذا كانت  $\mathcal{D} = \emptyset$  وكانت لكل  $\varepsilon > 0$  يوجد  $y \in \mathbb{R}^m$  و  $S \succeq 0$  بحيث

$$\left\| \sum_{i=1}^m y_i A_i + S - C \right\| \leq \varepsilon$$

## مثال ١٢.٦

سوف نعطي الآن مثال على عدم وجود حلول مسموح بها ضعيف. إذا كانت

المسألة الثنائية معرفة حيث  $n = 2$  ،  $m = 1$  ،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = [1]^T$$

بحيث أن المسألة الثنائية تكون على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} &\text{maximize } y_1 \\ &\text{subject to } y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

نستطيع أن نبني  $\varepsilon$  في التعريف السابق بوضع

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon} & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad y_1 = \frac{1}{\varepsilon}$$

بحيث أن

$$\|y_1 A_1 + S - C\| = \left\| -\frac{1}{\varepsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \varepsilon$$

### نظرية ١٣.٦

إذا كانت المسألة الثنائية ليس لها سهم محسن فإن المسألة الأساسية إما أن يكون لها حلول مسموح بها أو ليس لها حلول مسموح بها ضعيف. وبالمثل إذا كانت المسألة الأساسية ليس لها سهم محسن فإن المسألة الثنائية إما أن يكون لها حلول مسموح بها أو أن ليس لها حلول مسموح بها ضعيف.  
البرهان: انظر [Dk].

هناك وصف بديل لعدم وجود الحلول المسموح بها الضعيف وذلك بتقديم مفهوم السهم المحسن الضعيف. حيث أن السهم المحسن للمسألة الأساسية يؤدي إلى عدم وجود حلول مسموح بها فعلياً للمسألة الثنائية، والعكس صحيح فإن السهم المحسن الضعيف يؤدي إلى عدم وجود حلول مسموح بها ضعيف.

### تعريف ١٤.٦

نقول أن المسألة الأساسية لها سهم محسن ضعيف إذا وجد متتالية

$$\bar{X}^{(k)}, \quad k=1,2,\dots$$

بحيث أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min | \text{tr} (A_i \bar{X}^{(k)}) | = 0 \quad i=1,\dots,m$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max \text{tr} (C \bar{X}^{(k)}) = -1$$

وبالمثل نقول أن المسألة الثنائية لها سهم محسن ضعيف إذا وجد متتاليات

$$\bar{S}^{(k)} \geq 0 \text{ و } \bar{y}^{(k)} \in \mathbb{R}^m \text{ و } \bar{S}^{(k)} \geq 0, \quad k=1,2,\dots$$



بحيث أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min \left\| \bar{S}^{(k)} + \sum_{i=1}^m \bar{y}^{(k)} A_i \right\| = 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \min b^T \bar{y}^{(k)} = 1$$

الآن لدينا النظرية التالية:

**نظرية ١٥.٦**

المسألة الأساسية ليس لها حلول مسموح بها ضعيف إذا وإذا فقط كانت المسألة الثنائية لها سهم محسن ضعيف، وبالمثل المسألة الثنائية ليس لها حلول مسموح بها ضعيف إذا وإذا فقط كانت المسألة الأساسية لها سهم محسن ضعيف.

البرهان: انظر [Dk].

**٥.٦ شروط الأمثلة Optimality Conditions**

من نظرية الثنائية الضعيف نظرية ٣.٦ نرى أن  $X^* \in \mathcal{P}$  وأن  $S^* \in \mathcal{D}$  هي عبارة عن حلول مثلى إذا كانت الفجوة الثنائية عند  $(X^*, S^*)$  صفراً. أي أن  $\text{tr}(X^* S^*) = 0$ . وهذا الشرط يكافئ أن تكون  $X^* S^* = 0$ ، لأن  $X^* \geq 0$  وأن  $S^* \geq 0$ . ينتج عن ذلك أن الشروط الكافية للأمثلة للمسألة الأساسية والثنائية هي:

$$\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad X \geq 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \quad S \geq 0 \quad (٨.٦)$$

$$XS = 0$$

يسمى الشرط  $XS = 0$  بشرط المتممة complementarity condition، والحلول المثلى التي تحقق هذا الشرط تسمى متممة أو حلول متممة complementary.

ونتيجة ٧.٦ التي أُشتقت من نظرية الثنائية القوية تقتضي أن شرط الأمثلة هي أيضاً لازمة إذا كانت كلٌّ من المسألة الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلية.

### نظرية ١٦.٦

إذا كانت المسألتان الأساسية والثنائية لهما حلول مسموح بها فعلياً فإن النظام (٨.٦) هو الشرط اللازم والكافي لشروط الأمثلة للمسألتين. البرهان: انظر نتيجة ٧.٦.

في حالة البرمجة الخطية دائماً تتحقق لدينا المتممة الفعلية، أي أنه يوجد دائماً حلول مثلى  $X^*$  و  $S^*$  بحيث أن  $X^* + S^* > 0$ . ولكن في حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة فإن هذا الوضع ليس دائماً صحيح، وهذا المثال التالي يبين ذلك:

### مثال ١٧.٦

إن هذا المثال يرجع إلى [Ali2]. لتكن  $n = m = 3$ ،  $b = [1 \ 0 \ 0]$  وأن

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن الحلول المثلى للمسألتين الأساسية والثنائية هي :

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, y_i^* = 0 \ (i = 1, 2, 3), \ S^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

إنه من الواضح أن  $X^*$  هو الحل الأمثل، لأن  $C \geq 0$  وبالتالي

$$\text{tr}(CX) \geq 0 \quad \forall X \in P$$

أيضاً من السهل أن نرى أن الزوج  $(X^*, S^*)$  هو زوج وحيد، فيتبين أن المتمة الفعلية لا تتحقق في هذا المثال.

### تمارين الباب السادس

١.٦ اذكر شروط الأمثلة للمثال ١٧.٦

٢.٦ لتكن  $n = m = 3$ ،  $b = [1 \ 0 \ 0]$ ، وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

اكتب مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة على الشكل القياسي؟ وأيضاً

اكتب الشكل القياسي للمسألة الثنائية؟

٣.٦ أوجد  $\mathcal{L}$  و  $\mathcal{L}^\perp$  للتمرين السابق؟

٤.٦ أوجد البرنامج الثنائي للمسألة التالية:

$$, m = 3 \quad , n = 2$$

$$, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = [1 \ 2 \ 1]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

ثم أوجد الفجوة الثنائية؟

٥.٦ أثبت نظرية الثنائية الضعيف ٣.٦

٦.٦ لدينا البرنامج التالي

$$\begin{aligned} &\text{maximize } y_1 + y_2, \quad y \in \mathbb{R}^2 \\ &\text{subject to } y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد البرنامج الثنائي والفجوة الثنائية؟



## The Central Path

- مقدمة • وجود وحدانية
- المسار الأوسط • تحليل
- المسار الأوسط • نقاط
- النهاية للمسار الأوسط

### 1.7 مقدمة Introduction

إذا شوّش النظام اللازم والكافي لشروط الأمثلة للمسألة الأساسية والثنائية بإضافة الوسيط  $\mu > 0$  بطريقة خاصة، فإن الحل المشوّش للنظام يعرف منحنى تحليلي analytic curve محدد بالوسيط  $\mu$  خلال منطقة الحلول المسموح بها، والذي يؤدي إلى مجموعة الحلول المسموح بها المثلى عندما  $\mu \rightarrow 0$ . هذا المنحنى كما في البرمجة الخطية يسمى المسار الأوسط، ومعظم طرق النقطة الداخلية تتبع تقريباً المسار الأوسط للوصول إلى مجموعة الحلول المسموح بها المثلى. فيما يلي سوف نشرح بعض خواص المسار الأوسط.

## ٢.٧ وجود وحدانية المسار الأوسط

**Existence and Uniqueness of the Central Path**

سوف نشوِّش شروط الأمثلة (٨.٦) للمسألة الأساسية والثنائية على

الشكل التالي:

$$\left. \begin{aligned} \text{tr}(A_i X) &= b_i, \quad X \succeq 0, \quad i=1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S &= C, \quad S \succeq 0 \\ XS &= \mu I \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

للسيطة  $\mu > 0$ . هذا النظام يسمى شروط الأوسطية centrality conditions. لاحظ أنه إذا كانت  $\mu = 0$  فإننا نرجع إلى شروط الأمثلة (٨.٦). سوف نوضح الآن أن النظام (١.٧) له حل وحيد لكل  $\mu > 0$ . هذا الحل الوحيد سوف يرمز له بالرمز  $X(\mu), S(\mu), y(\mu)$ ، ومن الممكن اعتباره تمثيل متري للمنحنى التحليلي (المسار الأوسط) بدلالة الوسيط  $\mu$ . بالطريقة التالية من الممكن إثبات وجود وحدانية المسار الأوسط. اعتبر المسألة التالية:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad p_\mu(X) \\ &\text{subject to} \quad \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i=1, \dots, m \\ &\quad \quad \quad X \succ 0 \end{aligned}$$

حيث  $p_\mu(X) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(CX) - \log \det X$ ، أي أننا نصغر دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية primal log-barrier function على الداخل النسبي لـ  $\mathcal{P}$ . إن الدالة  $p_\mu$  هي محدبة فعلياً. إن شروط الأمثلة KKT لهذه المسألة هي في هذه الحالة لازمة وضرورية، ومعطاة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \nabla p_\mu(X) &= \frac{1}{\mu} \operatorname{tr} C - X^{-1} = \sum_{i=1}^m \hat{y}_i A_i \\ \operatorname{tr}(A_i X) &= b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ X &\succ 0 \end{aligned}$$

حيث تُعرَّف  $S = C - \sum_{i=1}^m y_i A_i$  وأن  $y_i = \mu \hat{y}_i$  ، إن هذا النظام يكون مطابقاً للنظام (١.٧). بمعنى آخر إن وجود و وحدانية المسار الأوسط مكافئ لوجود تصغير وحيد لـ  $p_\mu$  في داخل  $\mathcal{P}$  النسبي لكل  $\mu > 0$ . ولأن  $p_\mu$  محدبة فعلياً فإن أي نقطة تصغير لـ  $p_\mu$  تكون وحيدة. لإثبات وجود المسار الأوسط علينا أن نبين أن مجموعات المستويات  $p_\mu$  level sets هي متراسة compact إذا كانت المسألة الثنائية لها حلول مسموح بها فعلياً. إن هذا يضمن وجود نقطة صغرى لنسئها  $X_p^*$ . نستطيع الآن أن نستخدم هذه النقطة الصغرى لبناء حل للنظام (١.٧) كالتالي:

$$X(\mu) = X_p^*, \quad S(\mu) = \mu(X_p^*)^{-1} \quad (٢.٧)$$

لاحظ أن  $S(\mu)$  كما هي معرفة في (٢.٧) هي حل مسموح به للمسألة الثنائية. من الممكن إثبات وجود المسار الأوسط عن طريق الثنائية بواسطة تكبير دالة الحاجز الثنائية:

$$d_\mu(S, y) = \frac{1}{\mu} b^T y + \log \det(S), \quad (y, S) \in \mathcal{D}$$

ومن ثم إثبات أن مجموعات المستويات متراسة إذا كانت المسألة الأساسية لها حل مسموح به فعلياً.

الآن سوف نثبت وجود حل لمسألة تصغير الفرق بين دالة الحاجز الأساسية ودالة الحاجز الثنائية  $d_\mu$ . لنعرّف دالة الحاجز الأساسية الثنائية على الشكل التالي:



$$f_\mu : \mathcal{P} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}_+$$

بحيث أن

$$\begin{aligned} f_\mu(X, S) &= p_\mu(X) - d_\mu(S, y) - n - n \log(\mu) \\ &= \frac{1}{\mu} \operatorname{tr}(CX) - \frac{1}{\mu} b^T y - \log \det(X) - \log \det(S) - n - n \log(\mu) \\ &= \operatorname{tr} \left( \frac{XS}{\mu} \right) - \log \det \left( \frac{XS}{\mu} \right) - n \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{\lambda_i(XS)}{\mu} - \log \left( \frac{\lambda_i(XS)}{\mu} \right) \right) - n \end{aligned}$$

حيث  $\lambda_i(A)$  تعني القيمة الذاتية  $i$  من حيث الكبر للمصفوفة  $A$ . لاحظ أن  $(X^*, S^*)$  هي النقطة الصغرى للدالة  $f_\mu$  إذا وإذا فقط كانت  $X^*$  و  $S^*$  هي عبارة عن نقاط صغرى لكلٍ من  $p_\mu$  و  $d_\mu$  على الترتيب. أيضاً لاحظ أن  $f_\mu(X, S) = 0$  إذا وإذا فقط كانت  $XS = \mu I$ .

والآن نحن نتوجه لإثبات وجود نقطة صغرى وحيدة لـ  $f_\mu$ ، وأنه إذا كانت هذه النقطة تحقق النظام (١.٧) فإننا نستطيع إعادة كتابة  $f_\mu(X, S)$  على الشكل التالي:

$$f_\mu(X, S) = \sum_{i=1}^n \psi \left( \frac{\lambda_i(XS)}{\mu} - 1 \right)$$

حيث  $\psi(t) = t - \log(1+t)$ . لاحظ أن  $f_\mu$  هي عبارة عن مجموع دالتين محدبتين فعلياً وهما  $p_\mu$  و  $d_\mu$  بالإضافة إلى ثابت، وبالتالي فإن  $f_\mu$  هي محدبة فعلياً. ولذلك علينا الآن فقط إثبات أن مجموعات المستويات هي مجموعات متراسة حتى نثبت وجود وحدانية المسار الأوسط، وسوف نقوم بذلك على خطوتين:

أولاً: سوف نبين أن مجموعات المستويات للفجوة الثنائية متراسة.  
 ثانياً: سوف نبين أن تراص مجموعات المستويات للفجوة الثنائية يؤدي إلى أن  
 مجموعات المستويات لدالة الحاجز الأساسية الثنائية  $f_\mu$  هي أيضاً متراسة.

## نتيجة ١.٧

لنفرض أن كلاً من المسألة الأساسية والثنائية لهما حلٌ مسموحٌ به فعلياً.

إن المجموعة

$$G_\alpha = \{(X, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D} \mid \text{tr}(XS) \leq \alpha\}$$

هي مجموعة متراسة لكل  $\alpha \geq 0$ .

**البرهان:**

لتكن  $(X^\circ, S^\circ)$  هي عبارة عن حل أساسي ثنائي مسموح به فعلياً، وأن  
 $(X, S) \in G_\alpha$  حيث لدينا  $\alpha \geq 0$ . ومن نظرية ١.٦

$$\text{tr}((X - X^\circ)(S - S^\circ)) = 0 \quad (٣.٧)$$

وباستخدام  $\text{tr}(XS) \leq 0$ ، فإن (٣.٧) تبسط إلى

$$\text{tr}(XS^\circ) + \text{tr}(X^\circ S) \leq \alpha + \text{tr}(X^\circ S^\circ)$$

إن الطرف الأيمن من المتباينة أعلاه غير سالب، لأن  $X^\circ$  و  $S^\circ$  هما حلان مسموح  
 بهما فعلياً، وبالتالي:

$$\text{tr}(XS^\circ) \leq \alpha + \text{tr}(X^\circ S^\circ)$$

والذي يقتضي

$$\text{tr}(X) \leq \frac{\alpha + \text{tr}(X^\circ S^\circ)}{\lambda_{\min}(S^\circ)}$$

حيث  $\lambda_{\min}(S^\circ)$  تعني أصغر قيمة ذاتية eigenvalue لـ  $S^\circ$ . الآن باستخدام حقيقة أن كل مصفوفة  $X$  موجبة شبه معرفة تحقق  $\|X\| \leq \text{tr}(X)$  لمعيار فروبينس Frobenius norm ، يكون لدينا

$$\|X\| \leq \frac{\alpha + \text{tr}(X^\circ S^\circ)}{\lambda_{\min}(S^\circ)}$$

وبالمثل يمكن إيجاد حد مشابه لـ  $\|S\|$ . يتبقى لإثبات النتيجة إثبات أن  $G_\alpha$  مغلقة، وهذا متحقق لأن كلا من  $P$  و  $D$  مغلقتان، ومن خطية دالة الفجوة الثنائية  $\text{tr}(XS) = \text{tr}(CX) - b^T y$  على  $P \times D$ . □

### نظرية ٢.٧

المسار الأوسط للمسألة الأساسية والمسألة الثنائية موجود إذا كانت لهما حلول مسموح بها فعلياً.  
البرهان: انظر [Dk].

### ٣.٧ تحليل المسار الأوسط Analyticity of the Central Path

إن نظرتنا الهندسية للمسار الأوسط هي من ناحية دالة المنحنى التحليلي من خلال داخل  $P \times D$  النسبي، والذي يقودنا إلى مجموعة الحلول المثلى. سوف ننظر إلى هذا التحليل من خلال النظرية التالية:

### نظرية ٣.٧

إذا كانت  $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  هي عبارة عن دالة تحليلية لـ  $w \in \mathbb{R}^n$  و  $z \in \mathbb{R}^m$  بحيث أنه  
١- يوجد  $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$  و  $\bar{z} \in \mathbb{R}^m$  بحيث أن  $f(\bar{w}, \bar{z}) = 0$ .

٢- مصفوفة جاكوبين Jacobian لـ  $f$  بالنسبة لـ  $z$  هي مصفوفة غير شاذة nonsingular عند  $(\bar{w}, \bar{z})$ .

فإنه يوجد مجموعة مفتوحة  $S_{\bar{w}} \subset \mathbb{R}^n$  تحتوي  $\bar{w}$  و  $S_{\bar{z}} \subset \mathbb{R}^m$  تحتوي  $\bar{z}$ ، ويوجد الدالة التحليلية  $\phi: S_{\bar{w}} \rightarrow S_{\bar{z}}$  بحيث أن  $\bar{z} = \phi(\bar{w})$  و  $f(w, \phi(w)) = 0$  لكل  $w \in S_{\bar{w}}$ . وبالإضافة إلى

$$\nabla \phi(w) = -\nabla_z f(w, \phi(w))^{-1} \nabla_w f(w, \phi(w)) \quad (٤.٧)$$

البرهان: انظر [Di].

إن النظرية ٣.٧ تسمى نظرية الدالة الضمنية implicit function theorem ولها صيغ كثيرة وهذه الصيغة هي التي تناسب دراستنا.

#### نظرية ٤.٧

إن الدالة

$$f_\mu: \mu \rightarrow (X(\mu), y(\mu), S(\mu))$$

هي عبارة عن دالة تحليلية لـ  $\mu > 0$  حيث

$$\nabla(X, y, S) f(X, y, S, \mu) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & t^T & I_{n^2} \\ S \otimes I_n & 0 & I_n \otimes X \end{bmatrix} \quad (٥.٧)$$

وحيث أن

$$A = [\text{vec}(A_1), \dots, \text{vec}(A_m)]^T$$

و  $I_n$  هي مصفوفة الوحدة من الحجم  $n$  و  $\otimes$  ترمز للضرب كرونكر kroncker.

البرهان: انظر [De].

إن نظرية الدالة الضمنية (نظرية ٣.٧) تقدم لنا صيغة للاتجاه المماسي tangential direction للمسار الأوسط. هذا الاتجاه هو حل النظام الخطي والذي له مصفوفة المعاملات (٥.٧) وهذا واضح من (٤.٧). إن الاتجاه المماسي هو الاتجاه المستخدم بواسطة جميع طرق النقطة الداخلية، إذا كانت الدورة الحالية  $(X, S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$  على المسار الأوسط. أما إذا كانت  $(X, S)$  ليست على المسار الأوسط فتوجد طرق أخرى لإيجاد الحل الأمثل.

#### ٤.٧ نقاط النهاية للمسار الأوسط

##### Limit Points of the Central Path

في هذا الفصل سوف نبين أن أي متتالية على المسار الأوسط لها نقاط تجمع في مجموعة الحلول المثلى. ونحتاج إلى التعريف التالي لبيان ذلك

##### تعريف ٥.٧

يقال للحل  $X^* \in \mathcal{P}^*$  متممة عظمى maximal complementarity مثلى للمسألة الأساسية إذا كانت

$$\mathcal{R}(X) \subset \mathcal{R}(X^*) \quad \forall X \in \mathcal{P}^*$$

حيث  $\mathcal{R}(X)$  تعني مدى  $X$ . وبالمثل يقال للحل  $S^* \in \mathcal{D}^*$  متممة عظمى مثلى للمسألة الثنائية إذا كانت

$$\mathcal{R}(S) \subset \mathcal{R}(S^*) \quad \forall S \in \mathcal{D}^*$$

وإذا كان زوج المتممة العظمى  $(X^*, S^*)$  يحقق  $X^* + S^* > 0$  فإننا نسمي الحل  $(X^*, S^*)$  زوج المتممة الفعلي.

إن نقاط متتالية المسار الأوسط هي متممة عظمى. كذلك كلما اقتربت  $\mu$  من الصفر فإن المسار الأوسط يقترب من زوج المتممة العظمى. وتحت فرضية

المتتمة الفعلي إن نقاط النهاية هي ما يسمى بالتحليل الأوسط للحلول المثلى والتي سوف تعرف لاحقاً.

ليكن لدينا المتتالية الثابتة  $\{\mu_t\}$  حيث  $0 < \mu_t$  ، ونريد أن نثبت أنه يوجد متتالية جزئية من المتتالية  $\{X(\mu_t), S(\mu_t)\}$  تقترب من حل المتتمة العظمى. إن وجود نقاط نهاية للمتتالية هي نتيجة مباشرة من النظرية التالية:

### نظرية ٦.٧

ليكن لدينا  $\bar{\mu} > 0$  ، إن المجموعة

$$\{X(\mu), S(\mu) : 0 < \mu \leq \bar{\mu}\}$$

محتواة في مجموعة جزئية متراسة من  $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ .

**البرهان:**

مباشر من نتيجة ١.٧ ، وذلك بملاحظة أن  $\text{tr}(X(\mu), S(\mu)) \leq n\bar{\mu}$  . إذا كانت  $\mu \leq \bar{\mu}$  .

□

لتكن

$$X(\mu_t) = Q(\mu_t) \Lambda(\mu_t) Q(\mu_t)^T$$

$$S(\mu_t) = Q(\mu_t) \Sigma(\mu_t) Q(\mu_t)^T$$

ترمز للتفريق الطيفي spectral decompositions لكل من  $X(\mu_t)$  و  $S(\mu_t)$  . إن النظرية ٦.٧ تقتضي أن القيم الذاتية لـ  $X(\mu_t)$  و  $S(\mu_t)$  هي قيم محدودة. إن المصفوفات  $Q(\mu_t)$  متعامدة لكل  $t$  ، وهي بالتالي عبارة عن مجموعة متراسة. ينتج عن ذلك أن المتتالية الثلاثية  $(Q(\mu_t), \Lambda(\mu_t), \Sigma(\mu_t))$  لها نقطة نهاية لتكن  $(Q^*, \Lambda^*, \Sigma^*)$  . أي أنه يوجد متتالية جزئية لترمز لها بنفس الرمز  $\{\mu_t\}$  بحيث أن

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Q(\mu_t) = Q^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Lambda(\mu_t) = \Lambda^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Sigma(\mu_t) = \Sigma^*$$

لاحظ أن  $\Lambda(\mu_t) \Sigma(\mu_t) = \mu I$  وبالتالي بتعريف

$$\hat{X} = Q^* \Lambda^* Q^{*T} = \lim_{t \rightarrow \infty} X(\mu_t) \quad (6.7)$$

$$\hat{S} = Q^* \Sigma^* Q^{*T} = \lim_{t \rightarrow \infty} S(\mu_t)$$

نحصل على  $\Lambda^* \Sigma^* = 0$  ويكون الزوج  $(\hat{X}, \hat{S})$  هو الحل الأمثل.

### نظرية ٧.٧

الزوج  $(\hat{X}, \hat{S})$  المعرف في (٦.٧) هو حل متممة عظمى.

البرهان: انظر [Dk].

### تمارين الباب السابع

١.٧ أوجد شروط الأمثلة للمسألة التالية  $n = m = 3$ ،  $b = [1 \ 0 \ 0]$ ، وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

٢.٧ أوجد دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية ودالة الحاجز اللوغاريتمية الشائبة

للتمرين السابق؟

٣.٧ أوجد  $G_\alpha$  للتمرين ١.٧ حيث  $\alpha = 0.2$ ؟

## Primal Logarithmic Barrier Method

- مقدمة • طمر المسألة ذاتية
- الثنائية • استراتيجيات الطمر
- وحلها • الخوارزمية الشكلية
- ودالة الأوسطية • إسقاط اتجاه
- نيوتن لدالة الحاجز الأساسية •
- اتجاه الموازنة التآلفي • السلوك
- قرب المسار الأوسط • تحديث
- وسيط المسار الأوسط • خوارزمية
- الثنائية • طرق التحديث الكبيرة

### 1.8 مقدمة Introduction

إذا كانت مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هي ذاتية الثنائية self dual أي أن المسألة الأساسية والثنائية متطابقتان، فإن علاقات الثنائية تكون أبسط.



وبشكل خاص إذا كانت هذه المسألة التي لها نفس الثنائية ولها حلول مسموح بها فعلية فإن هذه المسألة قابلة للحل، وقيمة الحل الأمثل هي الصفر وهذا نستنتجه مباشرة من نظرية الثنائية القوي (نظرية ٦.٦). في هذا الباب سوف نوضح كيف يمكننا تحويل مسألتنا الأساسية والثنائية بالصيغة القياسية إلى مسألة أكبر ولها نفس الثنائية. وحيث الحلول المسموح بها الفعلية على المسار الأوسط معلومة، ومن الممكن حل المسألة الكبرى. وحلها سيقودنا إلى حل منطقة الحلول المسموح بها للمسألتين الأساسية والثنائية وبالتالي إلى حلول لهما.

بعد ذلك سوف نقوم بتحليل طريقة الحاجز الأساسية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة وهذه الطريقة أيضاً تُعرف بطريقة تابع المسار الأساسية، وذلك لأن طريقة هذه الخوارزمية هي بمتابعة المسار الأوسط تقريباً للوصول للحل الأمثل. وبشكل خاص سوف نتطرق هنا إلى تحليل بسيط لما يسمى طريقة تقريب وسط البرنامج الموجب شبه المعرفة [HDRT].

إن الطرق التي تتطرق لحل المسألة الأساسية بشكل بحث تستخدم معلومات عن المسألة الأساسية ومنطقة الحلول المسموح بها، وكذلك الحال بالنسبة للمسألة الثنائية. ولكن طرق الأساسية الثنائية تستخدم معلومات عن كلتا المسألتين وذلك في صياغة اتجاه البحث. هناك الكثير من مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة وخاصة في مجال الأمثلة التركيبية combinatorial optimization. حيث الحلول المسموح بها الأساسية  $X$  أو الحلول المسموح بها الثنائية  $S$  تكون إحدهما متأثرة والأخرى ليست كذلك. وللاستفادة من هذا التناثر لابد من استخدام طرق المسألة الأساسية البحتة أو طرق المسألة الثنائية البحتة.

## ٢.٨ طمر المسألة ذاتية الثنائية Self-Dual Embeddings

أكثر الطرق المستخدمة في حل مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة تتطلب وجود حلول مسموح بها فعلية، أي أن  $S^\circ > 0$ ,  $X^\circ > 0$  لكل من المسألة الأساسية والمسألة الثنائية. على سبيل المثال: اعتبر المسألة الثنائية للبرمجة الموجبة شبه المعرفة بشكلها القياسي التالي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^T y \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & && S \succeq 0, y \in \mathbb{R}^m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

ولنفترض أن حلاً مسموحاً به فعلياً للمسألة الثنائية موجود ومعلوم، وليكن  $(y^\circ, S^\circ)$ ، ولكن لا يوجد مصفوفة أساسية مسموح به فعلياً لثنائية لاجرانج أي (١.٨). وهي على الشكل القياسي التالي:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \text{tr}(CX) \\ & \text{subject to} && \text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & && X \succeq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

ولكي نطبق الطرق الأساسية الثنائية أولاً يجب أن نجد حلاً مسموحاً به لكلا المسألتين بعد ذلك يجب علينا حل المسألة المعدلة التالية:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && b^T y \\ & \text{subject to} && \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & && \text{tr } S \leq M, S \succeq 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

وبشكل غير دقيق فإن (٣.٨) لها نفس حل (١.٨)، إذا كانت  $M$  كبيرة بشكل كافٍ، وإذا كانت (١.٨) ليس لها حل مسموح به فبالمثل (٣.٨)، وإذا كانت (١.٨) قابلة للحل فكذلك (٣.٨).

مسألة أخرى تختلف قليلاً عن (٣.٨) هي

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \text{tr}(C(X - \kappa I)) + \kappa M \\ & \text{subject to } \text{tr}(A_i(X - \kappa I)) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ & \kappa \geq 0, \quad X \succeq 0 \end{aligned} \quad (٤.٨)$$

الآن نستطيع أن نبني حلاً مسموحاً به فعلياً كنقطة بداية للمسألة (٤.٨) وذلك باختيار  $\kappa$  كبيرة بشكل كافٍ، بينما لا يوجد مثل هذا الحل للمسألة الأساسية.

نستطيع أن نقوم باستراتيجية مشابهة إذا كانت المسألة الأساسية لها حل مسموح به فعلياً. أما إذا كانت كل من المسألة الأساسية والثنائية ليس لهما حل مسموح به فإن استراتيجية مشابهة بإضافة المصفوفة  $M$  لكلا المسألتين. الصعوبة هنا عدم وجود اختيار مسبق للمصفوفة  $M$  بشكل عام. على سبيل المثال إذا لم تستطع جعل الوسيط  $\kappa$  يقترب من الصفر في المسألة (٤.٨) فهذا يعني عدم وجود حل أمثلياً  $S$  للمسألة الثنائية حيث  $\text{tr } S^* \leq M$ . وهذا يعني أننا نحتاج إلى حد لـ  $\text{tr } S^*$  وذلك لمعرفة حالة المسألة الثنائية. وهذه المعلومات ليست معروفة مقدماً بشكل عام.

في حالة البرمجة الخطية يوجد حل أنيق للمسألة الابتدائية initialization problem وذلك بطمر المسألة الأصلية بمسألة ذاتية الثنائية متماثلة تخالفياً، skew-symmetric والتي لها حل مسموح به داخلي معلوم يقع على المسار الأوسط. إن حل المسألة المطمورة يعطينا الحل الأمثل للمسألة الأصلية، ويتضح منه أنه إما المسألة الأساسية أو المسألة الثنائية ليس لها حلول مسموح بها. وفي هذه الحالة لا بد من استنتاج معلومات مفصلة أكثر عن الحل.

رغم وجود هذه الخصائص النظرية المشجعة لطمر ذاتية الثنائية، إلا أن الفكرة لم تلق قبولاً كبيراً في التطبيق، وذلك لأن مسألة الطمر لها عمود

كثيف في مصفوفة المعاملات. وهذا يؤدي إلى امتلاء مفكوك شولسكي choleski factorization خلال الحسابات. ورغم كل هذا إلا أن [XHY] استطاع أن يطبق بنجاح طريقة طمر ذاتية الثنائية على البرمجة الخطية، وكان هذا التطبيق واسع النجاح، حتى أن البرنامج الذي استنتجوه استُخدم تجارياً في برامج مثل MOSEK، XPRESSMP و CPLEX.

طُورت فكرة الطمر المتجانسة homogeneous embedding للبرمجة الموجبة شبه المعرفة بواسطة [PS]. وبعد ذلك قام [DRT] و [LSZ] بتمديد استراتيجية الطمر ليستنتج مسائل الطمر ذاتية الثنائية حيث تكون داخل منطقة الحل المسموح بها غير خالية. وعلى عكس الطمر المتجانس مسألة الطمر الناتجة، لها نقطة بداية على المسار الأوسط. وهذا يبسط التحليل، لأن المسار الأوسط معرّف جيداً. هذه الطريقة أُستُخدمت في برنامج SeDuMi المطور بواسطة [St].

إن الحل إذا كان نقطة نهاية على المسار الأوسط لمسألة طمر، فإن لدينا إحدى الحالات التالية للمسألة الأصلية:

- زوج من الحلول المتتامة  $(X^*, S^*) \in \mathcal{P}^* \times \mathcal{D}^*$ .
  - سهم محسن للمسألة الأساسية أو المسألة الثنائية أو كليهما.
  - لا يوجد زوج من الحلول وبالتالي كلٌّ من المسألتين الأساسية والثنائية لا يوجد لهما حلول مسموح بها قوية.
- بشكل عام وغير دقيق المسألتان قابلتان للحل إذا وجد زوج من الحلول المتتامة أو كان لهما حلول مسموح بها قوية.
- تختلف البرمجة الموجبة شبه المعرفة عن البرمجة الخطية، لأنه في حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة من الممكن وقوع الحالات التالية:

- وجود قيمة موجبة للفجوة الثنائية عند زوج الحلول المثلى للمسألتين.
- وجود فجوة ثنائية صغيرة ومع ذلك لا يوجد زوج من الحلول المثلى للمسألتين.
- قد يوجد للمسألة الأساسية قيمة مثلى، مع أن المسألة الثنائية ليس لها حل مسموح به.

وهذه الحالات لا يمكن إكتشافها بطريقة الطمر ما لم نضيف فرضية جديدة ألا وهي أن المسألتين الأساسية والثنائية لهما الثنائية الكاملة *perfect duality*. وهذه الفرضية تتحقق إذا كانت المسألة الأساسية لها حلول مسموح بها فعلياً وكذلك المسألة الثنائية لها حلول مسموح بها أيضاً.

### ٣.٨ استراتيجية الطمر وحلها **The Embedding Strategy**

معطى لدينا مسألة الطمر المتجانس للمسألتين الأساسية والثنائية التالية:

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(A_i X) - \tau b_i &= 0 \quad \forall i \\
 -\sum_{i=1}^m y_i A_i + \tau C - S &= 0 \\
 b^T y - \text{tr}(CX) - \rho &= 0 \\
 y \in \mathbb{R}^m, X \succeq 0, \tau \geq 0, S \succeq 0, \rho \geq 0
 \end{aligned} \tag{٥.٨}$$

الحل المسموح به لهذا النظام مع  $\tau \geq 0$  يؤدي إلى حل مسموح به  $\frac{1}{\tau}S$  و  $\frac{1}{\tau}X$  للمسألتين الأساسية والثنائية. والمعادلة الأخيرة تضمن لنا الحل الأمثل. وذلك بطلب وجود فجوة ثنائية غير موجبة. ولهذا السبب لا يوجد حلول مسموح بها فعلياً للمسألة (٥.٨).

سوف نشرح الآن تمديد مسألة الطمر ذاتية الثنائية، وذلك لنتمكن من الحصول على حلول مسموح بها فعلياً، وكذلك لنحصل أيضاً على نقطة بداية للمسألة ذاتية الثنائية تكون على المسار الأوسط.

نحصل على مسألة الطمر المسموح بها فعلياً بتمديد مجموعة القيود في (٥.٨)، وإضافة متغيرات كالتالي:

$$\begin{aligned}
 & \text{minimize} \quad \theta\beta \\
 & \text{subject to} \\
 & \quad \text{tr}(A_i X) - \tau b_i + \theta \bar{b}_i = \\
 & \quad -\sum_{j=1}^m y_j A_j + \tau C - \theta \bar{C} - S = \quad (٨,٦) \\
 & \quad b^T y - \text{tr}(CX) + \theta\alpha - \rho = \\
 & \quad -\bar{b}^T y - \text{tr}(\bar{C}X) + \tau\alpha \quad \quad \quad -v = -\beta \\
 & \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad X \succeq 0, \tau \geq 0, \theta \geq 0, S \succeq 0, \rho \geq 0, v \geq 0
 \end{aligned}$$

حيث

$$\begin{aligned}
 \bar{b}_i &= b_i - \text{tr} A_i \\
 \bar{C} &= C - I \\
 \alpha &= 1 + \text{tr} C \\
 \beta &= n + 2 \\
 i &= 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

من الواضح التحقق من وجود حل مسموح به داخلياً كنقطة بداية، وذلك

باختيار:

$$y^\circ = 0, X^\circ = S^\circ = I, \theta^\circ = \rho^\circ = \tau^\circ = v^\circ = 1$$

لاحظ أن الحل  $v = \beta$ ، وباقي المتغيرات صفر هو حل أمثل، لأن دالة الهدف دائماً غير سالبة. وبمعنى آخر نجد أن  $\theta = 0$  في أي حل أمثل. وبالتالي فإنه من

السهل الحصول على حل أمثل ولكننا هنا نهتم فقط بالحلول المثلى ذات المتممة العظمى.

إن الحلول ذات المتممة العظمى إذا وجدت تضمن لنا حلاً أمثلاً لمسألة الطمر ذاتية الثنائية حيث  $\tau^* > 0$  ، وسنبين ذلك لاحقاً. إن المتممة العظمى هي نقطة نهاية المسار الأوسط لمسألة الطمر. وسنعطي الآن نظرية تبين ثنائية مسألة الطمر.

### نظرية ١.٨

لتكن  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^k$  مخروطاً محدباً مغلقاً closed convex cone حيث ثنائي المخروط  $\mathcal{K}$  هو  $\mathcal{K}^*$  ولتكن  $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$  هي مصفوفة متماثلة تخالفيًا. إن ثنائية لاجرنج لمسألة الأمثلة التالية:

$$\begin{aligned} q(x) = \text{minimize } & c^T x \\ \text{subject to } & Ax - s = c \\ & x \in \mathcal{K}, s \in \mathcal{K}^* \end{aligned} \quad (٧.٨)$$

هي

$$\begin{aligned} -q(x) \\ \text{subject to } & Ax - s = -c \\ & x \in \mathcal{K}, s \in \mathcal{K}^* \end{aligned}$$

وإذا كانت (٧.٨) لها حل مسموح به فعلياً ، فإن القيمة المثلى لـ  $q(x)$  هي صفر.

**البرهان:**

إن مسألة لاجرنج المرافقة لـ (٧.٨) هي

$$\begin{aligned} L(x, s, y) &= c^T x + y^T (Ax - s + c) \\ &= (A^T y + c)^T x - y^T s + y^T c \end{aligned}$$

وثنائية لاجرانج للمسألة (٧.٨) معرفة كالتالي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T y + \text{minimize} && \{(A^T y + c)^T x - y^T s\} \\ & y \in \mathbb{R}^k && x \in \mathcal{K}, s \in \mathcal{K}^* \end{aligned}$$

إن مسألة التصغير الداخلية تكون محدودة من أسفل فقط، إذا كانت  $A^T y + c \in \mathcal{K}^*$  وكانت  $-y \in \mathcal{K}$  ففي هذه الحالة يكون الحل الأمثل لمسألة التصغير الداخلية هو صفر. وبالتالي نستطيع تبسيط ثنائية لاجرانج كالتالي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && c^T x \\ & \text{subject to} && A^T y + c \in \mathcal{K}^* \\ & && -y \in \mathcal{K} \end{aligned}$$

باستخدام  $A^T = -A$  لأنها متماثلة تخالفاً وبالتعويض في المتغير الجديد

$$\begin{aligned} & v = A^T y + c = Au + c, \quad u = -y \\ & \text{maximize} && -c^T u \\ & \text{subject to} && Au - v = -c \\ & && u \in \mathcal{K}, v \in \mathcal{K}^* \end{aligned}$$

□

وبإخراج السالب نحصل على المطلوب.

الآن لدينا النتيجة التالية:

### نتيجة ٢.٨

مسألة الطمر (٦.٨) ذاتية الثنائية.

**البرهان:**

□ يتم البرهان باستخدام النظرية ١.٨ وبناء المصفوفة المتماثلة تخالفاً من (٧.٨).

إن كون مسألة الطمر (٦.٨) ذاتية ثنائية ولها حلول مسموح بها فعلياً

تقتضي أن الفجوة الثنائية تساوي  $2\theta\beta$ . ومن السهل التحقق من ذلك

$$\theta\beta = \text{tr}(XS) + \tau\rho + \theta v$$



وهذا يوضح أن الحل الأمثل لا بد أن يحقق شروط التمام التالية:

$$\left. \begin{array}{l} XS = 0 \\ \rho\tau = 0 \\ \theta v = 0 \end{array} \right\} \quad (٨.٨)$$

الآن سوف نتطرق إلى حل مسألة الطمر، من الممكن حل مسألة الطمر بواسطة أي من طرق النقطة الداخلية والتي تتبع المسار الأوسط. ولكن في البداية لا بد من إعادة صياغة الرموز للمسار الأوسط لمسألة الطمر، وذلك لأن مسألة الطمر ليست على الصورة القياسية، فنبدأ بإرخاء relax شروط أمثلة التمام (٨.٨) على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} XS &= \mu I \\ \rho\tau &= \mu \\ \theta v &= \mu \end{aligned}$$

إذا عرفنا المتغيرات الجديدة

$$\hat{X} = \begin{bmatrix} X & & \\ & \tau & \\ & & v \end{bmatrix}, \hat{S} = \begin{bmatrix} S & & \\ & \rho & \\ & & \theta \end{bmatrix}$$

فإن المسار الأوسط يعرف بشكل وحيد على النحو التالي:  $\hat{X}\hat{S} = \mu I, \mu > 0$  تحت القيود (٦.٨)، ونرمز له بالرمز  $(\hat{X}(\mu), \hat{S}(\mu))$  لكل  $\mu > 0$ .

#### ٤.٨ الخوارزمية الشكلية ودالة الأوسطية

##### Frame Algorithm and Centrality Function

نفترض في بقية هذا الباب والباب التاسع أن المسألتين الأساسية والثائية لهما حلول مسموح بها فعلياً. وكذلك نرمز لـ  $(X(\mu), y(\mu), S(\mu))$  بالحل الوحيد لنظام شروط المسار الأوسط

طريقة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية

$$\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C, \quad S \succ 0$$

$$XS = \mu I$$

وتذكر أن وجود وحدانية الحل يتحقق من كون  $(X(\mu), y(\mu), S(\mu))$  هي النقطة الصغرى الوحيدة للدالة المحدبة الأساسية الثنائية فعلياً

$$f_\mu(X, S) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(XS) - \log \det(XS) - n$$

والمعرفة داخل  $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ . إن دالة الحاجز الأساسية الثنائية هي عبارة عن الفرق بين دالة الحاجز الأساسية ودالة الحاجز الثنائية سالب الثابت  $n$ . والمعرفة كالتالي:

$$p_\mu(X) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(CX) - \log \det X$$

و

$$d_\mu(y, S) = -\frac{1}{\mu} b^T y - \log \det S$$

إن المسار الأوسط الأساسي يقابل تصغير  $X(\mu)$  لـ  $p_\mu(X)$ . ولهذا يقال للوسيط  $\mu$  أنه وسيط الأوسطية centering parameter، أو وسيط الحاجز barrier parameter.

سوف نشرح الآن خوارزمية الخطوة القصيرة short step algorithm والذي تتبع المسار الأوسط للمسألة الأساسية، واتجاه البحث  $\Delta X$  هو عبارة عن إسقاط اتجاه نيوتن لحاجز المسألة الأساسية، ومن الممكن استنتاج إسقاط اتجاه نيوتن بتصغير تقريب تايلور التربيعي لدالة  $p_\mu(X)$  تحت الشرط  $\Delta X \in \mathcal{L}^\perp$  للاتجاهات المسموح بها للمسألة الأساسية. أو بشكل آخر  $\Delta X$  هي حل مسألة التصغير التالية:

$$\Delta X = \arg \text{ minimize } \nabla p_\mu(X)^T \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T \nabla^2 P_\mu(X) \Delta X$$

$$\text{subject to } \text{tr}(A_i \Delta X) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

حيث  $\arg$  ترمز للنقطة التي تكون الدالة فيها أصغر ما يمكن.  
الآن نستطيع كتابة خوارزمية الخطوة الصغيرة للمسألة الأساسية.

### ٣.٨ خوارزمية

مدخلات  $X^\circ, \mu$  بحيث أن  $X^\circ$  حل مسموح بها فعلياً وقريبة من المسار الأوسط بشكل كافٍ.

الوسائط وسيط الدقة  $\varepsilon > 0$

$$\theta = \frac{1}{4\sqrt{n} + 2} \text{ وسيط التحديث}$$

إبدأ  $X = X^\circ; \mu = \mu^\circ$

بينما  $n\mu > \varepsilon$

$$X = X + \Delta X$$

$$\mu = (1 - \theta)\mu$$

نهاية

نهاية

لتكن  $X$  داخل  $\mathcal{P}$  ومعطى الوسيط  $\mu > 0$  نعرف

$$(S(X, \mu), y(X, \mu)) = \arg \text{ minimize } \left\| \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}} - I \right\|$$

$$\text{subject to } \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C$$

$$S \in \mathcal{S}_n, y \in \mathbb{R}^m$$

$S(X, \mu)$  تحقق القيود الثنائية المسموح بها دون أن نشترط أنها موجبة شبه معرفة. نعرّف الآن دالة المسار الأوسط

$$\delta_p(X, \mu) = \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|$$

لاحظ أن

$$\delta_p(X, \mu) = 0 \Leftrightarrow X = X(\mu)$$

المصفوفة  $S(X, \mu)$  تلعب دوراً أساسياً في تحليل الخوارزمية. وبالخصوص اتجاه البحث حيث يمكن أن يكتب بدلالته كما سنوضح ذلك في الفصل التالي.

## ٥.٨ إسقاط اتجاه نيوتن لدالة الحاجز الأساسية

### Projected Newton Direction for Primal Barrier Function

تذكر أن إسقاط اتجاه نيوتن لدالة الحاجز الأساسية

$$p_\mu(X) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(CX) - \log \det X$$

عند الزوج  $(X, \mu)$  معرف بـ

$$\begin{aligned} \Delta X &= \arg \text{ minimize } \nabla p_\mu^T \Delta X + \frac{1}{2} \Delta X^T \nabla^2 p_\mu \Delta X \\ &= \arg \text{ minimize } \text{tr}(\nabla p_\mu \Delta X) + \frac{1}{2} \text{tr}(\nabla^2 p_\mu \Delta X^2) \end{aligned} \quad (9.8)$$

تحت شروط وجود الحلول المسموح بها

$$\text{tr}(A_i \Delta X) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

حيث  $\nabla p_\mu = \nabla p_\mu(X, \mu)$  تمثل الاشتقاق gradient و  $\nabla^2 p_\mu$  تمثل مصفوفة هاس Hessian . وبمعنى آخر إسقاط اتجاه نيوتن يُصغر تقريب تايلور التربيعي لدالة  $p_\mu$  تحت شرط وجود اتجاه مسموح به. وسوف نرمز له عند  $X$  بـ  $\Delta X$ .

#### نتيجة ٤.٨

لتكن  $f : ri(S_n^+) \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث

$$f(x) = \log \det X$$

$$\nabla f(x) = X^{-1} \text{ فإن}$$

البرهان: انظر [VB].

#### نتيجة ٥.٨

لتكن  $f : ri(S_n^+) \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث

$$f(x) = \text{tr}(CX)$$

$$\nabla f(x) = C \text{ حيث } C \in S_n \text{ فإن}$$

البرهان: مباشر.

#### نتيجة ٦.٨

لتكن  $f : ri(S_n^+) \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث

$$f(x) = \log \det X$$

فإن

$$\nabla^2 f(x)H = -X^{-1}HX^{-1}, \quad \forall H \in S_n$$

هو عبارة عن مؤثر خطي linear operator لكل مصفوفة  $X$  قابلة للعكس.

البرهان: انظر [VB].

## نظرية ٧.٨

الدالة  $f : \text{ri}(S_n^+) \rightarrow \mathbb{R}$  بحيث

$$f(x) = -\log \det(X)$$

هي دالة محدبة فعلياً.

البرهان: انظر [HJ].

لدينا من نتيجة ٤.٨

$$\nabla p_\mu(X) = \frac{1}{\mu} C - X^{-1}$$

وكذلك  $\nabla^2 p_\mu(X, \mu) : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  هي عبارة عن مؤثر خطي يحقق

$$\nabla^2 p_\mu(X) \Delta X = X^{-1} \Delta X X^{-1}, \quad \forall \Delta X \in \mathcal{S}_n$$

بتعويض المشتقة ومصفوفة هاس في (٩.٨) نحصل على

$$\begin{aligned} \Delta X = \arg \text{ minimize } & \frac{1}{\mu} \text{tr}(C \Delta X) - \text{tr}(X^{-1} \Delta X) + \frac{1}{2} (\text{tr}(X^{-1} \Delta X))^2 \\ \text{subject to } & \text{tr}(A_i \Delta X) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

إن شروط الأمثلة KKT لهذه المسألة هي

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} C - X^{-1} + X^{-1} \Delta X X^{-1} + \sum_{i=1}^m y_i A_i &= 0 \\ \text{tr}(A_i \Delta X) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

وبالتلاعب المباشر بهذه الشروط نحصل على

$$\text{vec}(X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}}) = - \left[ I - \mathcal{A}_X^T (\mathcal{A}_X \mathcal{A}_X^T)^{-1} \mathcal{A}_X \right] \text{vec } Z \quad (10.8)$$

حيث  $Z = \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} C X^{\frac{1}{2}} - I$  و  $\text{vec}$  تعني تحويل المصفوفة إلى متجه يضع جميع الأعمدة فوق بعض كمتجه واحد، و  $A_X$  هي عبارة عن المصفوفة  $m \times n^2$  بحيث أن صفوفها هي

$$\text{vec} (X^{\frac{1}{2}} A_j X^{\frac{1}{2}})^T, \quad j = 1, \dots, m$$

إن المعادلة (١٠.٨) هي عبارة عن إسقاط عمودي للمتجه

$$\text{vec} \left( \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} C X^{\frac{1}{2}} - I \right)$$

على الفضاء الصفري null-space لـ  $A_X^2$ . لاحظ أن فضاء الصف لـ  $A_X$  معطى بـ

$$\text{span} \{ \text{vec} (X^{\frac{1}{2}} A_1 X^{\frac{1}{2}}), \dots, \text{vec} (X^{\frac{1}{2}} A_m X^{\frac{1}{2}}) \}$$

والفضاء الصفري متمم عمودي على هذا الفضاء.

وبالرجوع إلى فضاء المصفوفات المتماثلة  $\mathcal{S}_n$  من الواضح استنتاج اتجاه  $\Delta X$  عن طريق إسقاط المصفوفة  $\frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} C X^{\frac{1}{2}} - I$  على المتممة العمودية لـ

$$\text{span} \{ X^{\frac{1}{2}} A_1 X^{\frac{1}{2}}, \dots, X^{\frac{1}{2}} A_m X^{\frac{1}{2}} \}$$

مؤثر إسقاطي وثيق الصلة بالإسقاط السابق هو  $P_{A_X} : \mathcal{S}_n \rightarrow \mathcal{S}_n$  المعطى بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} P_{A_X}(M) = \arg \text{ minimize } \|W - M\| \\ \text{subject to } \text{tr} (X^{\frac{1}{2}} A_i X^{\frac{1}{2}} W) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (11.8) \\ W \in \mathcal{S}_n \end{aligned}$$

نستطيع الآن كتابة اتجاه البحث  $\Delta X$  بدلالة  $S(X, \mu)$ .

### ٨.٨ نظرية

اسقاط اتجاه نيوتن عند  $X \in \text{ri}(\mathcal{P})$  له الشكلين التاليين:

$$\Delta X = -X^{\frac{1}{2}} \left( P_{A_x} \left( \frac{X^{\frac{1}{2}} C X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right) \right) X^{\frac{1}{2}} = - \left( \frac{XS(X, \mu)X}{\mu} - X \right)$$

حيث شروط الأمثلة KKT للمسألة

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\| \\ & \text{subject to} \quad \sum_{i=1}^m y_i A_i + S = C \\ & \quad y \in \mathbb{R}^m, S \in \mathcal{S}_n \end{aligned}$$

هي

$$\left. \begin{aligned} \frac{X S X}{\mu^2} - Q &= \frac{X}{\mu} \\ \text{tr}(A_i Q) &= 0, \quad i = 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m y_i A_i + S &= C \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

حيث  $Q \in \mathcal{S}_n$

البرهان: انظر [Dk].

من الممكن حل شروط الأمثلة (١٢.٨) بإعادة كتابتها على الشكل

التالي:



$$\sum_{i=1}^m y_i \operatorname{tr}(XA_iXA_j) = \operatorname{tr}(XA_jXC) - \mu \operatorname{tr}(A_jX), \quad j = 1, \dots, m \quad (13.8)$$

إن حل هذا النظام الخطي  $m \times m$  يعطينا الحل  $y(X, \mu)$  ، ومصفوفة المعاملات  $\operatorname{tr}(XA_iXA_j)$  للنظام الخطي (١٣.٨) متماثلة موجبة شبه معرفة لأن المصفوفات

$$A_1, A_2, \dots, A_m$$

مستقلة خطياً. وبجعل

$$S(X, \mu) = \sum_{i=1}^m y_i(X, \mu)A_i - C$$

نستطيع حساب اتجاه البحث بواسطة

$$\Delta X = -\frac{1}{\mu} X S(X, \mu) X + X$$

## ٦.٨ اتجاه الموازنة التآلفي Affine – Scaling Direction

نظرية ٨.٨ تبين لنا أننا نستطيع تقسيم اتجاه البحث  $\Delta X$  إلى حدين

$$\Delta X = \frac{1}{\mu} \Delta X_a + \Delta X_c$$

حيث

$$\Delta X_a = -X^{\frac{1}{2}}(P_{A_X}(X^{\frac{1}{2}}CX^{\frac{1}{2}}))X^{\frac{1}{2}}$$

و

$$\Delta X_c = X^{\frac{1}{2}}(P_{A_X}(I))X^{\frac{1}{2}}$$

يسمى الحد الأول  $\Delta X_a$  معاملات التوازن التآلفي affine scaling ، ويسمى الحد الثاني  $\Delta X_c$  معاملات اتجاه البحث الأوسطية centering. لاحظ أن معاملات التوازن التآلفي  $\Delta X_a$  لاتجاه البحث  $\Delta X$  يصبح هو المسيطر عندما

تكون  $\mu$  صغيرة. تذكر أننا نحاول حساب  $X(\mu)$  على المسار الأوسط الأمثل. إن دور الاتجاه  $\Delta X_a$  هو الحصول على أكبر قدر من التصغير في دالة الهدف في دورة واحدة دون محاولة الاقتراب من المسار الأوسط.

هذا التمثيل الهندسي سيتضح أكثر بواسطة صيغ مختلفة لـ  $\Delta X_a$ .

بواسطة تعريف الإسقاط  $P_{A_i}$  في (١١.٨) نستطيع كتابة تعريف  $\Delta X_a$

على الشكل التالي:

$$X^{-\frac{1}{2}} \Delta X_a X^{-\frac{1}{2}} = \arg \text{ minimize } \left\| W - X^{-\frac{1}{2}} C X^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

$$\text{subject to } \text{tr} (X^{-\frac{1}{2}} A_i X^{-\frac{1}{2}} W) = 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (١٤.٨)$$

$$W \in \mathcal{S}_n$$

من الممكن تعريف اتجاه التوازن التآلفي بطريقة مختلفة كالتالي:

$$\Delta X_a = \arg \text{ minimize } \text{tr} (C \Delta X)$$

$$\text{subject to } \left\| X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 \leq 1 \quad (١٥.٨)$$

$$\text{tr} (A_i \Delta X) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

من السهل التحقق أن هذين التعريفين متكافئان بمقارنة شروط الأمثلة لمسألتي التصغير (١٤.٨) و (١٥.٨).

وبالتالي نحصل على  $X + \Delta X_a \in \mathcal{P}$  كما هو واضح من النتيجة التالية:

### نتيجة ٩.٨

ليكن لدينا  $X \in \mathcal{P}$ . إذا كانت  $\Delta X$  اتجاهاً مسموحاً به بمعنى

$$\text{tr} (A_i \Delta X) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

وكذلك كانت  $\Delta X$  تنتمي إلى المجموعة  $\{\Delta X : \|X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}}\|^2 \leq 1\}$  فإن  $X + \Delta X \in \mathcal{P}$ .

البرهان:

الشرط

$$\left\| X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}} \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}})^2 \leq 1$$

يقتضي أن

$$\left| \lambda_i (X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}}) \right| \leq 1, \quad i=1, \dots, n$$

والذي يوضح لنا

$$I + X^{-\frac{1}{2}} \Delta X X^{-\frac{1}{2}} \succeq 0$$

□ بالضرب من الجهتين بـ  $X^{\frac{1}{2}}$  نحصل على المطلوب، أي أن  $X + \Delta X \succeq 0$ . لكي نحصل على خوارزمية متقاربة لابد من إضافة المعامل الأوسطي  $\Delta X_c$ .

## ٧.٨ السلوك قرب المسار الأوسط

### Behavior Near the Central Path

ليكن لدينا معطى  $\mu > 0$  ونعلم أن  $X \in ri(\mathcal{P})$  بحيث أن

$$\delta_p(X, \mu) < 1.$$
 ونريد أن نعرف تأثير خطوة كاملة لإسقاط نيوتن

$$X^+ = X + \Delta X = 2X - \frac{1}{\mu} X S(X, \mu) X$$

إن الزوج  $(X^+, S(X, \mu))$  يحقق قيود المساواة للمسألة الأساسية والثنائية

ولكن قد لا يحقق شرط الإيجاب شبه المعرف. والنتيجتان التاليتان توضح لنا أن

شرط الإيجاب شبه المعرف متحقق إذا كانت  $X$  أوسطية بشكل كافٍ

بالنسبة لـ  $\mu$ .

## نتيجة ١٠.٨

إذا كانت  $X \succ 0$  وكانت  $\delta_p(X, \mu) < 1$ ، فإن  $S(X, \mu) \succ 0$

البرهان:

من تعريف  $\delta_p(X, \mu)$  نحصل على

$$\begin{aligned} \delta_p(X, \mu)^2 &= \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|^2 \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} - I \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\mu} \lambda_i \left( X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} \right) - 1 \right)^2 \end{aligned}$$

وباستخدام  $\delta_p(X, \mu) < 1$  نحصل على

$$\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\mu} \lambda_i \left( X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} \right) - 1 \right)^2 < 1$$

وهذا يوضح أن  $\lambda_i \left( X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} \right) > 0$  لكل  $i = 1, \dots, n$ . أي أن  $S(X, \mu) \succ 0$ .

هذه النتيجة تبين لنا أنه رغم استخدامنا للحل المسموح به الأساسي  $X \in \text{ri}(\mathcal{P})$  فإنه من خلال تنفيذ الخوارزمية نحصل على حل مسموح به للمسألة الثنائية  $S(X, \mu) \in \text{ri}(\mathcal{D})$  كمكسب عندما تكون  $\delta_p(X, \mu) < 1$ . وهذا يعطينا حداً أعلى

$$\text{tr}(CX) - p^* \leq \text{tr}(XS(X, \mu))$$

للتفريق بين قيمة دالة الهدف عند الدورة الحالية وبين القيمة المثلى بواسطة نظرية الثنائية الضعيف.

الآن سوف نوضح أن  $X^+ = X + \Delta X$  حل مسموح به. إذا كانت  $X$  أوسطية بشكل كافٍ.

### نتيجة ١١.٨

لتكن

$$X^+ = X + \Delta X = 2X - \frac{1}{\mu} S(X, \mu)X$$

إذا كانت  $\delta_p(X, \mu) < 1$  و  $X > 0$  فإن  $X^+ > 0$ .

البرهان:

لاحظ أننا نستطيع كتابة  $X^+$  على الشكل التالي: أي أن

$$X^+ = X^{\frac{1}{2}} \left( 2I - X^{\frac{1}{2}} \frac{S(X, \mu)}{\mu} X^{\frac{1}{2}} \right) X^{\frac{1}{2}} \quad (١٦.٨)$$

لأن  $\delta_p(X, \mu) < 1$  أي أن

$$\left\| \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} - I \right\| < 1$$

ينتج

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \left( \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right) < 1$$

وبالتالي لدينا

$$\lambda_i \left( \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} \right) \in (0, 2), \quad i = 1, \dots, n$$

والذي يقتضي

$$\lambda_i \left( 2I - X^{\frac{1}{2}} \frac{S(X, \mu)}{\mu} X^{\frac{1}{2}} \right) \in (0, 2), \quad i = 1, \dots, n$$

□

وكنتيجة لذلك نحصل على  $X^+ > 0$  من (١٦.٨).

أيضاً نستطيع الحصول على تقارب تريبيعي على الدورة الأساسية المؤدية إلى المسار الأوسط.

## نتيجة ١٢.٨

إذا كانت  $X \in ri(\mathcal{P})$  و  $\delta_p(X, \mu) < 1$  فإن

$$X^+ = X + \Delta X = 2X - \frac{1}{\mu} X S(X, \mu) X$$

تحقق  $\delta_p(X^+, \mu) \leq \delta_p^2(X, \mu)$ .

البرهان:

بتعريف  $\delta_p(X, \mu) < 1$  نحصل على

$$\begin{aligned} \delta_p(X^+, \mu)^2 &= \left\| \frac{X^{+\frac{1}{2}} S(X^+, \mu) X^{+\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|^2 \leq \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|^2 \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} S(X, \mu) X^+ - I \right)^2 \right) \end{aligned}$$

وبالتعويض عن  $X^+ = 2X - \frac{1}{\mu} X S(X, \mu) X$  ينتج

$$\begin{aligned} \delta_p(X^+, \mu)^2 &\leq \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} S(X, \mu) \left[ 2X - \frac{1}{\mu} X S(X, \mu) X \right] - I \right)^2 \right) \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} S(X, \mu) X - I \right)^4 \right) \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} - I \right)^4 \right) \\ &= \left\| \left( \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} - I \right)^2 \right\|^2 \\ &\leq \left\| \frac{1}{\mu} X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}} - I \right\|^4 = \delta_p^4(X, \mu) \end{aligned}$$

□ حيث المتباينة الثانية ناتجة من خواص معيار فروبينيس Frobenius norm .

## ٨.٨ تحديث وسيط المسار الأوسط

## Updating the Centering Parameter

عندما تكون دورة المسألة الأساسية  $X$  أوسطية بشكل كافٍ، أي أن  $\delta_p(X, \mu) \leq \tau$  لتحمّل ما  $\tau$  فإننا نستطيع تخفيض الوسيط  $\mu$ . نُحدث وسيط الحاجز بطريقة ما بحيث يبقى  $\delta_p(X, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$  بعد تحديث  $\mu$  بـ  $\mu^+$ . الخطوة التالية  $X + \Delta X$  تولد  $X^+$  حلاً مسموحاً به يحقق  $\delta_p(X^+, \mu^+) \leq \frac{1}{4}$  بواسطة نتيجة ١٢.٨.

## نتيجة ١٣.٨

نعرف تحديث لـ  $\mu$  بـ  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$  بحيث  $0 < \theta < 1$  وسيطاً معطى. ومن هذا نستنتج

$$\delta_p(X, \mu^+) \leq \frac{1}{1-\theta} (\delta_p(X, \mu) + \theta\sqrt{n})$$

البرهان:

$$\begin{aligned} \delta_p(X, \mu^+) &= \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu^+) X^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)\mu} - I \right\| \\ &\leq \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)\mu} - I \right\| \\ &= \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{(1-\theta)\mu} - \frac{1}{1-\theta} I + \frac{\theta}{1-\theta} I \right\| \\ &\leq \frac{1}{1-\theta} \left( \left\| \frac{X^{\frac{1}{2}} S(X, \mu) X^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\| + \theta \|I\| \right) \\ &= \frac{1}{1-\theta} (\delta_p(X, \mu) + \theta\sqrt{n}) \end{aligned}$$

□ حيث المتباينة الثانية تتحقق من المتباينة المثلثية triangular inequality.

إن النتيجة السابقة تمكنا أن نختار تحديث للوسيط  $\theta$  والذي يضمن أن تبقى الدورة الأساسية أوسطية بشكل كافٍ بالنسبة للوسيط الجديد  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$ .

## نتيجة ١٤.٨

لتكن  $\delta_p(X, \mu) \leq \frac{1}{2}$  و  $\theta = 1/(4\sqrt{n}+2)$ . بعد خطوة  $X^+ = X + \Delta X$  والتحديث  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$  نحصل على  $\delta_p(X^+, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$ .

## البرهان:

باستخدام نتيجة ١٣.٨ ونتيجة ١٢.٨ نحصل على

$$\begin{aligned} \delta_p(X^+, \mu^+) &\leq \frac{1}{1-\theta} (\delta_p(X^+, \mu) + \theta\sqrt{n}) \\ &\leq \frac{1}{1-\theta} (\delta_p^2(X, \mu) + \theta\sqrt{n}). \end{aligned}$$

وبالتعويض عن  $\theta = 1/(4\sqrt{n}+2)$  نحصل على

$$\begin{aligned} \delta_p(X^+, \mu^+) &\leq \frac{4\sqrt{n}+2}{4\sqrt{n}+1} \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt{n}+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

□

من السهل التحقق من أنه إذا كانت  $\delta_p(X, \mu) \leq \frac{1}{2}$  فإن التحديث

الديناميكي

$$\theta = \frac{\frac{1}{2} - \delta_p(X, \mu)}{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} \geq \frac{1}{4\sqrt{n}+2}$$

يضمن أن  $\delta_p(X, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$  إذا كانت  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$ . السؤال الآن هل من الممكن أن نحصل على قيمة صغرى لـ  $\mu^+$  بحيث أن الشرط  $\delta_p(X, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$



يبقى متحقق؟ وهذا في الحقيقة ممكن، وذلك بإعادة كتابة  $\delta_p(X, \mu)$  على الشكل التالي:

$$\delta_p(X, \mu) = \left\| X^{-\frac{1}{2}} \left( \Delta X_c + \frac{1}{\mu} \Delta X_a \right) X^{-\frac{1}{2}} \right\|$$

من تعريف  $\delta_p$  ونظرية ٨.٨.

لنرمز  $D_c = X^{-\frac{1}{2}} \Delta X_c X^{-\frac{1}{2}}$  و  $D_a = X^{-\frac{1}{2}} \Delta X_a X^{-\frac{1}{2}}$  نرى أن أصغر قيمة لـ

$\mu^+$  والتي لا زالت تحقق  $\delta_p(X, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$  هي أصغر جذر موجب للمعادلة

$$\delta_p(X, \mu) = \left\| D_c + \frac{1}{\mu} D_a \right\| = \frac{1}{2}$$

وبتربيع طرفي المعادلة نحصل على المعادلة التربيعية لـ  $\frac{1}{\mu}$  التالية:

$$\frac{1}{\mu^2} \|D_a\|^2 + \frac{2}{\mu} \text{tr}(D_a D_c) + \|D_c\|^2 - \frac{1}{4} = 0$$

والذي من الممكن حلها للحصول على  $\mu^+$  المطلوبة.

النظرية التالية تعطينا حداً لأسوأ الأحوال تعقيداً للخوارزمية الشكلية.

### نظرية ١٥.٨

لتكن  $\varepsilon > 0$  وسيط دقة،  $\mu^\circ > 0$  و  $\theta = 1/(4\sqrt{n} + 2)$ . لتكن  $X^\circ > 0$  نقطة بداية مسموح بها فعلياً بحيث أن  $\delta_p(X^\circ, \mu^\circ) \leq \frac{1}{2}$ . إن الخوارزمية تنتهي بعد  $\left[ 6\sqrt{n} \log \frac{n\mu^\circ}{\varepsilon} \right]$  خطوة على الأكثر، وتكون المصفوفات الأخيرة الناتجة  $X$  و  $S(X, \mu)$  حلولاً مسموحاً بها فعلياً، والفجوة الثنائية محدودة بـ  $\frac{3}{2}\varepsilon$ .  $\text{tr}(XS(X, \mu)) \leq \frac{3}{2}\varepsilon$ .

البرهان: انظر [Dk].

### ٩.٨ خوارزمية الثنائية Dual Algorithm

إن خوارزمية الثنائية هي مشابهة تماماً لخوارزمية المسألة الأساسية، إذا

عرفنا

$$X(S, \mu) = \arg \text{ minimize } \left\| \frac{S^{\frac{1}{2}} X S^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|$$

subject to  $\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m$   
 $X \in \mathcal{S}_n$

وذلك للمتغير المسموح به الفعلي الثنائي  $S > 0$ ، وبالتالي فإن المرتبة الأولى لشروط الأمثلة والذي يعطينا  $X(S, \mu)$  هي:

$$S \left[ \frac{XS}{\mu} - I \right] - \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i = 0 \quad (17.8)$$

$$\text{tr}(A_i X) = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (18.8)$$

وبالضرب من اليمين واليسار للمعادلة (17.8) بـ  $S^{-1}$ ، وبعد ذلك استخدام المعادلة (18.8). نحصل على:

$$\sum_{i=1}^m \Delta y_i \text{tr}(A_i S^{-1} A_j S^{-1}) = \frac{-1}{\mu} b_j + \text{tr}(A_j S^{-1}), \quad j = 1, \dots, m \quad (19.8)$$

وإذا عرفنا

$$\delta_d(S, \mu) = \left\| \frac{S^{\frac{1}{2}} X(S, \mu) S^{\frac{1}{2}}}{\mu} - I \right\|$$

فإننا نستطيع إعادة التحليل الذي قمنا به بالنسبة للخوارزمية الأساسية، ولكن بتبديل دور  $S$  مع  $X$ . إن اتجاه إسقاط نيوتن لدالة الحاجز الثنائية  $d_\mu$  (اتجاه البحث للخوارزمية) يكون

$$\Delta S = S^{\frac{1}{2}} \left( I - \frac{1}{\mu} S^{\frac{1}{2}} X(S, \mu) S^{\frac{1}{2}} \right) S^{\frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i \quad (٢٠.٨)$$

حيث نحصل على  $\Delta y$  بحل (١٩.٨)، وبالتالي نحصل على  $\Delta S$  من

$$\Delta S = - \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i$$

الآن نستطيع كتابة خوارزمية الخطوة الصغيرة للمسألة الثنائية.

### خوارزمية ١٦.٨

مدخلات زوج من الحلول المسموح بها الفعلية الثنائية  $(S^\circ, y^\circ)$

الوسائط الوسيط  $\mu^\circ$  بحيث أن  $S_d(S^\circ, \mu^\circ) \leq \frac{1}{2}$

وسيط الدقة  $\varepsilon > 0$

وسيط التحديث  $\theta = 1/(4\sqrt{n} + 2)$

ابدأ  $S = S^\circ, \mu = \mu^\circ$

بينما  $n\mu > \varepsilon$

$$S = 2S - \frac{1}{\mu} SX(S, \mu)S$$

$$\mu = (1 - \theta)\mu$$

نهاية

نهاية

نظراً للتشابه في تحليل خوارزمية المسألة الأساسية وخوارزمية المسألة الثنائية فإن

المسألتين لهما نفس حد التعقيد المذكور في نظرية ١٥.٨.

من المهم ملاحظة أنه ليس من الضروري صياغة  $X(S, \mu)$  بشكل صريح لمعرفة ما إذا كانت موجبة شبه معرفة أو لا، وبالتالي حساب الفجوة الثنائية والتأكد من أنها موجبة، ومن (١٧.٨) نعلم أن

$$X(S, \mu) \geq 0 \Leftrightarrow S + \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i \geq 0$$

أيضاً لاحظ أنه إذا كانت  $X(S, \mu) \geq 0$  فإن الفجوة الثنائية عند  $(X(S, \mu), S)$  معطاة بالمعادلة

$$\text{tr}(X(S, \mu)S) = \mu \text{tr}(S - \Delta S)$$

من (٢٠.٨). هذه الملاحظات مهمة عند الاستفادة من تناثر المعلومات.

## ١٠.٨ طرق التحديث الكبيرة Large Update Methods

إن استراتيجية تحديث  $\mu$  التي شرحناها في الفصول السابقة متحفظة جداً عند استخدامها في التطبيقات العملية. وسوف نشرح في هذا الفصل استراتيجيتين لتحديث  $\mu$ ، والتي تسمح لنا بتخفيض كبير لها. في الخوارزمية التالية سوف نستخدم التحديث الديناميكي لـ  $\mu$

$$\mu = \frac{\text{tr}(XS)}{n + v\sqrt{n}}$$

حيث  $S \in \text{ri}(D)$  في الدورة الثنائية الحالية، و  $X \in \mathcal{P}$  أفضل حل معلوم أساسي، و  $v \geq 1$  وسيط معطى. تسمى هذه الخوارزمية بخوارزمية الموازنة الثنائية:

## خوارزمية ١٧.٨

مدخلات

زوج  $(X^\circ, S^\circ) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ 

الوسائط

الوسيط  $\mu_0 > 0$  بحيث أن  $\delta_d(S^\circ, \mu_0) \leq \frac{1}{2}$ وسيط الدقة  $\varepsilon > 0$ الوسيط  $\nu \geq 1$  $X = X^\circ, S = S^\circ, \mu = \mu_0$ 

ابدأ

بينما  $\text{tr}(XS) > \varepsilon$ 

$$S = 2S - \frac{1}{\mu} SX(S, \mu)S$$

إذا  $X(S, \mu) > 0$  فإن  $X = X(S, \mu)$ 

$$\mu = \frac{\text{tr}(XS)}{n + \nu\sqrt{n}}$$

نهاية

نهاية

إن دور المصفوفة  $X$  في الخوارزمية هو للترميز، وليس لها دور في الحسابات ولا تحتاج إلى تخزينها.

لدينا الآن حد التعقيد للخوارزمية ١٧.٨.

## نظرية ١٨.٨

إن طريقة الموازنة الثنائية تتوقف بعد

$$O\left(\nu\sqrt{n} \log\left(\frac{\text{tr}(X^\circ S^\circ)}{\varepsilon}\right)\right)$$

دورة. والنتيجة هي زوج  $(X(S, \mu), S) \in \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ ، بحيث  $\text{tr}(X(S, \mu)S) \leq \varepsilon$

البرهان: انظر [Ye].

خوارزمية الخطوة الصغيرة مددت بواسطة [AF] لتستخدم تحديثاً كبيراً  $\mu$ . الخوارزمية تعمل بخطوات إسقاط نيوتن بالنسبة لقيمة  $\mu$ ، حتى يتحقق  $\delta_d(S, \mu) \leq \frac{1}{2}$  للدورة الحالية. بعد ذلك  $\mu$  تخفض بكسر ثابت، بحيث أن  $\mu = (1 - \theta)\mu$ . من الممكن الآن كتابة خوارزمية الخطوة الطويلة للمسألة الشائبة على الشكل التالي:

## خوارزمية ١٩.٨

مدخلات زوج  $(X^\circ, y^\circ) \in ri(D)$

الوسائط وسيط أوسطي  $\tau = 1/\sqrt{2}$ ,  $\tau > 0$

وسيط  $\mu^\circ$  بحيث  $\delta_d(S^\circ, \mu^\circ) \leq \tau$

وسيط دقة  $\varepsilon > 0$  ووسيط تحديث  $0 < \theta < 1$

ابدأ  $S = S^\circ$ ,  $y = y^\circ$ ,  $\mu = \mu^\circ$

بينما  $\text{tr}(XS) > \varepsilon$

إذاً  $\delta_d(S, \mu) \leq \tau$

$\mu = (1 - \theta)\mu$

وإلا  $\delta_d(S, \mu) > \tau$

احسب  $(\Delta S, \Delta y)$  وأوجد  $\alpha$

$$S = S + \alpha \Delta S$$

$$y = y + \alpha \Delta y$$

نهاية

نهاية

نهاية

حيث  $\alpha = \arg \text{ minimize } d_\mu(y + \alpha \Delta y, S + \alpha \Delta S)$ .

هذه الخوارزمية لها حد في أسوأ الحالات، بحيث إذا كانت  $\theta = O(1)$  فإن حد الدورات هو  $O(nL)$ ، وإذا كانت  $\theta = O(1/\sqrt{n})$  فإن حد الدورات هو  $O(\sqrt{nL})$ .

### تمارين الباب الثامن

١.٨ لدينا البرنامج التالي

$$\begin{aligned} & \text{maximize } y_1 + y_2, \quad y \in \mathbb{R}^2 \\ & \text{subject to } y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد البرنامج الثنائي؟ ثم أوجد مسألة الطمر المتجانس للمسألتين الأساسية والثنائية؟

٢.٨ لتكن  $b = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $n = m = 3$  وأن:

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد مسألة لاجرانج المرافقة؟

٣.٨ أوجد  $p_\mu(X)$  و  $f_\mu(X, S)$  و  $d_\mu(y, S)$  لتمارين ٢.٨؟

٤.٨ حل البرنامج التالي:

$$, m = 3, \quad n = 2$$

طريقة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية

$$، C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ، b = [1 \ 2 \ 1]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ، A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ،$$

باستخدام خوارزمية ٤٣.٨

٥.٨ أوجد  $\delta_p(X, \mu)$  لتمرين ٤١.٨

٦.٨ حل البرنامج في تمرين ٤.٨ باستخدام خوارزمية ٤١٩.٨





## Path Following Method

- مقدمة • مقترح تابع المسار
- واتجاهات بحث NT
- الحلول المسموح بها لخطوة
- NT الكاملة • التقارب
- التريبيعي للمسار الأوسط •
- تحديث وسيط دالة
- الحاجز // • خطوة طويلة
- لطريقة تابع المسار • طرق
- التنبؤ والتصحيح

### 1.9 مقدمة Introduction

إن أحد أسماء طرق تابع المسار هي طرق الأساسية الثنائية لتابع المسار وهذا الاسم يعبر بشكل جميل وواضح عن هذه الطرق، والفكرة أن الخوارزمية

تتبع المسار الأساسي الثنائي الأوسط بشكل تقريبي، وذلك للوصول لمجموعة الحلول المثلى. وبشكل دقيق فإن شروط الأوسطية (١.٧) حُلت تقريباً لقيمة معطاة  $\mu > 0$ ، وبعد ذلك تخفض قيمة  $\mu$  وتعاد العملية.

إن طريقة تابع المسار هي الأكثر نجاحاً من بين طرق النقطة الداخلية لحل مسألة البرمجة الخطية، وإن تمديد هذه الطريقة من البرمجة الخطية إلى البرمجة الموجبة شبه المعرفة حقق نجاح مماثل. وسوف ندرس في هذا الباب طرق تستخدم موازنة NT، والمسماة بطريقة الخطوة الصغيرة [DPRT]. وكذلك طريقة الخطوة الطويلة [Ji]، كما بينا ذلك سابقاً في الباب الثامن، وسوف نتطرق لبعض طرق التنبؤ والتصحيح predictor-corrector والتي تستخدم اتجاه NT.

## ٢.٩ مقترح تابع المسار واتجاهات بحث NT

### The Path Following Approach and the NT Search Direction

لقيمة معطاة  $\mu > 0$ ، من الممكن اعتبار  $\mu$ -الأوسط  $(X(\mu), S(\mu))$  نقطة هدف على المسار الأوسط، بحيث تكون الفجوة الثنائية المرافقة هي  $\text{tr}(X(\mu), S(\mu)) = n\mu$ . أو بمعنى آخر إذا استطعنا حساب  $\mu$ -الأوسط بالضبط فإن الفجوة الثنائية سوف تساوي  $n\mu$ .

إن خوارزمية تابع المسار تحسب بشكل دوري قيمة  $(X(\mu), S(\mu))$ ، ويتبع ذلك تخفيض في قيمة  $\mu$ .

وبفرض أن الزوج المعطى  $(X, S) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  هما حلول مسموح بها فعلياً، وكذلك معطى  $\mu > 0$ . والمطلوب هو حساب  $(\Delta X, \Delta S)$ . بحيث أن  $X + \Delta X \in \mathcal{P}$  و  $S + \Delta S \in \mathcal{D}$  وكذلك

$$(X + \Delta X)(S + \Delta S) = \mu I \quad (١.٩)$$

وكما شرحنا في الباب الخامس حيث في الجدول ١.٥ ذكرنا طرق مختلفة لتقريب الحل الناتج من نظام المعادلات غير الخطي. هذه الحلول المختلفة تقودنا إلى اتجاهات بحث مختلفة.

أحد أشهر اتجاهات البحث الأساسية الثنائية هو المسمى اتجاه NT، والمبين في [NT]، وسوف ندرس فقط هذا الاتجاه.

ولاستنتاج اتجاهات بحث NT، سوف نقوم بتقديم بعض الترميز لاتجاهات NT. للحل المسموح به فعلياً  $X > 0$  للمسألة الأساسية، وكذلك  $S > 0$  للمسألة الثنائية. إن المصفوفة الموزنة هي

$$D = S^{-\frac{1}{2}} (S^{\frac{1}{2}} X S^{\frac{1}{2}}) S^{-\frac{1}{2}} \quad (٢.٩)$$

والتي تحقق  $D^{-1}X = SD$  أو

$$D^{-\frac{1}{2}} X D^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}} S D^{\frac{1}{2}} = V \quad (٣.٩)$$

ويعنى آخر نستطيع استخدام المصفوفة  $D$  لموازنة المتغيرات  $X$  و  $S$  لنفس المصفوفة المتماثلة الموجبة المعرفة  $V$ .

$$V^2 = D^{-\frac{1}{2}} X S D^{\frac{1}{2}} \sim XS \quad (٤.٩)$$

وكنتيجة للمعادلة (٤.٩) أعلاه فإن الفجوة الثنائية عند  $(X, S) \in ri(P \times D)$  معطى كالتالي:

$$\begin{aligned} \text{tr}(XS) &= \text{tr}(V^2) \\ &= \|V\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2(V) \end{aligned}$$

إن اتجاه البحث الموزون معرف على الشكل التالي:

$$D_X = D^{-\frac{1}{2}} \Delta X D^{-\frac{1}{2}}$$

و

$$D_S = D^{\frac{1}{2}} \Delta S D^{\frac{1}{2}}$$

ولهما خاصية التعامد بحيث  $\text{tr}(D_X D_S) = 0$ . إن اتجاه البحث الأساسي الثنائي الموزون معرف على الشكل التالي:

$$D_V = D_X + D_S$$

وباستخدام مصفوفة الموازنة  $D$  المعرفة في (٢.٩) تستطيع كتابة (١.٩) على الشكل التالي:

$$(V + D_X)(V + D_S) = \mu I \quad (٥.٩)$$

الآن نستطيع إضعاف الشرط (٥.٩) بتبديل الطرف الأيسر، وذلك يجعله متماثلاً ومن ثم نحصل على

$$\frac{1}{2} \left[ (V + D_X)(V + D_S) + ((V + D_X)(V + D_S))^T \right] = \mu I$$

بعد ذلك نجعل النظام خطياً بإهمال الحد المضروب  $D_X D_S$  و  $D_S D_X$ ، وسنحصل على

$$\frac{1}{2} \left( (D_X + D_S)V + V(D_X + D_S) \right) = \mu I - V^2 \quad (٦.٩)$$

إن المعادلة (٦.٩) تسمى معادلة ليينوف Lyapunov equation، ولها حل وحيد متماثل معطى على الشكل التالي:

$$D_V = D_X + D_S = \mu V^{-1} - V$$

طريقة تابع المسار

ويضرب المعادلة قبل وبعد  $D_V$  بـ  $D^{\frac{1}{2}}$  نحصل على معادلات NT

$$\Delta X + D\Delta S D = \mu S^{-1} - X \quad (٧.٩)$$

تحت القيود

$$\begin{aligned} \text{tr}(A_i \Delta X) &= 0, \quad i=1, \dots, m \\ \Delta S &= \sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i \end{aligned} \quad (٨.٩)$$

وبسهولة نحصل على

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Delta y_j \text{tr}(A_j D A_j D) &= \mu \text{tr}(A_i S^{-1}) - \text{tr}(A_i X) \\ &= \mu \text{tr}(A_i S^{-1}) - b_i, \quad i=1, \dots, m \end{aligned}$$

لاحظ أن هذا النظام له مصفوفة موجبة معرفة، وبالتالي نستطيع حلها بالنسبة لـ  $\Delta y$ ، وبعد ذلك لـ  $\Delta S$  وذلك من المعادلة (٨.٩). كما نحصل على  $\Delta X$  من المعادلة (٧.٩). وبالتالي نحصل على الاتجاه  $(\Delta X, \Delta S)$  اتجاه NT. ولنفرض أن  $(X, S) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  معطى، وكذلك قيمة  $\mu > 0$ . سوف نستخدم دالة الأوسطية

$$\begin{aligned} \delta(X, S, \mu) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|D_V\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\mu} V^{-1} - \frac{1}{\sqrt{\mu}} V \right\| \end{aligned}$$

التي قدمت بواسطة [Ji]. لاحظ أن  $\delta(X, S, \mu) \geq 0$ ، وكذلك

$$\delta(X, S, \mu) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad V^2 = \mu I \Leftrightarrow XS = \mu I$$

إن هذه الدالة هي عبارة عن تعميم لدالة الأوسطية للبرمجة الخطية المقدمة بواسطة [JRTP] للبرمجة الموجبة شبه المعرفة، وسوف نستخدمها بشكل مكثف. وقد وضع [Ji] أن  $\delta(X, S, \mu)$  لها علاقة بالاتجاه الاشتقاقي directional derivative لخوارزمية الحاجز الأساسية الثنائية في اتجاه NT. ولكي نستنتج هذه العلاقة، نرمز  $(\Delta X, \Delta S)$  لاتجاه NT عند  $(X, S)$ . ولتكن  $f_\mu$  ترمز لدالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية الثنائية

$$f_\mu(X, S, \mu) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(XS) - \log \det(XS)$$

إن الاتجاه الاشتقاقي لـ  $f_\mu$  عند  $(X, S)$  في اتجاه NT معطى على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_X f(X, S, \mu), \Delta X \rangle + \langle \nabla_S f(X, S, \mu), \Delta S \rangle \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} S - X^{-1} \right) \Delta X \right) + \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} X - S^{-1} \right) \Delta S \right) \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} V - V^{-1} \right) D_X \right) + \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} V - V^{-1} \right) D_S \right) \\ &= \text{tr} \left( \left( \frac{1}{\mu} V - V^{-1} \right) D_V \right) \\ &= -\frac{1}{\mu} \text{tr}(D_V^2) = -4\delta^2 \end{aligned}$$

هذه المساواة تبين أن  $\delta$  هي بشكل طبيعي دالة وسطية مرافقة للاتجاه NT.

إن جميع خوارزميات هذا الباب تشابه الخوارزمية الهيكلية

التالية:

### خوارزمية ١.٩

مدخلات

$$(X^\circ, S^\circ) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D}) \text{ زوج}$$

الوسائط

$$\tau < 1 \text{ وسيط أوسطي}$$

$$\delta(X^\circ, S^\circ, \mu_0) \leq \tau \text{ وسيط } \mu_0 > 0 \text{ بحيث}$$

$$\varepsilon > 0 \text{ وسيط دقة}$$

$$S = S^\circ, y = y^\circ, \mu = \mu_0$$

ابدأ

$$\text{بينما } \text{tr}(XS) > \varepsilon$$

احسب  $\Delta X, \Delta S$  من المعادلتين (٧.٩) و (٧.٩)

اختر طول الخطوة  $X \in (0, 1]$

$$X = X + \alpha \Delta X$$

$$S = S + \alpha \Delta S$$

اختر وسيط التحديث  $0 < \theta < 1$

$$\mu = (1 - \theta)\mu$$

نهاية

نهاية

سوف نحدد

$$(X^+, S^+) := (X + \Delta X, S + \Delta S)$$

على أنها خطوة NT الكاملة، و

$$(X_\alpha, S_\alpha) := (X + \alpha \Delta X, S + \alpha \Delta S)$$

على أنها انقباض خطوة NT إذا كانت  $0 < \alpha < 1$ .



## ٣.٩ الحل المسموح بها لخطوة NT الكاملة

**Feasibility of the Full NT Step**

لتكن  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  وقيمة  $\mu > 0$  معطاة، سوف نحتاج النظرية التالية في إثبات نتائج لاحقة مهمة.

## نظرية ٣.٩

لتكن  $X > 0$  و  $S > 0$  إذا كانت

$$\det(X_\alpha S_\alpha) > 0, \quad \forall 0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$$

حيث  $\bar{\alpha}$  قيمة موجبة،  $S_\alpha = S + \alpha \Delta S$  و  $X_\alpha = X + \alpha \Delta X$  فإن  $X_{\bar{\alpha}} > 0$  وكذلك  $S_{\bar{\alpha}} > 0$ .

**البرهان:**

لأن

$$\det(X_\alpha S_\alpha) = \det(X_\alpha) \det(S_\alpha)$$

فإن

$$\det(X_\alpha S_\alpha) = \prod_i \lambda_i(X_\alpha) \prod_i \lambda_i(S_\alpha)$$

إن الطرف الأيسر دائماً موجب في الفترة  $[0, \bar{\alpha}]$ ، وهذا يعني أن القيم الذاتية لـ  $X_\alpha$  و  $S_\alpha$  تبقى موجبة في الفترة  $[0, \bar{\alpha}]$ . أي أن  $X_{\bar{\alpha}} > 0$  وكذلك  $S_{\bar{\alpha}} > 0$ . □  
سوف نثبت النتيجة التاليتين وهما مشابهتان للنتيجتين في البرمجة الخطية.

## نتيجة ٣.٩

لتكن  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  و  $\mu > 0$ . إذا كانت  $\delta(X, S, \mu) < 1$ ، فإن خطوة NT الكاملة هي حل مسموح به فعلياً.

**البرهان:**

سوف نوضح أن محددة  $X_\alpha S_\alpha$  determinant تبقى موجبة لكل  $\alpha \leq 1$ . وبالتالي فإن  $X(1), S(1) > 0$  من نتيجة ٢.٩، لاحظ أن

$$\begin{aligned} X_\alpha S_\alpha &\sim (V + \alpha D_X)(V + \alpha D_S) \\ &= V^2 + \alpha D_X V + \alpha V D_S + \alpha^2 D_X D_S \\ &= V^2 + \alpha(\mu I - V^2) + \frac{1}{2}\alpha^2 (D_X D_S + D_S D_X) \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2}\alpha^2 (D_X D_S - D_S D_X) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}\alpha (D_X V + V D_S - V D_X - D_S V) \right] \end{aligned}$$

وذلك باستخدام معادلة (٦.٩). إن المصفوفة داخل الأقواس المربعة هي مصفوفة متماثلة تخالفيًا، وهذا يقتضي أن محددة  $[X_\alpha S_\alpha]$  موجبة إذا كانت المصفوفة

$$M(\alpha) := V^2 + \alpha(\mu I - V^2) + \frac{1}{2}\alpha^2 (D_X D_S + D_S D_X)$$

موجبة معرفة. ولأننا نستطيع إعادة صياغة  $M(\alpha)$  على الشكل:

$$M(\alpha) = (1-\alpha)V^2 + \alpha\mu \left[ I + \frac{\alpha}{2\mu} (D_X D_S + D_S D_X) \right]$$

يكون لدينا  $M(\alpha) > 0$  إذا كانت  $\alpha \leq 1$  و

$$\left\| \frac{(D_X D_S + D_S D_X)}{2\mu} \right\|_2 < 1$$

إن الشرط الأخير متحقق لأن  $\delta < 1$  لأن

طرق النقطة الداخلية

$$\begin{aligned} \left\| \frac{D_X D_S + D_S D_X}{2\mu} \right\|_2 &= \frac{1}{\mu} \left\| \frac{1}{2} (D_X D_S + D_S D_X) \right\|_2 \\ &\leq \frac{1}{4\mu} \|D_V\|^2 = \delta^2 < 1 \end{aligned}$$

النتيجة التالية توضح أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة

□ كاملة لـ NT.

#### نتيجة ٤.٩

إذا كانت  $(X, S) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  و  $\mu > 0$  بحيث  $\delta(X, S, \mu) < 1$  فإن

$$\text{tr}(X^+ S^+) = n\mu$$

أي أن الفجوة الثنائية المطلوبة نحصل عليها بعد خطوة كاملة لـ NT.

البرهان:

من إثبات نتيجة ٣.٩ تحصل على

$$\begin{aligned} X^+ S^+ &\sim \mu I + \frac{1}{2} (D_X D_S + D_S D_X) \\ &+ \left[ \frac{1}{2} (D_X D_S - D_S D_X) + \frac{1}{2} (D_X V - V D_S - V D_X - D_S V) \right] \quad (٩.٩) \end{aligned}$$

لأن  $A \sim B$  يقتضي

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(B), \quad A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

نستنتج

$$\text{tr}(X^+ S^+) = \text{tr}(\mu I) = n\mu$$

وذلك باستخدام  $\text{tr}(D_X D_S) = 0$  والتماثل التخالفي للمصفوفة في الأقواس

□ المربعة.

## ٤.٩ التقارب التربيعي للمسار الأوسط

**Quadratic Convergence to the Central Path**

سوف نرسم للمصفوفة المتماثلة تخالفياً (٩.٩) بالرمز  $M$ . كذلك نستطيع

تبسيط الترميز بتعريف

$$D_{XS} = \frac{1}{2}(D_X D_S + D_S D_X)$$

لإثبات التقارب التربيعي للخطوة الكاملة لـ NT نحتاج إلى النتائج التالية:

**نتيجة ٥.٩**

لدينا

$$\lambda_{\min}((V^+)^2) \geq \mu(1 - \delta^2)$$

حيث  $\lambda_{\min}$  ترمز لأصغر قيمة ذاتية.

**البرهان:**

من (٩.٩) نستنتج

$$\lambda_{\min}((V^+)^2) = \lambda_{\min}(\mu I + D_{XS} + M)$$

المصفوفة المتماثلة تخالفياً  $M$  تقتضي:

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}((V^+)^2) &\geq \lambda_{\min}(\mu I + D_{XS}) \\ &\geq \mu - \|D_{XS}\|_2 \end{aligned}$$

وبالتعويض في  $\|D_{XS}\|_2$  نحصل على

$$\square \quad \lambda_{\min}((V^+)^2) \geq \mu - \frac{1}{4}\|D_V\|^2 = \mu(1 - \delta^2)$$

**نتيجة ٦.٩**

لدينا

$$\|D_{XS}\|^2 \leq \frac{1}{8}\|D_V\|^4$$

البرهان:

من السهل إثبات

$$D_X D_S + D_S D_X = \frac{1}{2} \left[ (D_X + D_S)^2 - (D_X - D_S)^2 \right]$$

ولأن  $\text{tr}(D_X D_S) = 0$  المصفوفات  $D_V = D_X + D_S$  وكذلك  $Q_V = D_X - D_S$

لهما نفس المعيار. ينتج من ذلك

$$\begin{aligned} \|D_{XS}\|^2 &= \left\| \frac{1}{4} (D_V^2 - Q_V^2) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{16} \text{tr} (D_V^4 + Q_V^4 - D_V^2 Q_V^2) \\ &\leq \frac{1}{16} (\|D_V^2\|^2 + \|Q_V^2\|^2) \\ &\leq \frac{1}{16} (\|D_V\|^4 + \|Q_V\|^4) = \frac{1}{8} \|D_V\|^4 \end{aligned}$$

□

## نظرية ٧.٩

إن الدالة الأوسطية بعد NT خطوة مسموح بها تحقق

$$\delta^+ = \delta(X^+, S^+, \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^2)}}$$

البرهان:

الدالة الأوسطية بعد خطوة كاملة لـ NT معطاة على الشكل التالي:

$$\begin{aligned} (\delta^+)^2 &= \frac{1}{4\mu} \left\| \mu(V^+)^{-1} - V^+ \right\|^2 \\ &= \frac{1}{4\mu} \left\| (V^+)^{-1} (\mu I - (V^+)^2) \right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4\mu} \lambda_{\max}^2 ((V^+)^{-1}) \left\| \mu I - (V^+)^2 \right\|^2 \end{aligned}$$

نعوض في الحد الأخير من نتيجة ٥.٩ فنحصل على

$$(\delta^+)^2 \leq \frac{1}{4\mu^2(1-\delta^2)} \|\mu I - (V^+)^2\|^2$$

الآن نوضح

$$\|\mu I - (V^+)^2\|^2 \leq \|D_{XS}\|^2$$

ولإثبات ذلك لاحظ أن

$$\begin{aligned} \|\mu I - (V^+)^2\|^2 &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i (\mu I + D_{XS} + M) - \lambda_i (\mu I)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n [\lambda_i (D_{XS} + M)]^2 = \text{tr}((D_{XS} + M)^2). \end{aligned}$$

وباستخدام المصفوفة  $M$  نحصل على

$$\begin{aligned} \|\mu I - (V^+)^2\|^2 &= \text{tr}((D_{XS})^2 - MM^T) \\ &\leq \text{tr}(D_{XS})^2 \\ &= \|D_{XS}\|^2 \end{aligned}$$

□

الآن نحصل على المطلوب من نتيجة ٦.٩ .

إن النتيجة النهائية لها الشكل التالي:

### نتيجة ٨.٩

إذا كانت  $\delta(X, S, \mu) < \frac{1}{\sqrt{2}}$  فإن  $\delta(X^+, S^+, \mu) < \delta^2(X, S, \mu)$  ، أي أننا حصلنا على تقارب تربيعي لـ  $\mu$ -الأوسط. والشرط الأضعف  $\delta(X, S, \mu) < \sqrt{\frac{2}{3}}$  يقتضي أن  $\delta(X^+, S^+, \mu) < \delta(X, S, \mu)$  وهذا يعني حصولنا على تقارب كافٍ.

البرهان: انظر نتيجة ٦.٩ ونظرية ٧.٩.

٥.٩ تحديث وسيط دالة الحاجز  $\mu$ **Updating the Barrier Parameter  $\mu$** 

إذا كانت الدورات الحالية  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  قريبة بشكل كافٍ إلى

نقطة الهدف  $(X(\mu), S(\mu))$  ولنقل أن

$$\delta(X, S, \mu) \leq \frac{1}{2}$$

فإن تحديث الوسيط  $\mu$  يكون على النحو التالي:

$$\mu^+ = (1 - \theta)\mu$$

حيث  $0 < \theta < 1$  وسيط معطى.

سوف نوضح الآن أن القيمة الافتراضية  $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$  تضمن لنا أن

$\delta(X, S, \mu) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . الخطوة الكاملة التالية لـ NT سوف تعطينا الزوج المسموح

به  $(X^+, S^+) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  حيث  $\delta(X^+, S^+, \mu) \leq \frac{1}{2}$ ، وذلك بسبب خاصية

التقارب التربيعي.

سوف نثبت الآن نظرية تربط بين الدالة الأوسطية لـ  $\mu$  بعد التحديث وبين

الدالة الأوسطية لـ  $\mu$  قبل التحديث.

## نظرية ٩.٩

لتكن  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  و  $\mu = \frac{\text{tr}(XS)}{n}$  و  $\delta = \delta(X, S, \mu)$ . إذا

كانت  $\mu^+ = (1 - \theta)\mu$  حيث  $0 < \theta < 1$  فإن

$$\left(\delta(X, S, \mu^+)\right)^2 = \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)} + (1-\theta)\delta^2$$

البرهان :

لتبسيط الترميز سوف نستخدم  $U = \frac{1}{\sqrt{\mu}}V$  ، وباستخدام هذا الترميز نحصل

على

$$\begin{aligned} 4(\delta(X, S, \mu^+))^2 &= \left\| \sqrt{1-\theta}U^{-1} - \frac{1}{\sqrt{1-\theta}}U \right\|^2 \\ &= \left\| \frac{\theta U}{\sqrt{1-\theta}} - \sqrt{1-\theta}(U^{-1} - U) \right\|^2 \end{aligned}$$

لاحظ أن

$$\|U\|^2 = \text{tr}(U^2) = \frac{1}{\mu} \text{tr}(U^2) = n$$

وهو يقتضي أن  $U$  متعامدة مع  $U^{-1} - U$  :

$$\text{tr}(U(U^{-1} - U)) = n - \|U\|^2 = 0$$

ونحصل من ذلك على

$$4(\delta(X, S, \mu^+))^2 = \frac{\theta^2 \|U\|^2}{1-\theta} + (1-\theta) \|U^{-1} - U\|^2.$$

وهذا يعني حصولنا على المطلوب بملاحظة أن  $\|U^{-1} - U\| = 2\delta$  وأن

□

$$\|U\|^2 = n.$$

وكنتيجة مباشرة لهذه النظرية يتبين لنا أنه إذا كان لدينا الزوج الأساسي

الثنائي  $(X, S) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  والوسيط  $\mu$  بحيث أن  $\delta(X, S, \mu) \leq \frac{1}{2}$  وكان

تحديث  $\mu$  عن طريق  $\mu^+ = (1 - \frac{1}{2\sqrt{n}})\mu$  ، فإن  $\delta(X, S, \mu^+) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ، وكما



أوضحنا أعلاه فإن الخطوة التالية لـ NT تعطينا الزوج  $(X^+, S^+) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  الذي يحقق  $\delta(X^+, S^+, \mu^+) \leq \frac{1}{2}$ . لذلك فإن الخوارزمية سوف تولد متتالية من الدورات والتي تحقق لنا دائماً  $\delta \leq \frac{1}{2}$ ، إضافة إلى ذلك فإن الفجوة الشائبة سوف تتقلص بمضاعف  $1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$  عند كل دورة، لأن الفجوة الشائبة بعد خطوة NT كاملة تساوي الفجوة الشائبة المطلوبة.

إن هذه الملاحظات تقتضي النظرية التالية التي تؤكد أن الخوارزمية تتقارب بسرعة.

### نظرية ١٠.٩

إذا كانت  $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$  وكانت  $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$  فإن الخوارزمية ١٠.٩ مع خطوة NT كاملة تتوقف على الأكثر عند

$$\left[ 2\sqrt{n} \log \frac{n\mu^0}{\varepsilon} \right]$$

دورة. ويكون الزوج الناتج  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  يحقق  $\text{tr}(XS) \leq \varepsilon$ .  
البرهان: انظر [Dk].

### ٦.٩ خطوة طويلة لطريقة تابع المسار

#### Long Step Path Following Method

إن هذه الخوارزمية تعمل على تضئيل خطوات NT بالنسبة للوسيط المعطى  $\mu$  حتى يتحقق  $\delta(X, S, \mu) \leq \frac{1}{2}$ . وتسمى هذه الخطوات بالدورات الداخلية. بعد ذلك نقوم بتحديث الوسيط  $\mu$  عن طريق  $\mu^+ = (1 - \theta)\mu$  وهذه هي الدورات الخارجية. إن طول الخطوة يحدد بواسطة خط البحث line search لدالة الحاجز

طريقة تابع المسار

$$f_{\mu}(X, S, \mu) = \frac{1}{\mu} \operatorname{tr}(XS) - \log \det(XS) - n$$

ويكون لدينا الخوارزمية التالية:

## خوارزمية ١١.٩ (الخطوة الطويلة)

مدخلات زوج  $(X^{\circ}, S^{\circ}) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$ الوسائط وسيط أوسطي  $\tau > 0$ وسيط  $\mu_0 > 0$  بحيث  $\delta(X^{\circ}, S^{\circ}, \mu_0) \leq \tau$ وسيط دقة  $\varepsilon > 0$ وسيط التحديث  $\theta < 1$ ابدأ  $S = S^{\circ}, y = y^{\circ}, \mu = \mu_0$ بينما  $\operatorname{tr}(XS) > \varepsilon$ إذاً  $\delta(X, S, \mu) \leq \tau$  $\mu = (1 - \theta)\mu$ وإلا  $\delta_d(S, \mu) > \tau$ احسب  $\Delta X, \Delta S$  من المعادلتين (٧.٩) و(٧.٩)أوجد  $\alpha$ 

$$S = S + \alpha \Delta S$$

$$y = y + \alpha \Delta y$$

نهاية

نهاية

نهاية

حيث  $\alpha = \arg \text{ minimize } f_\mu (X + \alpha \Delta X, S + \alpha \Delta S)$

النظرية التالية تعطينا حد التعقيد لأسوأ دورة.

### نظرية ١٢.٩

الخوارزمية ١١.٩ تتطلب على الأكثر

$$O\left(\log\left(\frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)\right)$$

دورة لحساب الزوج المسموح به فعلياً  $(X^*, S^*) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  والذي يحقق

$$\text{tr}(X^* S^*) \leq \varepsilon$$

البرهان: انظر [Ji].

### ٧.٩ طرق التنبؤ والتصحيح Predictor Corrector Methods

إن طرق التنبؤ والتصحيح من الطرق الأساسية الثنائية الأكثر شعبية في الوقت الحاضر. ويعود ذلك إلى تطبيقها الناجح في كثير من برامج الحاسب الآلي لحل مسألة البرمجة الموجبة شبه المعرفة، مثل برنامج SeDuMi وبرنامج SDPT3. في البرنامج SeDuMi يستخدم فقط الاتجاه NT، بينما في البرنامج SDPT3 يحدد الاتجاه من قبل المستخدم. الخوارزمية التالية تسمى خوارزمية التنبؤ والتصحيح، وتعود إلى [MTY]. إن خطوة التنبؤ هي خطوة متضائلة على طول اتجاه الموازنة للمسألة الأساسية الثنائية التآلفية. يتبع ذلك خطوة التصحيح والمعرف

بخطوة NT كاملة بالنسبة لـ  $\mu = \text{tr}(XS)/n$  حيث  $(X, S) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  عند الدورة الحالية.

## خوارزمية ١٣.٩

مدخلات زوج  $(X^\circ, S^\circ) \in (\mathcal{P} \times \mathcal{D})$

الوسائط وسيط أوسطي  $\tau > 0$

وسيط  $\mu_0 > 0$

بحيث أن  $\delta(X^\circ, S^\circ, \mu_0) \leq \tau$  و  $\mu_0 = \text{tr}\left(\frac{X^\circ S^\circ}{n}\right)$

وسيط الدقة  $\varepsilon > 0$

وسيط  $0 < \theta < 1$

ابدأ  $S = S^\circ, y = y^\circ, \mu = \mu_0$

بينما  $\text{tr}(XS) > \varepsilon$

خطوات التصحيح

احسب  $\Delta X, \Delta S$  من المعادلتين (٧.٩) و (٧.٩)

خطوة NT كاملة  $X = X + \Delta X, S = S + \Delta S$

خطوات التنبؤ

احسب  $\Delta X = -(X + D \Delta S D)$

احسب  $\Delta S = -\sum_{i=1}^m \Delta y_i A_i$

$X = X + \theta \Delta X, S = S + \theta \Delta S$

$\mu = (1 - \theta)\mu$

نهاية

نهاية

لاحظ أن الوسيط  $\theta$  استخدم كطول خطوة في مرحلة التنبؤ وكذلك لتحديث  $\mu$  ، حيث  $\mu^+ = (1-\theta)\mu$  . النتيجة التالية تعطينا طريقة ديناميكية لاختيار  $\theta$  ، بحيث تبقى دائماً  $\delta(X, S, \mu) \leq \tau$  .

## نتيجة ١٤.٩

إذا كانت  $\tau = \frac{1}{3}$  فإن  $\delta(X, S, \mu) \leq \tau$  متحققة لكل دورة

من الخوارزمية ١٣.٩ شريطة استخدام

$$\theta = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 13 \left\| \frac{1}{2} (D_X^a D_S^a + D_X^a D_S^a / \mu) \right\|}} \quad (10.9)$$

حيث  $D_X^a$  و  $D_S^a$  ترمز للاتجاه الأساسي الثنائي التآلفي الموزون حيث  $D_X^a + D_S^a = -V$  .

## البرهان:

انظر [RTV] حيث أن إثبات حالة البرمجة الموجبة شبه المعرفة هو امتداد مباشر لإثبات حالة البرمجة الخطية. □

إن خوارزمية ١٣.٩ لها نفس حد تعقيد خوارزمية ١.٩ ، أي أنه لدينا

النظرية التالية:

## نظرية ١٥.٩

إذا كانت  $\tau = \frac{1}{3}$  و  $\theta$  معطاة في (١٠.٩) فإن الخوارزمية ١٣.٩ تتوقف

على الأكثر عند

$$\left[ \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{13}{2}n} \right) \log \frac{\text{tr}(X^\circ S^\circ)}{\varepsilon} \right]$$

دورة. إن الزوج الناتج  $(X, S) \in ri(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$  يحقق  $\text{tr}(XS) \leq \varepsilon$  .

البرهان: انظر [MTY].

مثال ١٦.٩ ( انظر [KSS] ).

اعتبر المسألة الأساسية والثنائية على الصورة القياسية حيث

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

المسألة لها الحل المتمم الفعلي التالي

$$X^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, y^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

اعتبر متتالية الحلول المسموح بها  $(X_k, S_k, y_k) \rightarrow (X^*, S^*, y^*)$  والمعرفة

بالشكل التالي

$$X_k := \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_k \\ \varepsilon_k & \varepsilon_k \end{pmatrix}, S_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k & -\sqrt{c\varepsilon_k} \\ -\sqrt{c\varepsilon_k} & 1+2\sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix}, y_k := \begin{pmatrix} (1+c)\varepsilon_k/2 \\ \sqrt{c\varepsilon_k} \end{pmatrix}$$

حيث  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  و  $c > 0$ . وقيمة  $c = \frac{1}{32}$  وقيمة  $\varepsilon_k = 10^{-k/10}$  وقيمة  $\delta(X, S, \mu) \leq 0.13$  من الواضح أن  $k = 30, \dots, 80$  تقارباً تريبيياً.

## تمارين الباب التاسع

١.٩ لدينا البرنامج التالي

$$\begin{aligned} & \text{maximize } y_1 + y_2, \quad y \in \mathbb{R}^2 \\ & \text{subject to } y_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

أوجد حلاً للبرنامج باستخدام خوارزمية ١.٩. ثم أوجد  $X_\alpha$  وأيضاً أوجد

$$\S S_{\bar{\alpha}}$$

٢.٩ لتكن  $b = [1 \ 0 \ 0]$ ,  $n = m = 3$  وأن:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أثبت أن الدالة الأوسطية تحقق  $\delta^+ = \delta(X^+, S^+, \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^2)}}$

٣.٩ حل البرنامج التالي:

$$, m=3 \quad , n=2$$

$$, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = [1 \quad 2 \quad 1]^T$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

باستخدام خوارزمية ١١,٩ وخوارزمية ١٣,٩ ثم وقارن بين الخوارزميتين؟

## Samples

مصفوفة متماثلة	:	$A^T$
$(A^T)^{-1}$	:	$A^{-T}$
المدخل $ij$ للمصفوفة $A$	:	$a_{ij}$
المصفوفة غير شاذة $T$ $A = T^{-1}BT$	:	$A \sim B$
المصفوفة $A$ و $B$ متشابهتين similar	:	$A \sim B$
مصفوفة متماثلة موجبة شبه معرفة $A - B$	:	$A \succeq B$
مصفوفة متماثلة موجبة معرفة $A - B$	:	$A \succ B$
مصفوفة متماثلة سالبة شبه معرفة $A - B$	:	$A \preceq B$
مصفوفة متماثلة سالبة معرفة $A - B$	:	$A \prec B$
مدى (فضاء العمود) للمصفوفة $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	:	$\mathcal{R}(A)$
مصفوفة الوحدة $r \times r$	:	$I_r$
مصفوفة الوحدة ذات حجم يعتمد على السياق	:	$I$
مصفوفة صفرية $m \times n$	:	$O_{m \times n}$
المصفوفة الصفرية ذات حجم يعتمد على السياق	:	$O$
متجه له جميع المركبات تساوي واحد في $\mathbb{R}^n$	:	$e_n$
متجه جميع مركباته واحد والحجم يعتمد على السياق	:	$e$
فضاء متجهات حقيقي اقليدي حجمه $n$	:	$\mathbb{R}^n$
الثنى الموجب في $\mathbb{R}^n$	:	$\mathbb{R}_+^n$
متجه جميع مركباته أعداد صحيحة وحجمه $n$	:	$\mathbb{Z}^n$
متجه جميع مركباته أعداد صحيحة موجبة وحجمه $n$	:	$\mathbb{Z}_+^n$
فضاء المصفوفات الحقيقية $n \times n$	:	$\mathbb{R}^{n \times n}$



$$\begin{aligned}
\{X \mid X \in \mathbb{R}^{n \times n}, X = X^T\} &= \mathcal{S}_n \\
\{X \mid X \in \mathcal{S}_n, X \succeq 0\} &= \mathcal{S}_n^+ \\
\{X \mid X \in \mathcal{S}_n, X \succ 0\} &= \mathcal{S}_n^{++} \\
\{A \mid A \in \mathcal{S}_n^+, \forall x \in \mathbb{R}_+^n\} &= \mathcal{C}_n \text{ (مصفوفات مزدوجة الإيجاب)} \\
\{A \in \mathcal{S}_n \mid a_{ij} \geq 0, \forall i, j = 1, \dots, n\} &= \mathcal{N}_n \text{ (مصفوفات غير سالبة)} \\
\{x \in \mathbb{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \mid \text{smat}(x) \in \mathcal{S}_n^+\} &= \text{svec}(\mathcal{S}_n^+) \\
\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, n\} &= \{-1, 1\}^n \\
\forall j \lambda_j(A) \in \mathbb{R} \text{ إذا كانت } A & \text{ أكبر قيمة ذاتية لـ } A : \lambda_j(A) \\
\forall j \lambda_j(A) \in \mathbb{R} \text{ إذا كانت } A & \text{ أكبر قيمة ذاتية لـ } A : \lambda_{\max}(A) \\
\forall j \lambda_j(A) \in \mathbb{R} \text{ إذا كانت } A & \text{ أصغر قيمة ذاتية لـ } A : \lambda_{\min}(A) \\
(A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ الأثر لـ } A) \sum_i a_{ii} &= \sum_i \lambda_i(A) = \text{tr}(A) \\
\text{tr}(AB^T) &= \langle A, B \rangle \\
A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ المحدد لـ } A &= \prod_i \lambda_i(A) = \det(A) \\
\text{tr}(AA^T) = \sum_{ij} a_{ij}^2 &= \|A\|^2 \text{ (معياري فروبينس)} \\
A \in \mathcal{S}_n \text{ إذا كانت } A & \sum_i \lambda_i^2(A) = \|A\|^2 \\
(\text{المعياري الطيفي}) (\lambda_{\max}(A^T A))^{\frac{1}{2}} &= \|A\|_2 \\
A \succeq 0 \text{ إذا كانت } A & \lambda_{\max}(A) = \|A\|_2 \\
\max_i |\lambda_i(A)| &= \rho(A) \text{ (الشعاع الطيفي لـ } A) \\
\forall_i \lambda_i(A) > 0 \text{ إذا كان } \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)} &= \kappa(A) \\
\text{العدد الشرطي لـ } A \text{ إذا كانت } A \succ 0 &: \kappa(A) \\
\text{الجذر الوحيد المتماثل لـ } 0 \preceq A &: A^{\frac{1}{2}} \\
\text{المصفوفة القطرية } n \times n \text{ حيث مركبات } x \in \mathbb{R}^n & \text{ تقع على القطر} : \text{Diag}(x)
\end{aligned}$$

$X \in \mathbb{R}^{n \times n}$	: متجه بعده $n$ مركباته عناصر قطر المصفوفة	$\text{diag}(X)$
$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$	حيث $[a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{nn}]^T$	$= \text{vec}(A)$
$A \in \mathcal{S}_n$	حيث $[a_{11}, \sqrt{2}a_{12}, \dots, \sqrt{2}a_{1n}, a_{22}, \sqrt{2}a_{23}, \dots, a_{nn}]^T$	$= \text{svec}(A)$
	المؤثر العكسي للعملية $\text{svec}(\cdot)$	$= \text{smat}(\cdot)$
	الداخل النسبي للمجموعة $\mathcal{C}$	$= \text{ri}(\mathcal{C})$
	بعد الفضاء الجزئي $\mathcal{L}$	$= \text{dim}(\mathcal{L})$
$\mathbb{R}^n \supset \mathcal{C}$	المخروط الثنائي للمخروط $\mathcal{C}$	$= \mathcal{C}^*$
	$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y \geq 0, \forall y \in \mathcal{C}\}$	$= \mathcal{C}^*$
	مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الأساسية	$= \mathcal{P}$
	مجموعة الحلول المسموح بها للمسألة الثنائية	$= \mathcal{D}$
	مجموعة الحلول المثلى للمسألة الأساسية	$= \mathcal{P}^*$
	مجموعة الحلول المثلى للمسألة الثنائية	$= \mathcal{D}^*$
	$\text{span}\{A_1, \dots, A_m\}$	$= \mathcal{L}$
	اللوغاريتم الطبيعي لـ $0 < t$	$= \log(t)$
	$t > -1$ حيث $t - \log(1+t)$	$= \psi(t)$
	$\frac{1}{\mu} \text{tr}(CX) - \log \det X$	$= p_\mu(X)$
	$\frac{1}{\mu} b^T y + \log \det(S)$	$= d_\mu(S, y)$
	$\text{tr}(\frac{XS}{\mu}) - \log \det(\frac{XS}{\mu}) - n$	$= f_\mu(X, S)$
$(X, S) \in \text{ri}(\mathcal{P} \times \mathcal{D})$	حيث $[X^{\frac{1}{2}}(X^{\frac{1}{2}}SX^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}]$	$= \mathcal{D}$
	مصفوفة موازنة NT	$= \mathcal{D}$
	$D^{-\frac{1}{2}}XD^{-\frac{1}{2}} = D^{\frac{1}{2}}SD^{\frac{1}{2}}$	$= V$
	$\frac{1}{2} \ \sqrt{\mu}V^{-1} - \frac{1}{\sqrt{\mu}}V\ $	$= \delta(X, S, \mu)$
	$\Delta X \in \mathcal{L}^\perp$ حيث $D^{-\frac{1}{2}}\Delta XD^{-\frac{1}{2}}$	$= D_X$
	$\Delta S \in \mathcal{L}$ حيث $D^{\frac{1}{2}}\Delta SD^{\frac{1}{2}}$	$= D_S$

رسم بسيط غير موجه حيث مجموعة الرؤوس  $V$  ومجموعة  
الأحرف  $E$   $G = (V, E)$

## References

- ١) عبدالرحمن أبوعمة ومحمد العث، البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود ١٩٩٠م.
- ٢) زيد البلخي، مقدمة في بحوث العمليات، جامعة الملك سعود ١٩٩٨م.
- ٣) سليمان الحميدان، عمر حامد وحسن حميدة، الأسس الرياضية للبرمجة الخطية، جامعة الملك سعود ٢٠٠٢م.
- ٤) أحمد رضوان وعبدالرحمن أبوعمة، تقنيات الأمثلية في البرمجة الخطية، جامعة الملك سعود ٢٠٠١م.
- ٥) محمد الصفدي، البرمجة الخطية وبحوث العمليات، وكالة المطبوعات ١٩٨٠م.

- [AW] S. Al-Homidan and H. Wolkowicz, Approximate and Exact Completion Problems for Euclidean Distance Matrices using Semidefinite Programming, *Linear Algebra and its Applications*, Vol.406 (2005) pp. 109-141.
- [AF] S. Al-Homidan and R. Fletcher, Rationalizing Foot and Ankle Measurements to Conform to a Rigid Body Model, *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical*, Vol. 9, No. 2, 2006. pp. 103-111.
- [Alh] S. Al-Homidan, Approximate Toeplitz problem using semidefinite programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 135, pp. 583-598, 2007.
- [Ali1] F. Alizadeh. *Combinatorial optimization with interior point methods and semidefinite matrices*. PhD thesis, University of Minnesota, Minneapolis, USA, 1991.
- [Ali2] F. Alizadeh. Interior point methods in semidefinite programming with applications to combinatorial optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 5:13-51, 1995.

- [AHO] F. Alizadeh, J.-P.A. Haeberley, and M.L. Overton. Primal-dual methods for semidefinite programming: convergence rates, stability and numerical results. *SIAM Journal on Optimization*, 8(3):746-768, 1998.
- [AA] E.D. Andersen and K.D. Andersen. The MOSEK interior point optimizer for linear programming: an implementation of the homogeneous algorithm. In H. Frenk, K. Roos, T. Terlaky, and S. Zhang, editors, *High performance optimization*, pages 197-232. Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [AF] K.M. Anstreicher and M. Fampa. A long-step path following algorithm for semidefinite programming problems. In P.M. Pardalos and H. Wolkowicz, editors, *Topics in Semidefinite and Interior-Point Methods*, volume 18 of *Fields Institute Communications Series*, pages 181-196. American Mathematical Society, 1998.
- [BW] V. Balakrishnan and F. Wang. Sdp in systems and control theory. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 421-442. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2000.
- [BGN] A. Ben-Tal, L. El Ghaoui, and A.S. Nemirovski. Robustness. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 139-162. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA 2000.
- [BN] A. Ben-Tal and A.S. Nemirovski. Structural design. In H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, pages 443-467. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA 2000.
- [BGFB] S.E. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 15, SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
- [DK] E. de Klerk. Aspects of semidefinite programming, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [DPRT] E. de Klerk, J. Peng, C. Roos, and T. Terlaky. A scaled Gauss-Newton primal-dual search direction for semidefinite optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 11:870-888, 2001.
- [DRT] E. de Klerk, C. Roos, and T. Terlaky. Initialization in semidefinite programming via a self-dual, skew-symmetric embedding. *OR Letters*, 20:213-221, 1997.
- [Di] J. Dieudonné'. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.

- [Fa] L. Faybusovich. Semi-definite programming: a path-following algorithm for a linear-quadratic functional. *SIAM Journal on Optimization*, 6(4):1007-1024, 1996.
- [Go] M.X. Goemans. Semidefinite programming in combinatorial optimization. *Math Programming*, 79(1-3, Ser. B):143-161, 1997. Lectures on mathematical programming (ismp97).
- [GW] M.X. Goemans and D.P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of the ACM*, 42(6):1115-1145, 1995.
- [GT] A. Goldman and A.W. Tucker. Theory of linear programming. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Linear inequalities and related systems*, *Annals of Mathematical Studies*, No. 38, pages 53-97. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
- [Go] C.C. Gonzaga. Path following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34:167-227, 1992.
- [HDRT] B. He, E. der Klerk, C. Roos, and T. Terlaky. Method of approximate centers for semi-definite programming. *Optimization Methods and Software*, 7:291-309, 1997.
- [HRVW] C. Helmberg, F. Rendl, R.J. Vanderbei, and H. Wolkowicz. An interior-point method for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 6:342-361, 1996.
- [HJ] R.A. Horn and C.R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1985.
- [JRT] B. Jansen, C. Roos, and T. Terlaky. Interior point method: a decade after Karmarkar. A survey, with application to the smallest eigenvalue problem. *Statistica Neerlandica*, 50, 1995.
- [Ji] J. Jiang. A long step primal-dual path following method for semidefinite programming. *OR Letters*, 23(1,2):53-62, 1998.
- [Ka] N.K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373-395, 1984.
- [Kh] L. Khachiyan. A polynomial-time algorithm for linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20:191-194, 1979.

- [KSS] M. Kojima, M. Shida, and S. Shindoh. Local Convergence of Predictor-Corrector Infeasible-Interior-Point Algorithms for SDP's and SDLCP's. *Mathematical Programming*, 80:129-160, 1998.
- [KSH] M. Kojima, S. Shindoh, and S. Hara. Interior point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices. *SIAM Journal on Optimization*, 7(1):88-125, 1997.
- [KMRVW] S. Kruk, M. Muramatsu, F. Rendl, R.J. Vanderbei, and H. Wolkowicz. The Gauss-Newton direction in linear semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 15(1):1-27, 2001.
- [LO] A.S. Lewis, and M.L. Overton. Eigenvalue optimization. *Acta Numerica*, 5:149-190, 1996.
- [LSZ] Z.-Q. Luo, J.F. Sturm, and S. Zhang. Conic convex programming and self-dual embedding. *Optimization Methods and Software*, 14(3):196-218, 2000.
- [LMS] I.J. Lustig, R.E. Marsten, and D.F. Shanno. Interior point methods: Computational state of the art. *ORSA Journal on Computing*, 6:1-15, 1994.
- [MTY] S. Mizuno, M.J. Todd, and Y. Ye. On adaptive step primal-dual interior-point algorithms for linear programming. *Mathematics of Operations Research*, 18:964-981, 1993.
- [Mo] R.D.C. Monteiro. Primal-dual path-following algorithms for semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 7(3):663-678, 1997.
- [NN] Yu. Nesterov and A.S. Nemirovski. *Interior point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Vol. 13, SIAM, Philadelphia, USA, 1994.
- [NT] Yu. Nesterov and M.J. Todd. Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 22(1):1-42, 1997.
- [OI] J.A. Olkin. Using semi-definite programming for controller design in active noise control. *SIAG/OPT Views and News*, 8:1-5, Fall 1996.
- [Pa] P.A. Parillo. *Structured Semidefinite Programs and Semi-algebraic Geometry Methods in Robustness and Optimization*. PhD thesis, California Institute of Technology, Pasadena, California, USA, 2000. Available at <http://www.cds.caltech.edu/~pablo/>.

- [Po] G. Pólya. Über positive Darstellung von Polynomen. *Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich*, 73:141-145, 1928. (also Collected Papers, Vol. 2, 309-313, MIT Press, Cambridge, Mass., London 1974).
- [PS] F.A. Potra and R. Sheng. A superlinearly convergent primal-dual infeasible-interior-point algorithm for semidefinite programming, *SIAM Journal on Optimization*, 8(4):1007-1028, 1998.
- [RP] M.V. Ramana and P.M. Pardalos. Semidefinite programming. In T. Terlaky, editor, *Interior point methods of mathematical programming*, pages 369-398. Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1996.
- [RTV] C. Roos, T. Terlaky, and J.-Ph. Vial. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An interior point approach*. John Wiley & Sons, New York, 1997.
- [SSK] M. Shida, S. Shindoh, and M. Kojima. Existence of search directions in interior-point algorithms for the SDP and the monotone SDLCP. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):387-396, 1998.
- [St] J.F. Sturm. Using seDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones. *Optimization Methods and Software*, 11-12:625-653, 1999.
- [TTT] K.C. Toh, M.J. Todd, and R.H. Tütüncü. SDPT3 -- a Matlab software package for semidefinite programming. *Optimization Methods and Software*, 11:545-581, 1999.
- [Va] R.J. Vanderbei. *Linear Programming*, Kluwer's International Series, 2001.
- [VB] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38:49-95, 1996.
- [WSV] H. Wolkowicz, R. Saigal, and L. Vandenberghe, editors, *Handbook of semidefinite programming*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 2000.
- [Wr] S. Wright. *Primal-Dual Interior Point Methods*, SIAM, Philadelphia, USA, 1996.
- [XHY] X. Xu, P.-F. Hung, and Y. Ye. A simplified homogeneous and self-dual linear programming algorithm and its implementation. *Annals of OR*, 62:151-171, 1996.
- [Ye] Y. Ye. *Interior point algorithm*. Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, New York, 1997.



- [YTM] Y. Ye, M.J. Todd and S. Mizuno. An  $O(\sqrt{n}L)$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm. *Mathematics of Operations Research*, 19:53-67, 1994.
- [Zh] Y. Zhang. On extending some primal-dual interior point algorithms from linear programming to semidefinite programming. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2):365-386, 1998.

## انجليزي - عربي

Active set method	طريقة المجموعة الفعالة
Affine – scaling direction	اتجاه الموازنة التآلفي
Affine space	فراغ تآلفي
Analytic center	مركز تحليلي
Analytic curve	منحنى تحليلي
Arrow matrix	مصنوفة سهم
Artificial variables	متغيرات مساعدة
Assignment problem	مسألة التعيين
Assignment problem duality	ثنائية مسألة التعيين
Backward edges	ضلع عكسي
Back substitution	تعويض خلفي
Barrier Equation	معادلة الحاجز
Barrier functions	دوال الحاجز
Barrier parameter	وسيط الجزء
Barrier problem	مسألة الحاجز
Basic concepts	مفاهيم أساسية
Basic feasible solution	حل أساسي مسموح به
Basic variables	متغيرات أساسية

Blig-M	طريقة أم الكبيرة
Bland rule	قاعدة بلاند
Boolean quadratic optimization problem	مسألة أمثلة بولين التربيعية
Branch and bound method	طريقة التفرع والتحديد
Calculating step directions	حساب اتجاهات الخطوة
Canonical form	شكل قياسي
Capacity	سعة
Central path	المسار الأوسط
Centrality conditions	شروط الأوسطية
Centrality function	دالة الوسطية
Centering parameter	وسيط الوسطية
Choleski factorization	مفكوك شولسكي
Choosing the step length	اختيار طول الخطوة
Closed convex cone	مخروط محدب مغلق
Coefficient matrix	مصفوفة المعاملات
Compact	متراصة
Condition number	العدد الشرطي
Conic formulation	الصياغة المخروطية
Conic linear programs	البرمجة الخطية المخروطية
Copositive	مزدوجة الإيجاب
Combinatorial optimization	الأمثلة التركيبية
Complementarity	المتمة
Complementarity condition	شرط المتمة
Cost coefficients	معاملات التكلفة
Condition number	العدد الشرطي
Constraints	قيود

Convergence analysis	تحليل التقارب
Convex cones	مخروطات محدبة
Convex sets	مجموعات محدبة
Cycling	دوران
Data fitting	ملائمة البيانات
Degenerate	غير نظامية
Degenerate solution	حل غير نظامي
Determinant	محددة
Diagonally dominant	مصفوفة قطرية مهيمنة
Diet problem	مسألة التغذية
Directional derivative	الاتجاه الاشتقاقي
Duality	ثنائية
Dual problem	المسألة الثنائية
Duality economic interpretation variables	معنى الأقتصادي لمتغيرات الثنائية
Duality fundamental theorem	نظرية أساسية في الثنائية
Duality gap	الفجوة الثنائية
Dynamic programming	برمجة ديناميكية
Edges	ضلع
Eigenvalues	القيم الذاتية
Embed	طمر
Embedding Strategy	إستراتيجية الطمر
Estimating barrier parameter	تقدير وسيط الجزء
Existence of second-order optimality condition	وجود المرتبة الثانية لشرط الأمثلية
Extreme points	نقاط حدية
Feasible solutions	حلول مسموح بها

First-order optimality conditions	المرتبة الأولى لشرط الأمثلية
Flow	تدفق
Forward edges	ضلع أمامي
Frame algorithm	الخوارزمية الشكلية
Free variables	متغيرات حرة
Frobenius norm	معيار فروبينيس
Gaussian elimination	طريقة قاوس للحذف
Gauss-Newton method	طريقة جوس- نيوتن
Geometric solution	حل هندسي
Gradient	الاشتقاق
Graph	الرسم
Halfspace	نصف الفضاء
Hessian matrix	مصفوفة هاس
Highly degenerate	سيئة الانتظام
Hilbert problem 17th	مسألة هيلبرت ١٧ الشهيرة
Holder's inequality	متباينة هولدر
Homogeneous embedding	الطمر المتجانسة
Hungarian algorithm	خوارزمية هنغارية
Hyperplane	مستوى فوق
Implicit function theorem	نظرية الدالة الضمنية
Improving ray	سهم محسن
Indegree	درجه داخله
Integers	أعداد صحيحه
Integer programming	برمجة صحيحة
Integrality condition	شرط الحل الصحيح
Interior-point methods	طرق النقطة الداخلية

Interring variable	متغير داخل
Iteration	دورة
Initialization problem	المسألة الابتدائية
Jacobian matrix	مصفوفة جاكوبين
Karmarkar method	طريقة كارماركر
Karush-Kuhn-Tucker theorem	نظرية كاريش-كون-توكر
Kroncker product	ضرب كرونكر
Labeling algorithm	خوارزمية العنونة
Lagrange coefficients	معاملات لاجرانج
Lagrange function	دالة لاجرانج
Lagrange multipliers	مضاريب لاجرانج
Lagrange theorem	نظرية لاجرانج
Laplacian of the graph	لابلاس الرسم
Large scale problem	مسائل ذات الحجم الكبير
Large update methods	طرق التحديث الكبيرة
Least squares	أصغر مربعات
Limit point	نقاط النهاية
Line search	خط البحث
Linear programming	برمجة خطية
Linear programming algebra	جبر البرمجة الخطية
Linear programming geometry	هندسة البرمجة الخطية
Linear programming models	نماذج البرمجة الخطية
Linear programming non canonical form	أشكال غير قياسية للبرنامج الخطي
Linear programming standard form	صيغة قياسية للبرنامج الخطي
Linear operator	مؤثر خطي
Linearly independent	مستقلة خطيا

Lipschitz condition	شرط لبشتز
Lorentz cone	مخروط لورنتر
Lyapunov equation	معادلة ليبنوف
Mathematical programming	برمجة رياضية
Max-flow and min-cut theorem	نظرية التدفق الأعظمي - القاطع الأصغر
Maximal complementarity	متمة عظمى
Maximal flow	تدفق أعظم
Maximal flow algorithm	خوارزمية التدفق الأعظمي
Maximal flow uniqueness	وحدانية التدفق الأعظم
Maximization	تعضيم
Minimization	تخفيض
Network	شبكة
Network analysis	تحليل الشبكات
New variable	متغير جديد
Newton's method	طريقة نيوتن
Nonbasic variables	متغيرات غير أساسية
Nondefect edges	الحرف غير المعيب
Nondegenerate solution	حل منتظم
Nonempty interior	غير خالي الداخل
Nonlinear programming	برمجة غير خطية
Nonsingular matrix	مصفوفة غير شاذة
Normal Equation	المعادلة الناظمية
Northwest corner rule	خوارزمية الركن الشمالي - الغربي
Null-space	الفضاء الصفري
Objective function	دالة الهدف
Objective function unbounded	دالة الهدف غير محدودة

Optimality condition	شرط الأمثلية
Optimization	برمجه رياضية أو أمثلة
Optimize	تخفيض
Out degree	درجة خارجه
Overdetermined	زائد التحديد
Path-following method	طريقة تابع المسار
Paths	مسارات
Perfect duality	الثنائية الكاملة
Pivoting	محورية
Pivoting column	عمود محوري
Pivoting element	عنصر محوري
Pivoting relation	علاقات محورية
Pivoting row	صف محوري
Polyhedral cones	مخروط المنطقة المضلعة
Predictor-corrector methods	طرق التنبؤ والتصحيح
Primal barrier function	دالة الحاجز الأساسية
Primal-dual method	طريقة الأساسية - الثنائية
Prime problem	مسألة الأساسية
Primal log-barrier methods	طرق الحاجز اللوغاريتمية الأساسية
p-norm	معيار p
Production problem	مسألة الإنتاج
Projected Newton Direction	إسقاط اتجاه نيوتن
Quadratic convergence	تقارب تربيعي
Reduced matrix	المصفوفة المختزلة
Redundant constraint	قيود إضافية
Relax	إرخاء



Relative cost coefficients	معاملات التكلفة النسبية
Relative interior	الداخل النسبي
Reverse edges	ضلع عكسي
Revised simplex method	خوارزمية السمبلكس المحسنة
Right-hand side	طرف أيمن
Scaling matrix	مصفوفة الموازنة
Second-order optimality condition	المرتبة الثانية لشرط الأمثلية
Self-dual embedding	الطمر الثنائية الذاتية
Sensitivity	حساسية
Sensitivity analysis	تحليل الحساسية
Sequential penalty	حد تكرارية
Semidefinite programming	البرمجة الموجبة شبه المعرفة
Shcur complement	متمة شور
Short step algorithm	خوارزمية الخطوة القصيرة
Simplex algorithm	خوارزمية السمبلكس
Simplex method	طريقة السمبلكس
Simplex method for transportation problems	طريقة السمبلكس لمشكلات النقل
Simplex multipliers	مضاريب السمبلكس
Sink	مصب
Skew-symmetric	متماثلة تخالفياً
Slack variables	متغيرات مكملة
Slater constraint qualification	قيود سلاتر المؤهل
Slater regularity condition	شرط سلاتر للانتظام
Smooth	ملساء
Smoothness	يملس
Source	منبع

Sparse	متناثرة
Special linear programming	برامج خطية خاصة
Spectrahedra	سبكتوهدرا
Spectral decompositions	للتفريق الطيفي
Spectral norm	المعيار الطيفي
Spectral radius	الشعاع الطيفي
Step directions	اتجاهات الخطوة
Step length	طول الخطوة
Strict feasibility	الحلول المسموح بها فعلياً
Stopping criteria	قاعدة التوقف
Strong duality	الثنائية القوية
Subclass	تصنيف جزئي
Supnorm	معيار جزئي
Surplus variables	متغيرات زائدة
Tangential direction	الاتجاه المماسي
Tolerances	مقدار التحمل
Total unimodularity	معيارية أحادية كليه
Trace	أثر
Trace operator	مؤثر الأثر
Transportation algorithm	خوارزمية النقل
Transportation problem	مسألة النقل
Transportation problems duality	ثنائية مشكلة النقل
Triangular inequality	المتباينة المثلثية
Two-phase method	طريقة المرحلتين
Updating the centering parameter	تحديث وسيط المسار الأوسط
Vertices	رؤوس الراسم

Weak complementary slackness

متّمة المكّلة الضعيفة

Weak duality

الثائفة الضعيف

Weak infeasibility

حلول غير مسموح بها ضعيفه

Weak principle of duality

مبدأ الثائفة الضعيف

Well defined

جيدة التعريف

## أ

- اتجاه NT ١٥٣  
اتجاه اشتقاقي ١٥٦ اتجاه ٤٢  
اتجاه بحث الأساسية الثنائية ١٥٣  
اتجاه الخطوة ٤٣ ، ٤٦  
اتجاه مسموح بها ١٢٧  
اتجاه مماسي ١١٤  
اتجاه الموازنة التآلفي ١٣٤  
اتجاه نيوتن ١٢٧ ، ١٣٣  
أثر ٦٨  
أساسي ٤١ ، ٥١ ، ٦٩ ، ٩٠ ، ١٠٧ ، ١٢٠ ،  
أساسي ثنائي تآلفي موزون ١٧٠  
إسقاط اتجاه نيوتن ١٢٧  
إسقاط المصفوفة ١٣٣

إسقاط نيوتن ١٤٧

أصغر قيمة ذاتية ١١٢ ، ١٦١

أصغر مربعات ٨٢

أفضل ٤

أمثل ٤ ، ٥٠ ، ٩٧ ، ١٢٤

أمثلة بولين التربيعية ٧٣

أمثلة تركيبية ١١٨

أمثلة توافقية ٧٠ ، ٧٣

أمثلة محدبة ٧٨

انحدار ٢٩

## ب

برمجة تربيعية ٧٠

برمجة خطية ٦

برمجة خطية أساسية ٢٦

برمجة خطية ثنائية ٢٦

برمجة خطية مخروطية ٨٩

برمجة رياضية ٣

برمجة موجبة شبه معرفة ٦٧ ، ٧٧ ، ٩٠

## ت

تآلفي موزون ١٧٠

تحذب ٦٨

تحديث ديناميكي ١٤٥

تحليل التقارب ٥٠

تحليل محدب ١١

تَحْمُلُ ٥٠ ، ١٤٠

تحويل خطي ٨٣

تركيب محدب ١٥

تصغير ٤ ، ٦٨ ، ٧٢ ، ٩٢

تصغير تقريب تايلور التربيعي ١٢٧

تصنيف جزئي ٩٠

تصميم مثالي ٧٧

تعظيم ٤ ، ٩٢

تعويض أمامي ٦٠

تكلفة ٤

تقريب طيفي ١١٥

تقارب تربيعي ١٦١

تقريب تايلور التربيعي ١٢٧

تماثل تخالفي ١٦٠

## ث

ثمن الموجب ٧٩ ، ٩٠

ثنائية ٤١ ، ٥١ ، ٦٨ ، ٩٠ ، ١٠٧ ، ١٢٠

ثنائية ضعيف ٩٥

ثنائية قوي ٨٩ ، ٩٥ ، ٩٨

ثنائية كاملة ١٢٢

ثنائية لاجرنج ٩٢، ١١٩، ١٢٤، ١٢٥

## ح

حاجز المسألة الأساسية ١٢٧

حرف غير معيب ٧٣

حد التعقيد ١٤٤، ١٦٨

حل مسموح به ضعيف ١٠٠

حل مسموح به فعلياً ٩٨

حل مسموح به قوي ٩٣، ٩٩

حل هندسي ١١، ١٦

حلول متممة ١٢١

حلول متممة ١٠٣

حلول مسموح بها ١٦

حلول مسموح بها فعلياً ٩٣

## خ

خاصية الثنائية الضعيف ٩٦

خاصية الثنائية القوية ٦٩، ٨٩

خط البحث ١٦٦

خطوة طويلة ١٦٦

خطوة كاملة NTJ ١٥٩

خلفي ٦٠

خوارزميات النقطة الداخلية ٧٠

خوارزمية الثنائية ١٤٣

خوارزمية الخطوة الصغيرة ١٤٤

خوارزمية الخطوة الطويلة ١٤٧، ١٦٧

خوارزمية الخطوة القصيرة ١٢٧

خوارزمية طريقة تابع المسار ٤٩

خوارزمية هيكلية ١٥٧

## ر

رتبة ٧٤، ٩٣

رسم ٧٣

## د

داخل نسبي ٩٠، ٩٣، ١٠٨

دالة أوسطية ١٢٦

دالة تحليلية ١١٣

دالة الحاجز ٧٩، ١٦٤

دالة الحاجز اللوغاريتمية ٢٨

دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية ١٠٨

دالة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية الثنائية ١٥٦

دالة خطية ٧

دالة ضمنية ١١٣

دالة غير خطية ٦



- دالة اللوغاريتم ٢٧  
دالة محدبة فعلياً ١٣١  
دالة الهدف ٣ ، ٧٩  
دالة هدف تربيعية ٧٣  
دالة هدف خطية ٨٩  
دوال محدبة ٧٩

### س

- سهام محسن ٩٩

### ش

- شرط أضعف ١٦٣  
شرط الأمثلة ٣٦  
شرط الشائبة الضعيف ٦٩  
شرط سلتر المنظم ٦٩ ، ٩٣  
شرط قيد سلتر المؤهل ٦٩  
شرط لبشتز ٧٩  
شرط المتممة ١٠٣  
شروط الأمثلة ٨٩ ، ١٠٢ ، ١٠٧ ، ١٣٣ ، ١٤٤  
شروط الأوسطية ١٠٨ ، ١٥٢  
شروط التمام ٣٦  
شكل قياسي ١٩ ، ٩١

**ص**

صف كثيف ٦٢

صياغة مخروطية عامة ٧٨

صيغة أساسية ثنائية متماثلة ٣٥

صيغة قياسية ١١، ١٧، ٩٧

**ض**

ضرب داخلي ٦٨

ضرب كرونكر ١١٣

**ط**

طرق أساسية ٨٠

طرق التحديث الكبيرة ١٤٥

طُرق التَبؤ والتصحیح ٨٤، ١٥٢، ١٦٨

طرق ثنائية ٨٠

طرق الحاجز اللوغاريتمية ٨٠

طرق الحاجز اللوغاريتمية الثنائية ٨٠

طرق النقطة الداخلية ٢٥، ٤١، ٧٧، ١٠٧، ١١٤، ١٢٦، ١٥٢

طريقة تابع المسار ٢٥، ١٥١، ١٦٦

طريقة تكرارية ٤٦

طريقة جاوس للحذف ٣٦

طريقة جوس نيوتن ٨٢

طريقة الحاجز الأساسية ١١٨

طريقة الحاجز اللوغاريتمية الأساسية ١١٧

طريقة السمبلكس ٥٠، ٧٨

طريقة M الكبيرة ٨٥

طريقة الموازنة الثنائية ١٤٦

طريقة نيوتن ٤٦، ٧٩

طريقة نيوتن الإسقاطية ٨٠

طريقة هندسية ١١

طمر ١٢٢

طمر متجانس ١٢١

طمر المسألة ذاتية الثنائية ١١٩

طول خطوة الوسيط ٤٨

## ع

عمود كثيف ٦٢

## ف

فجوة ثنائية ٥٥، ٦٩، ٩٥، ١٠٢، ١٢٢، ١٤٢، ١٥٢، ١٦٦

فراغ تآلفي ٨٩

فراغ جزئي ٩٤

فرضية النقطة الداخلية ٩٣

فضاء جزئي خطي ٧٨

فضاء صف ١٣٢

فضاء صفري ١٣٢

فضاء المصفوفات ٧٩

فوق المستوى ١٢

## ق

قاطع أعظمي ٧٣

قاعدة التوقف ٥٥

قطع ناقص ٧٦

قيد سلتر المؤهل ٩٣

قيم ذاتية ٧٢، ١١٢

قيم ذاتية عظمى ٧٢

قيمة صفري ٣

قيمة عظمى ٣

قيود ٣، ٩٣، ٦٨

قيود متباينة ٢٦

قيود محدبة ٧١

## ك

كثيفة ٦٢

كثيرة حدود متجانسة ٧٥

## ل

لابلاس الرسم ٧٤

## م

- متباينة مثلثية ١٤٠  
 متباينة هولدر ٥٤  
 متسلسلة تايلور ٣٣ ، ٤٦  
 متعدد السطوح ٢٩  
 متغيرات ٤  
 متماثلة تخالفيًا ١٢٠  
 متممة شور ٧١  
 متممة عظمى ١١٤  
 متممة عمودية ٩٤  
 متناثرة ٦٢  
 مجسم ناقص ٧٧  
 مجموعة حلول مسموح بها ٨٩  
 مجموعة متراسة ١١٠  
 مجموعة محدبة ١١  
 مجموعة مربعات ٧٥  
 محدبة فعليًا ١٣١  
 محددة ١٥٩  
 مخروط أساسي ٩٠  
 مخروط ثنائي ٧٨ ، ٩٠  
 مخروط الرتبة الثانية ٧٦ ، ٩٠

- مخروط لورنتز ٩٠  
 مخروط محدب ١٣ ، ٨٩  
 مخروط محدب مغلق ١٢٤  
 مخروط محدب مغلق مدبب ٧٨  
 مخروط مسائل البرمجة الخطية ٩٠  
 مخروط مسائل الرتبة الثانية ٩٠  
 مخروط المصفوفات الموجبة شبه المعرفة ٧٩ ، ٩٠  
 مرتبة أولى لشرط الأمثلة ٣٢ ، ١٤٤  
 مرتبة ثانية لشرط الأمثلة ٣٦  
 مزدوجة الإيجاب ٧٥  
 مسائل البرمجة الموجبة شبه المعرفة ٩٠  
 مسار أوسط ٢٥ ، ٤٧ ، ٨٢ ، ١٠٧ ، ١٢٩ ، ١٦١  
 مسألة الإنتاج ٩  
 مسألة التغذية ٨  
 مسألة ثنائية ٧٨  
 مسألة الحاجز ٢٦  
 مسألة الطمر الثنائية الذاتية ٨٥  
 مسألة القاطع الأعظم المخففة ٨٠  
 مسألة لاجرانج ٦٨  
 مستقلة خطياً ٨٢ ، ٩٣  
 مستوى ١١  
 مصفوفة جاكوبين ١١٣

مصفوفة سهم ٧١

مصفوفة قطرية ٦١ ، ٧٤

مصفوفة متماثلة ٦٨ ، ٧٢ ، ٧٩ ، ٩٩ ، ١٣٣

مصفوفة متماثلة تخالفياً ١٢٤

مصفوفة الموازنة ٨٣

مصفوفة الوحدة ١١٣

مصفوفة هاس ٣٣ ، ٧٩ ، ٨٤ ، ١٣٠

مضاريب لاجرانج ٢٩

معادلات ناظمي ٦٠

معادلة الحاجز ٢٦

معادلة لاجرانج ٣٤

معادلة ليبنوف ١٥٤

معاملات التكلفة ٦

معيار ٥٠

معيار جزئي ٥٠

معيار فروبينس ١١٢ ، ١٣٩

مفكوك شولسكي ١٢١

ملائمة البيانات ٥

مساء ٢٩ ، ٧٩

منحنى تحليلي ١٠٧

منطقة مضلعة ١٤

موازنة تألفي ١٣٤

مؤثر خطي ١٣٠

مؤثر الأثر ٧٤

## ن

نصف الفضاء ١٢

نطمر ٨٥

نظام KKT ٦٠

نظام KKT المخفض ٦٠

نظام زائد التحديد ٨٢

نظام غير شاذ ٤٥

نظام كاريش كون تكرر ٥٩

نظرية التقارب ٧٠

نظرية التحكم ٧٠

نظرية التحكم والنظام ٧٦

نظرية الثنائية الضعيف ١٣٧

نظرية الثنائية القوية ١٠٣ ، ١١٨

نظرية الدالة الضمنية ١١٣

نظرية المتممة ٥١

نقاط النهاية ١١٤

نقطة حدية ١٥

نقطة حرجة ٣٠

نقطة داخلية ٢٩

نقطة عظمى ٣٣



و

وزن القاطع ٧٣

وزن القاطع الأكبر ٧٤

وسيط الأوسطية ١٢٧

وسيط الحاجز ١٢٧

وسيط  $\kappa$  ١٢٠

وسيط  $\mu$  ٢٧، ٤٢، ٨٢، ١٠٧، ١٦٤

وسيط  $\theta$  ٤٢، ١٤١