PORTUGALIAE MATHEMATICA

ISSN 0032-5155

VOLUME 50 1993

Edição da
SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Av. da República, 37 - 4.º
1000 LISBOA — PORTUGAL

PORTUGALIAE MATHEMATICA
Vol. 50 Fasc. 3 – 1993

C-ANNEAUX, E-ANNEAUX ET FORMULE DE LA DIMENSION

ECHI OTHMAN

0 – Introduction

Tous les anneaux considérés sont commutatifs, unitaires et de dimension de Krull finie. Pour tout entier m, on note $A[m]$ l'anneau de polynômes en m indéterminées sur A. Si $\mathbf{p}$ est un idéal premier de A, on note $\mathbf{p}[m]$ l'idéal de $A[m]$ formé des polynômes à coefficients dans $\mathbf{p}$ et on note $\mathrm{ht}\,\mathbf{p}$ la hauteur de $\mathbf{p}$ dans A; enfin, pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers de A, on note $\mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p})$ la hauteur de $\mathbf{q}/\mathbf{p}$ dans le quotient $A/\mathbf{p}$.

On rappelle qu'un anneau A est *caténaire* si, por tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers de A, toutes les chaînes saturées de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{q}$ ont même longueur (égale à $\mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p})$); si A est intègre, il est alors nécéssaire et suffisant d'avoir $\mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) = \mathrm{ht}\,\mathbf{q} - \mathrm{ht}\,\mathbf{p}$, ou encore, pour tout couple de premiers consécutifs, d'avoir $\mathrm{ht}\,\mathbf{q} = \mathrm{ht}\,\mathbf{p} + 1$.

On rappelle aussi que A est *universellement caténaire* si $A[m]$ est caténaire pour tout entier m. On pose alors ici la définition suivante:

Définition 0.1. Soit n un entier.

1) On dit qu'un anneau A est *n-caténaire* si, pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers de A, tel qu'il existe une chaîne saturée de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{q}$ de longueur $d \leq n$, alors toutes les chaînes saturées de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{q}$ ont même longueur.

2) On dit que A est *universellement n-caténaire* si $A[m]$ est n-caténaire pour tout entier m.

Suivant [12], on rappelle qu'un anneau A est *S-fort* si, pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers consécutifs de A, alors les idéaux $\mathbf{p}[1] \subset \mathbf{q}[1]$ sont consécutifs dans $A[1]$ ou de façon équivalent si $\mathrm{ht}(\mathbf{q}[1]/\mathbf{p}[1]) = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p})$, pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ d'idéaux premiers de A. Suivant [13], on dit que A est *S-fort universel* si $A[m]$ est S-fort pour tout entier m. On pose alors ici les définitions suivantes:

Received: January 5, 1991; *Revised*: April 19, 1991.

Définition 0.2.

1) Soit n un entier; on dit qu'un anneau A est un *E_n-anneau* si, pour toute chaîne saturée $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ de premiers de $A[n]$ telle que $P_0 \cap A = P_1 \cap A$, on a $\mathrm{ht}(P_2/P_0) = 2$.
2) On dit que A est un *E-anneau* si c'est un E_n-anneau, pour tout n.
3) Soit n un entier; on dit qu'un anneau A est un *C_n-anneau* si, pour tout couple $P \subset Q$ de premiers consécutifs dans $A[n]$, notant $\mathbf{p} = P \cap A$, on a $\mathrm{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}(P/\mathbf{p}[n]) + 1$.
4) On dit que A est un *C-anneau* si c'est un C_n-anneau, pour tout n.

Dans un premier paragraphe on établit alors les implications suivantes:

$$\begin{gathered}
A[n] \text{ est } (n+1)\text{-caténaire (resp. } A \text{ est universellement caténaire)} \\
\Downarrow \\
A \text{ est un } C_n\text{-anneau (resp. } A \text{ est un } C\text{-anneau)} \\
\Downarrow \\
A \text{ est un } E_n\text{-anneau (resp. } A \text{ est un } E\text{-anneau)} \\
\Downarrow \\
A[n-1] \text{ est } S\text{-fort (resp. } A \text{ est } S\text{-fort universel)}
\end{gathered}$$

puis on montre que, si A est caténaire, il est équivalent qu'il soit universellement caténaire, un C-anneau, un E-anneau ou un anneau universellement 2-caténaire.

Dans un second paragraphe, on donne une série de contre-exemples:

1) un anneau S-fort universel et caténaire qui n'est pas un E-anneau;
2) un anneau $(n-1)$-caténaire qui n'est pas n-caténaire;
3) un C-anneau qui n'est pas 2-caténaire;
4) un anneau universellement 2-caténaire qui n'est pas caténaire.

Au troisième et dernier paragraphe on s'intéresse à la formule de la dimension: si $A \subset B$, sont deux anneaux intègres, on note d.t.$[A:B]$ le degré de transcendance du corps des fractions de B sur celui de A; on rapelle qu'un anneau intègre A *vérifie la formule de la dimension* (resp. *l'inégalité de la dimension*) si, pour toute A-algèbre intègre B contenant A et tout idéal premier P de B (de hauteur finie), notant $\mathbf{p} = P \cap A$, on a

$$\begin{gathered}
\mathrm{ht}\, P = \mathrm{ht}\, \mathbf{p} + \text{d.t.}[B:A] - \text{d.t.}[B/P:A/\mathbf{p}] \\
(\text{resp. } \ \mathrm{ht}\, P \leq \mathrm{ht}\, \mathbf{p} + \text{d.t.}[B:A] - \text{d.t.}[B/P:A/\mathbf{p}]) \ .
\end{gathered}$$

Enfin, on dit que A *vérifie fortement la formule de la dimension* si, pour tout premier $\mathbf{p}$, $A/\mathbf{p}$ vérifie la formule de la dimension. On montre ici que A vérifie fortement la formule de la dimension si et seulement si, pour tout couple de premiers $P \subset Q$ de $A[n]$, notant $\mathbf{p} = P \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, on a:

$$\mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}] \ ;$$

on retrouve ainsi que A est universellement caténaire si et seulement si il est caténaire et vérifie fortement la formule de la dimension [10, théorème 2.3]. Enfin, on montre que A vérifie fortement la formule de la dimension si et seulement si c'est un C-anneau (ou même un E-anneau) et qu'il vérifie la condition de chaîne (CE) suivante:

Pour tout entier n et toute chaîne $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k$ de longueur maximale entre P_0 et P_k dans $A[n]$, notant $\mathbf{p}_i = P_i \cap A$, pour $0 \leq i \leq k$, il existe une chaîne de longueur maximale dans A entre $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_k$ passant par tous les $\mathbf{p}_i$.

1 – Anneaux n-caténaires, C-anneaux et E-anneaux

a) Généralités

Il résulte immédiatement des définitions 0.1 et 0.2 la proposition suivante:

Proposition 1.1. *Soit (P) l'une des trois propriétés suivantes: "A est n-caténaire", "A est un C_n-anneau" ou "A est un E_n-anneau"; alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A vérifie (P).*

ii) *Pour tout idéal premier $\mathbf{p}$ de A, $A/\mathbf{p}$ vérifie (P).*

iii) *Pour tout idéal premier $\mathbf{p}$ de A, $A_{\mathbf{p}}$ vérifie (P).*

iv) *Pour tout idéal maximal $\mathbf{m}$ de A, $A_{\mathbf{m}}$ vérifie (P).*

On a également

Proposition 1.2.

1) *Si A est n-caténaire, alors A est $(n-1)$-caténaire.*

2) *A est caténaire si et seulement si il est n-caténaire pour tout $n \leq \dim A$.*

3) *Si A est un E_n-anneau (resp. un C_n-anneau) alors $A[1]$ est un E_{n-1}-anneau (resp. un C_{n-1}-anneau).*

4) *Si A est un E_n-anneau (resp. un C_n-anneau) alors A est un E_{n-1}-anneau (resp. un C_{n-1}-anneau).*

Démonstration: **1)** et **2)** sont évidents.

3) Si A est un E_n-anneau, soit $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ une chaîne saturée de premiers de $A[n]$ telle que $P_0 \cap A[1] = P_1 \cap A[2]$, alors $P_0 \cap A = P_1 \cap A$ et donc $\mathrm{ht}(P_2/P_0) = 2$.

Si A est un C_n-anneau, soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs dans $A[n]$, on pose $P_1 = P \cap A[1]$ et $\mathbf{p} = P \cap A$. Par hypothèse on a $\mathrm{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}(P/\mathbf{p}[n]) + 1$, il existe donc une chaîne maximale de $\mathbf{p}[n]$ à Q passant par P, par ailleurs, d'après le théorème de chaîne spéciale [5, théorème 1], il existe une chaîne maximale de $\mathbf{p}[n]$ à P passant par $P_1[n-1]$; ainsi il existe une chaîne maximale de $\mathbf{p}[n]$ à Q passant à la fois par $P_1[n-1]$ et P, d'où

$$\mathrm{ht}(Q/P_1[n-1]) = \mathrm{ht}(P/P_1[n-1]) + \mathrm{ht}(Q/P)\ ,$$

soit

$$\mathrm{ht}(Q/P_1[n-1]) = \mathrm{ht}(P/P_1[n-1]) + 1\ .$$

4) Résulte de (3) et de la proposition 1.1, car A est un quotient de $A[1]$. ∎

Corollaire 1.3. *Si A est un E-anneau (resp. un C-anneau), alors, pour tout n, $A[n]$ est un E-anneau (resp. un C-anneau).*

b) Interrelations

Proposition 1.4.

i) *Si A est un C_n-anneau, alors A est un E_n-anneau.*

ii) *Si $A[n]$ est $(n+1)$-caténaire, alors A est un C_n-anneau.*

iii) *Si $A[n]$ est 2-caténaire, alors A est un E_n-anneau.*

Démonstration: i) Soit $P_0 \subset P_1 \subset P_2$ une chaîne saturée de premiers de $A[n]$, telle que $P_0 \cap A = P_1 \cap A = \mathbf{p}$; quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$, on peut supposer que $\mathbf{p} = (0)$ et, comme A est un C_n-anneau, on a alors $\mathrm{ht}\, P_2 = \mathrm{ht}\, P_1 + 1$ et $\mathrm{ht}\, P_1 = \mathrm{ht}\, P_0 + 1$, d'où a fortiori $\mathrm{ht}(P_2/P_0) = 2$.

ii) Soit $P \subset Q$ deux premiers consécutifs dans $A[n]$, et soit $\mathbf{p} = P \cap A$; quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$, on peut supposer que $\mathbf{p} = (0)$ mais alors $\mathrm{ht}\, P = k \leq n$ et il existe une chaîne saturée de longueur $k+1$ entre (0) et Q dans $A[n]$, mais, comme $A[n]$ est $(n+1)$-caténaire, alors $\mathrm{ht}\, Q = k + 1 = \mathrm{ht}\, P + 1$.

iii) évident. ∎

Corollaire 1.5.

i) *Si A est un C-anneau, alors A est un E-anneau.*

ii) *Si A est universellement caténaire, alors A est un C-anneau.*

iii) *Si A est universellement 2-caténaire, alors A est un E-anneau.*

On donne plus loin l'exemple d'un C-anneau qui n'est pas 2-caténaire [§2, exemple 2.3], ainsi les réciproques des assertions ii) et iii) de la proposition 1.4 et de son corollaire sont fausses; on a par contre:

Proposition 1.6. *Si A est un E_1-anneau, alors A est un C_1-anneau.*

Démonstration: Soient $P \subset Q$ consécutifs dans $A[1]$, et soit $\mathbf{p} = P \cap A$; quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$, on peut supposer que $\mathbf{p} = (0)$; dans ces conditions

– ou bien $P = (0)$, mais alors $\operatorname{ht} Q = 1$,

– ou bien la chaîne $(0) \subset P \subset Q$ est saturée et donc $\operatorname{ht} Q = 2$,

en tout état de causes, $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1$. ∎

Remarque 1.7. De même qu'on ne connait pas d'exemple d'anneau tel que $A[1]$ soit caténaire (resp. S-fort) et que A ne soit pas universellement caténaire (resp. S-fort universel) on ne sait pas s'il existe un C_1-anneau (resp. un E_1-anneau) qui ne soit pas un C-anneau (resp. un E-anneau), ces questions sont d'ailleurs liées [voir remarque 1.12 à la fin de ce paragraphe]. On ne sait donc pas si la réciproque à la première assertion de la proposition 1.4 est fausse, ni donc si les notions de E-anneau et de C-anneau sont distinctes [voir également le lemme 3.9 ci-dessous].

c) Lien avec les anneaux S-forts

Dans [3] on montre que si $A[n]$ est caténaire alors $A[n-1]$ est S-fort, en fait il suffit que A soit un E_n-anneau:

Proposition 1.8. *Si A est un E_n-anneau, alors $A[n-1]$ est S-fort.*

Démonstration: La démonstration est analogue à celle de [3, Lemme (2.3)].

Soient $P \subset Q$ deux idéaux premiers consécutifs dans $A[n-1]$, alors la chaîne $P[X_n] \subset (P, X_n) \subset (Q, X_n)$ est saturée dans $A[n]$ et $P[X_n] \cap A = (P, X_n) \cap A$, ainsi $\operatorname{ht}((Q, X_n)/P[X_n]) = 2$ (car A est un E_n-anneau) en particulier, la chaîne $P[X_n] \subset Q[X_n] \subset (Q, X_n)$ est saturée et donc les idéaux $P[X_n]$ et $Q[X_n]$ sont consécutifs dans $A[n]$. ∎

Corollaire 1.9. *Si A est un E-anneau, alors A est S-fort universel.*

A fortiori un C-anneau ou un anneau universellement 2-caténaire est un anneau S-fort universel [corollaire 1.5]. Les réciproques sont fausses [exemples 2.1 et 2.3].

d) Lien avec les anneaux caténaires

Lemme 1.10. *Si A est un E_1-anneau intègre et caténaire alors $A[1]$ est caténaire.*

Démonstration: Comme A est intègre il suffit de montrer que si $P \subset Q$ sont deux idéaux premiers consécutifs dans $A[1]$, alors $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1$; on pose $\mathbf{p} = P \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$ et on envisage trois cas:

Premier cas: $\mathbf{p} = \mathbf{q}$; alors $\mathbf{p}[1] = P$ et Q contient strictement $\mathbf{q}[1]$, donc $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1]) + 1 = \operatorname{ht} P + 1$.

Deuxième cas: $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ et $\mathbf{p}[1] = P$; alors $\mathbf{q}[1] = Q$ et $\mathbf{p}$ et $\mathbf{q}$ sont consécutifs dans A; comme A est intègre et caténaire, on a $\operatorname{ht} \mathbf{q} = \operatorname{ht} \mathbf{p}+1$; par ailleurs A est un E_1-anneau donc un anneau S-fort [proposition 1.8], on tire $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1]) = \operatorname{ht} \mathbf{q}$, $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht}(\mathbf{p}[1]) = \operatorname{ht} \mathbf{p}$ et donc encore $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1$.

Troisième cas: $\mathbf{p}[1] \neq P$; alors nécéssairement $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ et la chaîne $\mathbf{p}[1] \subset P \subset Q$ est saturée, dans ces conditions $\operatorname{ht} P = \operatorname{ht} \mathbf{p} + 1$ et $\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[1]) = 2$ (puisque A est un E_1-anneau); par ailleurs on a [5, théorème 1]:

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[1]) = \operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[1]) + \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1]/\mathbf{p}[1]) \quad \text{et} \quad \operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[1]) + \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1]),$$

soit $\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[1]) = \operatorname{ht} Q + \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1]/\mathbf{p}[1]) - \operatorname{ht}(\mathbf{q}[1])$

comme par ailleurs A est un anneau S-fort [proposition 1.8] et caténaire on tire

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[1]) = \operatorname{ht} Q + \operatorname{ht} \mathbf{q}/\mathbf{p} - \operatorname{ht} \mathbf{q} = \operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} \mathbf{p} = \operatorname{ht} Q - (\operatorname{ht} P - 1)\ ,$$

$$\text{donc} \qquad \operatorname{ht} Q - \operatorname{ht} P + 1 = 2 \quad \text{ou} \quad \operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1\ . \blacksquare$$

Proposition 1.11. *Soit A un anneau caténaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *$A[n]$ est caténaire.*

ii) *$A[n]$ est 2-caténaire.*

iii) *A est un C_n-anneau.*

iv) *A est un E_n-anneau.*

Démonstration: Il est clair que i)$\Rightarrow$ii), par ailleurs il résulte de la proposition 1.4 que i)$\Rightarrow$iii), ii)$\Rightarrow$iv) et iii)$\Rightarrow$iv); il reste donc à établir que iv)$\Rightarrow$i): soit donc A un E_n-anneau caténaire, alors, pour tout premier $\mathbf{p}$ de A, $A/\mathbf{p}$ vérifie les hypothèses du lemme précédent [propositions 1.1 et 1.2], ainsi $A[1]$ est caténaire or c'est aussi un E_{n-1}-anneau [proposition 1.2]; par récurrence sur n, on établit donc que $A[n]$ est caténaire. $\blacksquare$

Corollaire 1.12. *Soit A un anneau caténaire, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est universellement caténaire.*

ii) *A est universellement 2-caténaire.*

iii) *A est un C-anneau.*

iv) *A est un E-anneau.*

Remarque 1.13. Si tout E_1-anneau était un E-anneau [remarque 1.7], alors tout anneau tel que $A[1]$ est caténaire serait universellement caténaire: en effet si $A[1]$ est caténaire, alors A est un E_1-anneau [proposition 1.4], ce serait donc un E-anneau caténaire et le corollaire ci-dessus permettrait de conclure.

2 – Exemples

Les exemples qui suivent sont analogues à ceux de [2, §5 Exemples].

a) Construction type

Les exemples contenus dans ce paragraphe utilisent tous des couples particuliers d'anneaux $A \subset B$ partageant un idéal I [6], [7]: on considère un corps K, une K-algèbre B, un idéal I de B et un morphisme $i: K \to B/I$ (qui n'est pas nécéssairement l'injection canonique); on définit alors l'anneau A comme l'ensemble des éléments de B dont la classe modulo I est dans $i(K)$, de sorte qu'on a le carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & K \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B/I \end{array}$$

on dit alors que A est *l'anneau de la construction* (B, I, K) [6]. Dans tous les exemples qui suivent l'anneau B est intègre, semi-local d'idéaux maximaux M et N de hauteur respective m et n, (0) est le seul idéal premier contenu à la fois dans M et dans N et I est l'intersection $I = M \cap N$; ainsi A est local, d'idéal maximal I, intègre, de même corps des fractions que B et les idéaux premiers non maximaux des anneaux A et B sont en bijection respectant l'inclusion [6, proposition 0]; en particulier les dimensions de A et de B sont égales et le spectre de A est formé de deux chaînes finies entre (0) et I, l'une de longueur m, l'autre de longueur n, sans autre idéal commun que (0) et I [8].

Pour certains exemples, B est un anneau de Prüfer (il suffit de prendre l'intersection de deux anneaux de valuation bien choisis dans un anneau de polynômes $K[d]$), pour d'autre exemples B est un localisé d'une K-algèbre de type fini, il est donc noethérien. Dans tous les cas on peut faire en sorte que B/M et B/N soient finis sur $i(K)$ [6, exemple 7]: il suffit de prendre pour K un corps de fractions rationnelles en une infinité d'indéterminées sur un corps k, soit $K = k(x_1, x_2, ...)$; les quotients B/M et B/N sont a priori des extensions finies d'extension transcendantes pures de K de la forme $L = k(x_1, x_2, ...)(y_1, ..., y_t)$ (éventuellement $t = 0$), mais alors il existe des isomorphismes de K dans un tel corps L, donc des morphismes α et β de K dans B/M et B/N tels que ces derniers soient des extensions finies respectivement de $\alpha(K)$ et $\beta(K)$; on prend alors pour morphisme $i : K \to B/I$ le morphisme produit $\alpha \times \beta : K \to B/M \times B/N$. Notons que, dans ces conditions, si l'anneau B est S-fort alors A l'est également [7, proposition 6] et que B est une A-algèbre de type fini donc que, si B est noethérien, alors A l'est de même [6, proposition 1].

b) Exemples

Exemple 2.1. *Un anneau S-fort universel et caténaire qui n'est pas un E-anneau:*

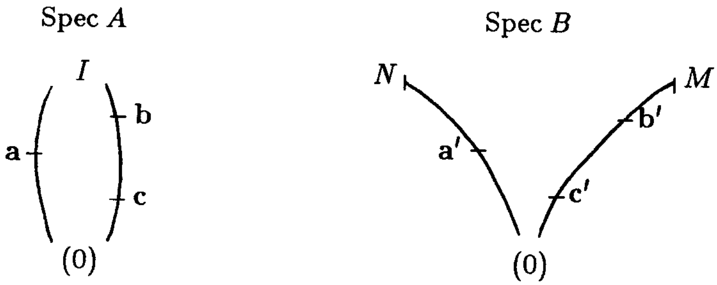
Dans [11], Nagata a construit un exemple d'anneau A noethérien et de dimension 2 (donc S-fort universel et caténaire), tel que $A[1]$ ne soit pas caténaire; un tel anneau n'est pas un E_1-anneau et donc a fortiori n'est pas un E-anneau [proposition 1.11].

Exemple 2.2. *Un anneau $(n-1)$-caténaire qui n'est pas n-caténaire:*

On part d'une K-algèbre B, qui est un anneau de Prüfer semi-local, d'idéaux maximaux M et N de hauteur respective $n-1$ et n, tels que (0) soit le seul idéal premier contenu à la fois dans M et dans N, et on considère le sous anneau $A = K + I$ (c'est-à-dire l'anneau de la construction (B, I, K) pour l'injection canonique de K dans B/I). Le spectre de A est formé de deux chaînes entre (0) et I, l'une de longueur $n-1$ et l'autre de longueur n, donc A est l'exemple cherché.

Exemple 2.3. *Un C-anneau qui n'est pas 2-caténaire:*

On part d'une K-algèbre B, qui est un anneau de Prüfer semi-local, d'idéaux maximaux M et N de hauteur respective 2 et 3, tels que (0) soit le seul idéal premier contenu à la fois dans M et dans N, et on considère l'anneau d'une construction (B, I, K) où B/M et B/N sont algébriques sur $i(K)$. Les spectres de A et de B peuvent alors se représenter comme suit:



il est clair en particulier que l'anneau A n'est pas 2-caténaire, il reste donc à établir que c'est un C-anneau.

Soient $P \subset Q$ deux premiers consécutifs dans $A[n]$, on note $\mathbf{p} = P \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, on doit montrer que $\mathrm{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}(P/\mathbf{p}[n]) + 1$, pour cela il nous suffit d'établir que $A/\mathbf{p}$ ou $A_{\mathbf{q}}$ est universellement caténaire. On envisage alors trois cas:

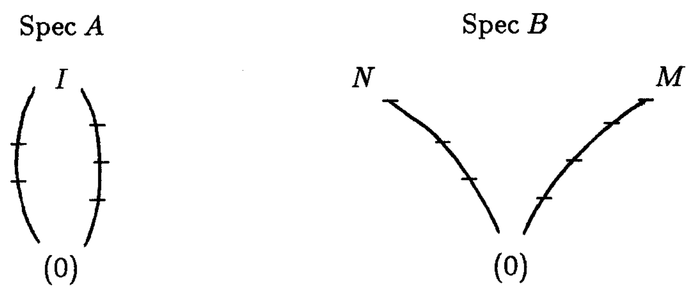
1) $\mathbf{p} = I$; alors $A/\mathbf{p}$ est un corps donc universellement caténaire.

2) $\mathbf{q} \neq I$; alors $A_{\mathbf{q}} = B_{\mathbf{q}}$ [6, proposition 0], donc $A_{\mathbf{q}}$ est un anneau de Prüfer donc universellement caténaire.

3) $\mathbf{p} \subset \mathbf{q} = I$; dans ce cas la chaîne $P \subset Q$ se relève dans $B[n]$ en $P' \subset Q'$ et, quitte à choisir Q' minimal parmi les premiers relevant Q, on peut choisir P' et Q' consécutifs dans $B[n]$. Posant $\mathbf{p}' = P' \cap B$ et $\mathbf{q}' = Q' \cap B$, alors $\mathbf{q}'$ est soit N soit M (puisqu'il relève $\mathbf{q} = I$ dans B); comme B est un anneau de Prüfer, il en résulte que $\mathbf{p}'$ et $\mathbf{q}'$ sont consécutifs dans B [3, lemme 11], donc $\mathbf{p}'$ est soit $\mathbf{a}'$ soit $\mathbf{b}'$ mais alors l'idéal $\mathbf{p}$ qu'il relève est soit $\mathbf{a}$ soit $\mathbf{b}$ et pour finir le quotient $A/\mathbf{p}$ est de dimension 1; comme $A/\mathbf{p}$ est S-fort (puisque A est S-fort comme on l'a rappelé dans la construction type ci-dessus), il est alors universellement caténaire.

Exemple 2.4. *Un anneau universellement 2-caténaire qui n'est pas caténaire:*

On reprend l'exemple précédent mais avec M et N de hauteur respective 3 et 4, de sorte que les spectres de A et de B sont représentés schématiquement comme suit:



Il est clair que A n'est pas caténaire (et on montrerait comme dans l'exemple précédent que c'est un C-anneau). Il reste à établir que A est universellement 2-caténaire, soit que pour toute chaîne saturée $P \subset P_1 \subset Q$ dans $A[n]$, on a $\mathrm{ht}(Q/P) = 2$; notant $\mathbf{p} = P \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, il nous suffit donc de montrer que $A/\mathbf{p}$ ou $A_{\mathbf{q}}$ est universellement caténaire et on envisage toujours trois cas:

1) $\mathbf{p} = I$; alors $A/\mathbf{p}$ est un corps;

2) $\mathbf{q} \neq I$; alors $A_{\mathbf{q}} = B_{\mathbf{q}}$ est un anneau de Prüfer;

3) $\mathbf{p} \subset \mathbf{q} = I$; alors la chaîne $P \subset P_1 \subset Q$ se relève dans $B[n]$ en une chaîne saturée $P' \subset P'_1 \subset Q'$, notant $\mathbf{p}' = P' \cap B$, $\mathbf{p}'_1 = P'_1 \cap B$ et $\mathbf{q}' = Q' \cap B$, alors $\mathbf{q}' = N$ ou $\mathbf{q}' = M$; la chaîne $\mathbf{p}' \subset \mathbf{p}'_1 \subset \mathbf{q}'$ est saturée (puisque B est de Prüfer, l'idéal $\mathbf{p}'_1$ pouvant être égal à $\mathbf{p}'$), en tout cas $\mathbf{p}'$ n'est pas nul donc l'idéal $\mathbf{p}$ qu'il relève non plus, ainsi $A/\mathbf{p}$ est caténaire et, comme c'est un C-anneau, il est universellement caténaire [corollaire 1.12].

3 – Formule de la dimension

a) Anneaux de Jaffard et inégalité de la dimension

Pour un anneau A (de dimension de Krull finie), rappelons les définitions suivantes [1], [7]:

– A est un *anneau de Jaffard* si $\dim A[n] = n + \dim A$, pour tout entier $n \geq 0$.

– A est un *localement de Jaffard* si A_P est de Jaffard, pour tout premier P de A.

– A est *résiduellement de Jaffard* si A/P est de Jaffard, pour tout premier P de A.

– A est *totalement de Jaffard* si tout localisé de A est résiduellement de Jaffard.

Rappellons aussi comment rapprocher ces notions de l'inégalité de la dimension [10, lemme 1.4]:

Proposition 3.0 [10, Lemme (1.4)]. *Soit A un anneau intègre, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est localement de Jaffard.*

ii) *A vérifie l'inégalité de la dimension.*

iii) *Pour tout premier $\mathbf{p}$ de A et tout entier n, on a* $\operatorname{ht}\mathbf{p} = \operatorname{ht}\mathbf{p}[n]$.

On a alors:

Proposition 3.1. *Soit A un anneau, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est totalement de Jaffard.*

ii) *Pour tout premier $\mathbf{p}$ de A, le quotient $A/\mathbf{p}$ vérifie l'inégalité de la dimension.*

iii) *Pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers de A et tout entier n, on a*

$$\operatorname{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) = \operatorname{ht}(\mathbf{q}[n]/\mathbf{p}[n]) .$$

iv) *Pour tout couple $\mathbf{p} \subset \mathbf{q}$ de premiers de A, tout entier n et tout premier Q de $A[n]$ tel que $\mathbf{q} = Q \cap A$, on a*

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) - \operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - \operatorname{ht}\mathbf{q} .$$

Démonstration: L'équivalence de i), ii) et iii) résulte directement de la proposition 3.0.

iii)⇒iv) D'après [5, théorème 1] on a

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) = \operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[n]) + \operatorname{ht}(\mathbf{q}[n]/\mathbf{p}[n]) ,$$
$$\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[n]) + \operatorname{ht}\mathbf{q}[n] ,$$

soustreyant membre à membre et tenant compte de iii) on a donc

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) - \operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(\mathbf{q}[n]/\mathbf{p}[n]) - \operatorname{ht}\mathbf{q}[n] = \operatorname{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - \operatorname{ht}\mathbf{q} .$$

iv)⇒iii) Si $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, on tire de iv) l'égalité

$$\operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[n]) - \operatorname{ht} Q = -\operatorname{ht}\mathbf{q} ,$$

or $$\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht}(Q/\mathbf{q}[n]) + \operatorname{ht}\mathbf{q}[n] \quad [5, \text{théorème } 1] ,$$

donc $$\operatorname{ht}\mathbf{q}[n] = \operatorname{ht}\mathbf{q} .$$

Si maintenant $Q = \mathbf{q}[n]$, on tire de iv) l'égalité

$$\mathrm{ht}(\mathbf{q}[n]/\mathbf{p}[n]) - \mathrm{ht}\,\mathbf{q}[n] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - \mathrm{ht}\,\mathbf{q}\ ,$$

or $$\mathrm{ht}\,\mathbf{q}[n] = \mathrm{ht}\,\mathbf{q}, \quad \text{d'après ce qui précède}$$

donc $$\mathrm{ht}(\mathbf{q}[n]/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p})\ . \blacksquare$$

b) Formule de la dimension

Proposition 3.2. *Soit A un anneau intègre, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A vérifie la formule de la dimension.*

ii) *A est localement de Jaffard et pour tout entier n et tout couple d'idéaux premiers $P \subset Q$ de $A[n]$ tels que $P \cap A = (0)$, on a*

$$\mathrm{ht}(Q/P) = \mathrm{ht}\,Q - \mathrm{ht}\,P\ .$$

Démonstration:

i)$\Rightarrow$ii) Si A vérifie la formule de la dimension, alors il vérifie a fortiori l'inégalité de la dimension et c'est donc un anneau localement de Jaffard, d'après la proposition 3.0. D'autre part $B = A[n]/P$ est une A-algèbre de type fini contenant A (puisque $P \cap A = (0)$) donc, notant $Q^* = Q/P$ et $\mathbf{q} = Q \cap A = Q^* \cap A$, on a par hypothèse:

$$\mathrm{ht}\,Q^* = \mathrm{ht}\,\mathbf{q} + \mathrm{d.t.}[B:A] - \mathrm{d.t.}[B/Q^*:A/\mathbf{q}], \quad \text{soit} \tag{0}$$

$$\mathrm{ht}(Q/P) = \mathrm{ht}\,\mathbf{q} + \mathrm{d.t.}[A[n]/P:A] - \mathrm{d.t.}[A[n]/Q:A/\mathbf{q}]\ . \tag{1}$$

Par ailleurs $A[n]$ aussi est une A-algèbre de type fini contenant A, donc

$$\mathrm{ht}\,Q = \mathrm{ht}\,\mathbf{q} + \mathrm{d.t.}[A[n]:A] - \mathrm{d.t.}[A[n]/Q:A/\mathbf{q}] \quad \text{et} \tag{2}$$

$$\mathrm{ht}\,P = \mathrm{ht}(0) + \mathrm{d.t.}[A[n]:A] - \mathrm{d.t.}[A[n]/P:A]\ . \tag{3}$$

La différence des second membres de (2) et (3) donne le second membre de (1), d'où la formule

$$\mathrm{ht}\,Q - \mathrm{ht}\,P = \mathrm{ht}(Q/P)\ . \tag{4}$$

ii)$\Rightarrow$i) Si réciproquement A est localement de Jaffard, il vérifie l'inégalité de la dimension donc la formule de la dimension pour la A-algèbre de type fini $A[n]$

[10, lemme 1.4], ainsi les égalités (2) et (3) sont vérifiées; si on a en outre la formule (4), on en tire l'égalité (1); ainsi pour toute A-algèbre intègre B de type fini contenant A (qui est de la forme $A[n]/P$ où $P \cap A = (0)$) et tout idéal premier Q^* de B (qui est de la forme $Q^* = Q/P$), on tire la formule de la dimension (0).∎

Théorème 3.3. *Soit A un anneau, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A vérifie fortement la formule de la dimension.*

ii) *Pour tout entier n et pour tout couple de premiers $P \subset Q$ de $A[n]$, notant $\mathbf{p} = P \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, on a*

$$(*) \qquad \mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}] \,.$$

Démonstration:

i)⇒ii) Comme A vérifie la formule de la dimension, on a d'après la proposition précédente, quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$:

$$(1) \qquad \mathrm{ht}(Q/P) = \mathrm{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) - \mathrm{ht}(P/\mathbf{p}[n])$$

mais par ailleurs tout quotient de A vérifie la formule et a fortiori l'inégalité de la dimension, donc A est totalement de Jaffard et on a, d'après la proposition 3.1:

$$(2) \qquad \mathrm{ht}(Q/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}\, Q + \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - \mathrm{ht}\, \mathbf{q} \,,$$

$$(3) \qquad \mathrm{ht}(P/\mathbf{p}[n]) = \mathrm{ht}\, P + \quad 0 \quad - \mathrm{ht}\, \mathbf{p} \,.$$

Combinant (1), (2) et (3) on touve bien la formule

$$(*) \qquad \mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}] \,. \blacksquare$$

Pour établir la réciproque, on démontre d'abord deux lemmes et, pour la commodité des énoncés, on dira qu'un anneau vérifie la condition $(*)$ s'il vérifie la condition ii) du théorème.

Lemme 3.4. *Si un anneau A vérifie la condition $(*)$, alors, pour tout premier $\mathbf{t}$ de A, le quotient $A/\mathbf{t}$ vérifie cette même condition.*

Démonstration: Un couple de premiers de $(A/\mathbf{t})[n]$ s'obtient par quotient d'un couple de premiers $P \subset Q$ de $A[n]$ contenant $\mathbf{t}[n]$, on a alors par hypothèse, en appliquant la formule $(*)$ aux couples $P \subset Q$, $\mathbf{t}[n] \subset Q$ et $\mathbf{t}[n] \subset P$:

$$(1) \qquad \mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}] \,,$$

$$(2) \qquad \mathrm{ht}(Q/\mathbf{t}[n]) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}[n]] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{t}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}] \,,$$

$$(3) \qquad \mathrm{ht}(P/\mathbf{t}[n]) - [\mathrm{ht}\, P - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}[n]] = \mathrm{ht}(\mathbf{p}/\mathbf{t}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q}_p - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}] \,,$$

et donc, en combinant (1), (2) et (3), on obtient:

$$\mathrm{ht}(Q/P) - \Big[\mathrm{ht}(Q/\mathbf{t}[n]) - \mathrm{ht}(P/\mathbf{t}[n])\Big] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{p}) - \Big[\mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{t}) - \mathrm{ht}(\mathbf{p}/\mathbf{t})\Big]$$

soit donc finalement la formule (∗) pour les quotients de P et Q dans $(A/\mathbf{t})[n]$. ∎

Lemme 3.5. *Si un anneau A vérifie la condition (∗), alors A est un C-anneau.*

Démonstration: Soient $P \subset Q$ deux premiers consécutifs de $A[n]$, quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$ (d'après le lemme précédent), on peut supposer que $P \cap A = (0)$, on a alors par hypothèse

$$\mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/(0)) - [\mathrm{ht}\,\mathbf{q} - \mathrm{ht}(0)] = 0$$

et donc $\mathrm{ht}\, Q = \mathrm{ht}\, P + 1$. ∎

Réciproque du théorème 3.3. Si A vérifie la condition (∗), il en est de même de tout quotient de A [lemme 3.4]; on peut alors se restreindre au cas où A est intègre et montrer qu'il vérifie la formule de la dimension; or A est un C-anneau [lemme 3.5] et a fortiori un anneau S-fort universel [corollaires 1.5 et 1.9] et donc un anneau totalement de Jaffard [6, introduction], a fortiori localement de Jaffard, il reste donc à montrer que pour tout couple d'idéaux premiers $P \subset Q$ de $A[n]$ tels que $P \cap A = (0)$, on a $\mathrm{ht}(Q/P) = \mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P$ [proposition 3.2], or la condition (∗) donne en effet:

$$\mathrm{ht}(Q/P) - [\mathrm{ht}\, Q - \mathrm{ht}\, P] = \mathrm{ht}(\mathbf{q}/(0)) - [\mathrm{ht}\,\mathbf{q} - \mathrm{ht}(0)] = 0 .$$

On peut alors retrouver le:

Corollaire 3.6 [10, Théorème (2.3)]. *Soit A un anneau, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A est universellement caténaire.*

ii) *A est caténaire et vérifie fortement la formule de la dimension.*

c) Condition de chaîne

Définition 3.7. On dit qu'un anneau A *vérifie la condition de chaîne (CE)* si, pour tout entier n et toute chaîne $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k$, de longueur maximale entre P_0 et P_k dans $A[n]$, notant $\mathbf{p}_i = P_i \cap A$, pour $0 \leq i \leq k$, il existe une chaîne de longueur maximale dans A entre $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_k$ passant par tous les $\mathbf{p}_i$.

On note que les anneaux caténaires vérifient bien sûr la condition (CE); on a aussi (analogue à la proposition 1.1):

Proposition 3.8. *Les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A vérifie la condition de chaîne (CE).*

ii) *Pour tout idéal premier $\mathbf{p}$ de A, $A/\mathbf{p}$ vérifie la condition de chaîne (CE).*

iii) *Pour tout idéal premier $\mathbf{p}$ de A, $A_{\mathbf{p}}$ vérifie la condition de chaîne (CE).*

iv) *Pour tout idéal maximal $\mathbf{m}$ de A, $A_{\mathbf{m}}$ vérifie la condition de chaîne (CE).*

Pour un anneau vérifiant la condition de chaîne (CE) on sait montrer que les notions de C-anneau et de E-anneau coincident [voir remarque 1.7]:

Lemme 3.9. *Soit A un anneau vérifiant la condition de chaîne (CE), alors A est un C-anneau si et seulement si A est un E-anneau.*

Démonstration: Puisqu'un C-anneau est un E-anneau [corollaire 1.4], il suffit de montrer qu'un E-anneau vérifiant la condition de chaîne (CE) est un C_n-anneau pour tout n; c'est vrai pour $n = 1$ [proposition 1.6] on raisonne donc par récurrence sur n: on suppose que A est un C_{n-1}-anneau et on considère un couple $P \subset Q$ de premiers consécutifs dans $A[n]$; on peut supposer en outre que $\mathbf{p} = P \cap A = (0)$ (quitte à remplacer A par $A/\mathbf{p}$, les hypothèses étant stables par quotient), on cherche donc à établir l'égalité $\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} P + 1$.

On pose $P_1 = P \cap A[n-1]$ et $Q_1 = Q \cap A[n-1]$; comme A est S-fort universel, puisque c'est un E-anneau [corollaire 1.9], on a $\operatorname{ht} P_1[X_n] = \operatorname{ht} P_1$ et $\operatorname{ht} Q_1[X_n] = \operatorname{ht} Q_1$. On envisage alors quatre cas:

Premier cas: $P = P_1[X_n]$ et $P_1 \neq Q_1$; dans ce cas $Q = Q_1[X_n]$ et les idéaux P_1 et Q_1 sont nécéssairement consécutifs dans $A[n-1]$, par hypothèse de récurrence on a donc

$$\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} Q_1 = \operatorname{ht} P_1 + 1 = \operatorname{ht} P + 1 \ .$$

Deuxième cas: $P = P_1[X_n]$ et $P_1 = Q_1$; dans ce cas $Q_1[X_n] \subset Q$ mais alors

$$\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} Q_1[X_n] + 1 = \operatorname{ht} P_1[X_n] + 1 = \operatorname{ht} P + 1 \ .$$

Troisième cas: $P_1[X_n] \subset P$ et $Q_1[X_n] \subset Q$; dans ce cas la chaîne $P_1[X_n] \subset P \subset Q$ est saturée et il en est alors de même de la chaîne $P_1[X_n] \subset Q_1[X_n] \subset Q$, puisque A est un E-anneau par hypothèse; mais alors les idéaux P_1 et Q_1 sont nécéssairement consécutifs dans $A[n-1]$ et par hypothèse de récurrence on a

$$\operatorname{ht} Q = \operatorname{ht} Q_1 + 1 = \operatorname{ht} P_1 + 2 = \operatorname{ht} P + 1 \ .$$

Quatrième cas: $P_1[X_n] \subset P$ et $Q_1[X_n] = Q$; dans ce cas la chaîne $P_1[X_n] \subset P \subset Q_1[X_n]$ est saturée et comme A est S-fort universel, il est totalement de Jaffard [7, introduction], donc

$$\mathrm{ht}(Q_1[X_n]/P_1[X_n]) = \mathrm{ht}(Q_1/P_1), \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{ht}(Q_1/P_1) = 2 \ .$$

Ainsi il existe un idéal T_1 de $A[n-1]$ tel que la chaîne $P_1 \subset T_1 \subset Q_1$ soit saturée; on pose $\mathbf{t} = T_1 \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, comme A est totalement de Jaffard, on a les formules [proposition 3.1 iv)]

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{ht}(Q_1/\mathbf{t}[n-1]) - \mathrm{ht}\, Q_1 &= \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{t}) - \mathrm{ht}\, \mathbf{q} \ , \\ \mathrm{ht}(T_1/\mathbf{t}[n-1]) - \mathrm{ht}\, T_1 &= \quad 0 \quad - \mathrm{ht}\, \mathbf{t} \ ; \end{aligned}$$

et, par hypothèse de récurrence,

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{ht}(Q_1/\mathbf{t}[n-1]) = \mathrm{ht}(T_1/\mathbf{t}[n-1]) + 1 \ .$$

Combinant (1), (2) et (3), on tire

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{ht}\, Q_1 - \mathrm{ht}\, T_1 = 1 - \mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{t}) + [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}] \ .$$

Par ailleurs, A vérifie la condition de chaîne (CE) et la chaîne $P_1 \subset T_1 \subset Q_1$ est maximale entre P_1 et Q_1, puisqu'elle est saturée et que A est un E-anneau, ainsi il passe par $\mathbf{t}$ une chaîne de longueur maximale dans A entre $(0) = \mathbf{p} = P_1 \cap A$ et $\mathbf{q} = Q \cap A$, donc

$$\mathrm{ht}(\mathbf{q}/\mathbf{t}) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{q} - \mathrm{ht}\, \mathbf{t}] = 0; \qquad \text{d'où} \quad \mathrm{ht}\, Q_1 = \mathrm{ht}\, T_1 + 1, \quad \text{d'après l'égalité (4) ;}$$

or, par hypothèse de récurrence, on a aussi $\mathrm{ht}\, T_1 = \mathrm{ht}\, P_1 + 1$, donc finalement

$$\mathrm{ht}\, Q = \mathrm{ht}\, Q_1 = \mathrm{ht}\, P_1 + 2 = \mathrm{ht}\, P + 1 \ . \blacksquare$$

On peut alors donner la caractérisation suivante:

Théorème 3.10. *Soit A un anneau, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

i) *A vérifie fortement la formule de la dimension.*

ii) *A est un C-anneau et vérifie la condition de chaîne (CE).*

iii) *A est un E-anneau et vérifie la condition de chaîne (CE).*

Démonstration: L'équivalence de ii) et iii) résulte du lemme ci-dessus.

i)⇒ii) Il est d'abord clair que, si A vérifie fortement la formule de la dimension, alors c'est un C-anneau [lemme 3.5 et théorème 3.3]. On considère donc une chaîne $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k$, de longueur maximale entre P_0 et P_k dans $A[n]$, et on note $\mathbf{p}_i = P_i \cap A$, pour $0 \leq i \leq k$; pour $0 \leq i \leq k-1$, on a alors [théorème 3.3]

$$\mathrm{ht}(P_{i+1}/P_i) - [\mathrm{ht}\, P_{i+1} - \mathrm{ht}\, P_i] = \mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_{i+1} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_i] \; .$$

Ajoutant toutes ces égalités membre à membre, on tire

$$k - [\mathrm{ht}\, P_k - \mathrm{ht}\, P_0] = \sum_{i=0}^{k-1} \Big(\mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i)\Big) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_k - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_0] \; ;$$

par ailleurs, appliquant la condition $(*)$ du théorème 3.3, au couple $P_0 \subset P_k$, on a

$$k - [\mathrm{ht}\, P_k - \mathrm{ht}\, P_0] = \mathrm{ht}(\mathbf{p}_k/\mathbf{p}_0) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_k - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_0] \; ,$$

d'où
$$\sum_{i=0}^{k-1} \Big(\mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i)\Big) = \mathrm{ht}(\mathbf{p}_k/\mathbf{p}_0) \; ;$$

il existe donc une chaîne de A de longueur maximale entre $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_k$ passant par tous les $\mathbf{p}_i$.

ii)⇒i) On veut maintenant établir la condition $(*)$ du théorème 3.3, on considère donc un couple $P \subset Q$ d'idéaux de $A[n]$ et une chaîne $P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_k = Q$, de longueur maximale entre P_0 et P_k dans $A[n]$, et on note toujours $\mathbf{p}_i = P_i \cap A$, pour $0 \leq i \leq k$; comme par hypothèse A est un C-anneau, on a, pour $0 \leq i \leq k$,

$$\mathrm{ht}(P_{i+1}/\mathbf{p}_i[n]) = \mathrm{ht}(P_i/\mathbf{p}_i[n]) + 1 \; ; \tag{1}$$

comme A est S-fort universel [corollaires 1.4 et 1.8] donc totalement de Jaffard, on a aussi [proposition 3.1 iv)]

$$\mathrm{ht}(P_{i+1}/\mathbf{p}_i[n]) = \mathrm{ht}\, P_{i+1} + \mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i) - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_{i+1}, \quad \text{et} \tag{2}$$

$$\mathrm{ht}(P_i/\mathbf{p}_i[n]) = \mathrm{ht}\, P_i + \mathrm{ht}(\mathbf{p}_i/\mathbf{p}_i) - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_i \; . \tag{3}$$

Combinant (1), (2) et (3), on tire pour $0 \leq i \leq k$

$$1 + [\mathrm{ht}\, P_{i+1} - \mathrm{ht}\, P_i] = \mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_{i+1} - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_i]$$

puis, ajoutant entre elles toutes ces égalités,

$$k - [\mathrm{ht}\, P_k - \mathrm{ht}\, P_0] = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_k - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_0] \; , \tag{4}$$

$$\mathrm{ht}(\mathbf{p}_k/\mathbf{p}_0) = \sum_{i=0}^{k-1} \Big(\mathrm{ht}(\mathbf{p}_{i+1}/\mathbf{p}_i)\Big) \; ; \tag{5}$$

par ailleurs, A vérifie par hypothèse la condition de chaîne (CE), il existe donc une chaîne de longueur maximale dans A entre $\mathbf{p}_0$ et $\mathbf{p}_k$ passant par tous les $\mathbf{p}_i$, on a donc combinant (4) et (5), et tenant compte du fait que la chaîne donnée entre P_0 et P_k est de longueur maximale dans $A[n]$, soit $\mathrm{ht}(P_k/P_0) = k$, on a pour conclure

$$(*) \qquad \mathrm{ht}(P_k/P_0) - [\mathrm{ht}\, P_k - \mathrm{ht}\, P_0] = \mathrm{ht}(\mathbf{p}_k/\mathbf{p}_0) - [\mathrm{ht}\, \mathbf{p}_k - \mathrm{ht}\, \mathbf{p}_0] \ . \blacksquare$$

Remarque 3.11. Un anneau peut-être caténaire et donc vérifier la condition de chaîne (CE) sans être un E-anneau ni a fortiori un C-anneau, même s'il est S-fort universel [exemple 2.1]; inversement il peut-être un C-anneau et donc a fortiori un E-anneau et S-fort universel (et même être universellement 2-caténaire), sans vérifier la condition de chaîne (CE): l'anneau A de l'exemple 2.3 (resp. de l'exemple 2.4) est un C-anneau (resp. un C-anneau universellement 2-caténaire) mais il ne vérifie pas la formule de la dimension [2].

REMERCIEMENT – Je tient à remercier vivement monsieur P.J. Cahen (professeur à la faculté des sciences et technique de saint Jérome Marseille, France), pour les fructueuses discutions qu'on a fait lors de la rédaction de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDERSON, D.F., BOUVIER, A., DOBBS, D.E., FONTANA, M. and KABBAJ, S. – On Jaffard domains, *Expo. Math.*, 5 (1988), 145–175.

[2] AYACHE, A. and CAHEN, P.J. – Anneaux vérifiant absorbement l'inégalité ou la formule de la dimension, *Bulletino U.M.I. Algebra et Geometria* (7)6-B (1992), 39–65 .

[3] BOUVIER, A. and FONTANA, M. – The catenarian property of the polynomial rings over a Prüfer domain, *Lecture Notes in Mathematics Springer-Verlag*, 1146 (1985), 340–354.

[4] BOUVIER, A., DOBBS, D.E. and FONTANA, M. – Universally catenarian integral domains, *Advances in Math.*, 72 (1988), 211–238.

[5] BREWER, J.W., MONTGOMERY, P.R., RUTTER, E.A. and HEINZER, W.J. – Krull dimension of polynomial rings, *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag*, 311 (1972).

[6] CAHEN, P.-J. – Couples d'anneaux partageant un idéal, *Archiv der Math.*, 51 (1988), 505–514.

[7] CAHEN, P.-J. – Construction B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard, *Archiv der Math.*, 54 (1990), 125–141.

[8] FONTANA, M. – Topologically defined classes of commutative rings, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 123 (1980), 331–355.

[9] GILMER, R. – *Multiplicative ideal theory*, Dekker, New-York (1972).

[10] KABBAJ, S. – Formule de la dimension pour les S-domaines fort universels, *Bulletino U.M.I. Algebra et Geometria*, 5 (1986), 145–161.

[11] KABBAJ, S. – Sur les S-domains forts de Kaplansky, *J. Algebra*, 137(2) (1991), 400–415.

[12] KAPLANSKY, I. – *Commutative rings*, The university of Chicago press (1974).

[13] MALIK, S. and MOTT, J.L. – Strong S-domains, *J. Pure Appl. Algebra*, 28 (1983), 249–264.

[14] NAGATA, M. – *Local rings*, Interscience, New-York (1962).

[15] RATLIFF, L. – On quasi-unmixed local domains, the altitude formula and the chain condition for prime ideals (I), *Amer. J. Math.*, 51 (1969), 508–528.

Echi Othman,
Dept. Math., Fac. Sc. de Sfax,
Route de soukra, 3038 Sfax – TUNISIE