Table des matiéres

INTRODUCTION

Dans ce mémoire, essentiellement inspiré de l'article de Nobuaki Obata, intitulé "Coherent State Representation in White Noise Calculus", nous commençons par introduire des fonctions holomorphes définies sur un espace nucléaire E, puis on donne des résultats fondamentaux de l'analyse Gaussienne. Ensuite on étudie les opérateurs de bruit blanc quantiques définis sur les espaces de Cochran, Kuo et Sengupta(ou espace "CKS") noté W. On définit alors la notion de représentation diagonale par rapport aux états cohérents puis on donne une généralisation de la résolution de l'identitée:

$$I = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |z >< z| \; d^2 z \tag{1}$$

où

$$|z >= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \phi_z \; ; \; < z| = e^{-\frac{|z|^2}{2}} \phi_{\bar{z}}$$

ϕ_z est le vecteur exponentiel défini dans le chapitre trois et d^2z est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$.
La formule (1) est due à Klauder(voir [20]) et c'est une propriétée essentielle des états cohérents et a des applications fondamentaux dans la physique quantique(voir [12], [22], [44]).
Dans ce travail on donne une généralisation en dimension infinie de la formule (1). Comme la mesure de Lebesgue d^2z n'existe pas en dimension infinie elle sera remplacée par la mesure Gaussienne complexe ν sur l'espace de dimension infinie

$$E^*_{\mathbb{C}} = S'(\mathbb{R}) + iS'(\mathbb{R})$$

où $S'(\mathbb{R})$ est l'espace des distributions tempérées. De plus la bracket $|z >< z|$ sera remplacée par l'opérateur $Q_z \in \mathcal{L}(W, W^*)$,(voir Théorème 3.1.7), $\mathcal{L}(W, W^*)$ étant l'espace des opérateurs linéaires continus de W vers W^*.
On généralise ensuite l'étude de ces opérateurs à une classe d'opérateurs définis sur les espaces des fonctions entières à croissance une fonctions de Young donnée.

Ce travail se compose de quatres chapitres :
Nous introduisons dans le premier chapitre, les fonctions holomorphes définies sur un espace nucléaire complet E et on donne des résultats fondamentaux de l'analyse Gaussienne(Espaces Gaussiens, Polynômes de Wick, Isomorphisme de Wiener-Itô-ségal, etc...).

Dans le chapitre deux on s'intéresse à un triplet de Gelfand particulier :

$$S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}, dx) \subset S'(\mathbb{R})$$

où $S(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions indéfiniment dérivables ainsi que leurs dérivées et $S'(\mathbb{R})$ son dual topologique ou espace des distributions tempérées. On définit d'abord les espaces "CKS" notés W et on considerera le triplet de Gelfand suivant :

$$W \subset \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset W^*$$

où $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ est l'espace de Fock symétrique sur le complexifié de l'espace de Hilbert H, et W^* le dual topologique de W.
Ce ci permettera l'étude des opérateurs linéaires continus de W dans W^*. On introduit ensuite comme exemple les opérateurs différentiels de Hida et les opérateurs intégraux à noyau.
Dans le chapitre trois on introduit la notion de représentation diagonale par rapport aux états cohérents. Cette représentation est donnée par :

$$\Xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) Q_z \nu(dz)$$

pour $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)\,, w \in D^*\,; Q_z \in \mathcal{L}(W, W^*)$, où $D = W \bigotimes W$ et D^* son dual topologique. Plus précisement on montre que chaque opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ admet une unique représentation diagonale par rapport aux états cohérents. En particulier la résolution de l'identitée en dimension infinie et donnée par la formule suivante :

$$I = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} Q_z \nu(dz)$$

où ν est la mesure Gaussienne complexe définie sur $E^*_{\mathbb{C}} = S'(\mathbb{R}) + iS'(\mathbb{R})$ par

$$\nu(dz) = \mu'(dx)\mu'(dy)\,;\, z = x + iy \in E^*_{\mathbb{C}}$$

avec μ' la mesure Gaussienne sur E^* définie via le théorème de Bochner Minlos :

$$e^{-\frac{|\xi|_0^2}{4}} = \int_{E^*} e^{i<x,\xi>} \mu'(dx)\,;\, \xi \in E$$

et comme application on donne la formule d'inversion de la transformée S.
Dans le dernier chapitre on introduit une classe d'opérateurs définis sur l'espace des fonctions test $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ où θ est une fonction de Young donnée puis on définit l'application symbole de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ dans lui même(voir [6]). Ensuite on étudie des opérateurs définis de $F_\theta(N)$ vers $(F_\theta(N))^*$.

Remerciement

Je remercie vivement ma famille specialement mon père **Abdelhafid** et ma mère **Naoua** pour leurs soutien et encouragement continue.

Je remercie le Professeur **Habib Ouerdiane** davoir dirigé ce travail et de son encourage aussi scientifique que morale.

Mes vifs remerciement sadresse au Professeur **Mohammed Sifi** davoir accepter de presider le jury de ce travail.

Mes remerciement egalement sadresse a Madame **Raouda Gannoun** detre membre de ce jury.

Je remercie tous mes amis et collegues a la faculté des sciences de Tunis specialement **Hatem Mejaouli** et **Hamidou Sidi**.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Fonctions holomorphes sur un espace nucléaire

Dans ce chapitre, on va définir et étudier quelques propriétés des fonctions holomorphes définies sur un espace nucléaire de dimension infinie. Pour cela on commence par définir ce qu'est un espace nucléaire et illustrer certaines de ces proprietés qui nous serons utiles.

1.1.1 Espaces nucléaires

Soit E un espace localement convexe séparé, ou (e.l.c.s) dont la topologie est définie par une famille croissante de normes Hilbertiennes $\Big\{|.|_p, p \in I\!N\Big\}$, c'est à dire pour tout $p \in I\!N$:

$$|f|_p = \sqrt{(f,f)_p}$$

où $(,)$ est un produit scalaire sur E. On note $E_p, p \in I\!N$, l'espace de Hilbert complété de l'espace normé $\Big(E, |.|_p\Big)$.

Définition 1.1.1 *E est un espace nucléaire si pour tout $p \in I\!N$, il existe $q \geq p$ tel que l'injection $i_{q,p} : E_q \longrightarrow E_p$ soit de type Hilbert-Schmidt, c'est à dire si $(e_n)_{n\in I\!N}$ est une base orthonormée de E_q, on a :*

$$\|i_{q,p}\|_{HS}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |e_n|_p^2 < \infty$$

où $\|.\|_{HS}$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt.

Si, de plus E est complet pour cette topologie, il est dit un espace de Fréchet. Dans toute la suite on s'intéresse aux espaces de Fréchet nucléaires appelés aussi espaces dénombrablement Hilbertiens.

Remarque 1.1.2 *Tout espace de Fréchet nucléaire E peut s'écrire sous la forme :*

$$E = \bigcap_{p\in I\!N} H_p,$$

et $\forall\, p_1, p_2 \in I\!N, \exists\, p \in I\!N$, *telle que les inclusions :*

$$H_p \subset H_{p_1}\, et\, H_p \subset H_{p_2},$$

soient de type Hilbert-Schmidt, où $\forall\, q \in I\!N, H_q$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire indexé par* $(.,.)_p$.

Exemple 1.1.3
1) *Tout espace de dimension finie est nucléaire.*
2) *Notons par* $s(I\!R)$ *l'espace des suites réelles à décroissance rapide. C'est à dire* $x = (x_n)_{n\in I\!N} \in s(I\!R)$ *si pour tout* $p \in I\!N, |x|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2(n+1)^p < \infty$. *On a alors l'égalité suivante,* $s(I\!R) = \cap_{p\in I\!N} s_p(I\!R)$, *où pour tout* $p \in I\!N, s_p(I\!R) = \Big\{x = (x_n); |x|_p^2 < \infty\Big\}$. *On vérifie que pour* $q > p+1$, *l'injection* $i_{q,p}$ *est de type Hilbert-Schmidt, et que*

$$\|i_{qp}\|_{HS}^2 = \sum_{n\in I\!N} (n+1)^{p-q} < \infty.$$

3) L'espace de Schwartz $S(I\!R)$, *des fonctions indéfiniment dérivables et à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées, est un exemple fondamental d'espace nucléaire. En effet, on montre qu'il est topologiquement isomorphe à l'espace des suites* $s(I\!R)$ *et par suite il est nucléaire. Pour les détails de la structure nucléaire de cet espace voir par exemple ([14]).*
4) L'espace des fonctions indéfiniment dérivables et à support compact $D(I\!R)$ *est aussi un espace nucléaire.*
5) L'espace des fonctions holomorphes sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$, $H(\mathbb{C})$, *est un espace nucléaire.*

1.1.2 Propriétés des espaces nucléaires

On a les propriétés suivantes :
1) Tout sous espace fermé d'un espace nucléaire est nucléaire.
2) E est un espace vectoriel normé nucléaire si et seulement si la dimension de E est finie.
3) Dans un espace nucléaire E et dans son dual E^*, les convergences, faibles et fortes, sont identiques.
4) Si E est nucléaire, les ensembles fermés bornés dans l'espace dual E^* sont compacts pour les topologies de convergence faible et forte.
5) Un espace nucléaire est complet relativement à la topologie de la convergence faible.

Remarque 1.1.4 *Si E est un espace nucléaire, alors d'après la remarque (1.1.2) , E s'écrit :*

$$E = \bigcap_{p\in I\!N} E_p$$

où $(E_p)_{p\in I\!N}$ *est une famille décroissante d'espace de Hilbert munis des produits scalaires notés* $(.,.)_p$. *L'espace E est dense dans* E_p, *pour tout* $p \in I\!N$, *et la topologie de E coincide* *avec la topologie limite projective des espaces de Hilbert E_p, $p \in \mathbb{N}$. Notons que cette dernière topologie est la plus faible sur E qui rend les injections suivantes :*

$$E \hookrightarrow E_p$$

continues pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Une base de voisinage de zéro pour la topologie limite projective est définie par les ensembles :

$$V_{\epsilon,p} = \Big\{u \in E : |u|_p < \epsilon\Big\}, p \in \mathbb{N}, \epsilon > 0.$$

Sans perdre de généralité, on peut supposer que $|.|_p \leq |.|_q$, pour tout $p, q \in \mathbb{N}$ telle que $p \leq q$. Notons par E_{-p} le dual de E_p ; on a les inclusions :

$$E_p \subset E_0 \subset E_{-p}.$$

D'après la théorie de dualité, l'espace dual E^* est donné par :

$$E^* = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} E_{-p},$$

On munie E^* de la topologie limite inductive des espaces de Hilbert E_{-p}. C'est la topologie la plus fine sur E^* qui rend les injections :

$$E_{-p} \hookrightarrow E^*,$$

continues, pour tout $p \in \mathbb{N}$. On désigne par $|.|_{-p}$ la norme sur E_{-p}. Comme la famille $\Big\{|.|_p, p \in \mathbb{N}\Big\}$ est croissante, on obtient alors la chaine des injections continues suivantes:

$$E \longrightarrow ... \longrightarrow E_p \longrightarrow ... \longrightarrow E_o \approx E_{-0} \longrightarrow ... \longrightarrow E_{-p} \longrightarrow ... \longrightarrow E^*.$$

On va introduire maintenant la notion de produit tensoriel symétrique d'un espace nucléaire d'ordre n, et à ce titre il est plus commode de commencer par le produit tensoriel symétrique d'espace E_p.

1.1.3 Produit tensoriel topologique

Définition 1.1.5 *Soient H un espace de Hilbert et $(,)$ son produit scalaire.*
Pour $x, y \in H$, on associe la forme bilinéaire continue

$$x \otimes y \,:\, H^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par :

$$\forall (h_1, h_2) \in H^2, (x \otimes y)(h_1, h_2) = (x, h_1)(y, h_2).$$

La forme $x \otimes y$ est dite tenseur d'ordre 2.

Définition 1.1.6 *L'espace vectoriel engendré par la famille des formes bilinéaires continues $\{x \otimes y\,;\, x, y \in H\}$ est dit espace du produit tensoriel algébrique d'ordre 2 de H, on note cet espace par $H_a^{\otimes^2}$.*

Définition 1.1.7 *Soit x, y, z, $t \in H$ on définie $(x \otimes y, z \otimes t)$ par :*

$$(x \otimes y, z \otimes t) = (x, z)(y, t),$$

cette forme bilinéaire se prolonge par linéarité sur $H_a^{\otimes^2}$ et définie un produit scalaire qu'on note par : $(,)_2$. Le complété de l'espace $H_a^{\otimes^2}$ munie du produit scalaire $(,)_2$ est appelé espace du produit tensoriel de H d'ordre 2, on la note par $H^{\otimes^2}$.

Remarque 1.1.8 *$H^{\otimes^2}$ muni du produit scalaire définie par :*

$$(\varphi \otimes \psi, \zeta \otimes \eta) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{m} (\varphi_k, \zeta_r)(\psi_k, \eta_r)\,;$$

pour tous $\varphi \otimes \psi = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \otimes \psi_k$ et $\zeta \otimes \eta = \sum_{r=1}^{m} \zeta_r \otimes \eta_r$,
est un espace de Hilbert.
De la même manière on définit le produit tensoriel algébrique n fois de H et on notera son complété par :

$$H^{\otimes^n} = H \otimes H \otimes ... \otimes H, n \geq 1$$

avec la convention

$$H^{\otimes^0} = I\!R.$$

NOTATION : $S(n)$ désigne le groupe de toute les permutations sur $\{1, ..., n\}$.

Définition 1.1.9 *On appelle espace du produit tensoriel symétrique de H d'ordre n, l'espace de toutes les combinaisons linéaires finies des éléments de la forme :*

$$\xi_1 \odot \xi_2 \odot ... \odot \xi_n = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S(n)} \xi_{\sigma(1)} \otimes ... \otimes \xi_{\sigma(n)};\ \xi_1, ..., \xi_n \in H.$$

Remarque 1.1.10 *L'espace du produit tensoriel symétrique muni du produit scalaire:*

$$(\xi_1 \odot \xi_2 \odot ... \odot \xi_n, \eta_1 \odot \eta_2 \odot ... \odot \eta_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S(n)} (\xi_{\sigma(1)}, \eta_1)...(\xi_{\sigma(n)}, \eta_n)$$

est un espace préhilbertien. On note le complété de cet espace par $H^{\odot^n}$.

1.1.4 Polynômes continus et théorème des noyaux

Soit E et F deux espaces localements convexes séparés(e.l.c.s). On désigne par $\mathcal{L}(E^n, F)$ l'espace des applications n-linéaires continues de E dans F, et par $\mathcal{L}_s(E^n, F)$ l'espace des applications n-linéaires continues symétriques de E dans F.

Définition 1.1.11 *On appelle polynôme continu, homogène de degré n de E dans F toute applications :*

$$p : E \longrightarrow F$$

telle qu'il existe $A \in \mathcal{L}(E^n, F)$ vérifiant :

$$\forall\, x \in E, p(x) = A(x, ..., x).$$

On pose $\hat{A}(x) = A(x, ..., x)$.

NOTATION : On désigne par $\mathcal{P}(E^n, F)$ l'espace des polynômes continus, homogènes de degré n.

Proposition 1.1.12
L'application de $\mathcal{L}_s(E^n, F)$ dans $\mathcal{P}(E^n, F)$ définie par :

$$A \longmapsto \hat{A}$$

est un isomorphisme.

Preuve :
Le résultat découle en utilisant la formule de polarisation suivante :

$$A(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{(2^n n!)} \sum_{i=1, \epsilon_i = \pm 1}^{n} \epsilon_1 ... \epsilon_n \hat{A}(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_n x_n)\,;\, \forall\, x_1, ..., x_n\, \in E.$$

Remarque 1.1.13 *Si E est un espace nucléaire on notera $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié c'est à dire $E_{\mathbb{C}} = E + iE$.*

Théorème 1.1.14 *(théorème des noyaux)* [32]
Soit $\phi\, :\, E_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme n-linéaire vérifiant : Il existe $c_1 \geq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ telle que

$$\forall (\xi_1, ..., \xi_n) \in E_{\mathbb{C}}^n, |\phi(\xi_1, ..., \xi_n)| \leq c_1 \prod_{i=1}^{n} |\xi_i|_p.$$

Alors il existe un unique $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes^n})^*$ tels qu'on a :

$$\phi(\xi_1, ..., \xi_n) = \langle F_n,\, \xi_1 \otimes ... \otimes \xi_n \rangle.$$

De plus, pour $p' \geq p$ telle que l'injection :

$$i_{p',p} : H_{p',c} \longrightarrow H_{p,c},$$

soit de type Hilbert-Schmidt, on a :

$$|F_n|_{-p} \leq c_1 |i_{p',p}|_{HS}^n,$$

où $|i_{p',p}|$ désigne la norme de Hilbert-Schmidt de $i_{p',p}$.

1.1.5 Fonctions holomorphes

Définition 1.1.15 *Soit E un (e.l.c.s) complexe, une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *est dite Gâteaux holomorphe sur E, si pour tout* $\xi, z \in E$*, la fonction complexe :*

$$\lambda \longrightarrow f(\xi + \lambda z), \lambda \in \mathbb{C}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.16 *Une fonction* $f : E \longrightarrow \mathbb{C}$ *est holomorphe, si elle est Gâteaux holomorphe et continue sur E, f est dite entière si et seulement si elle est holomorphe sur E. On note H(E) l'espace des fonctions holomorphes sur E.*

Exemple 1.1.17 *Tout polynôme sur E est une fonction holomorphe.*

1.2 Analyse Gaussienne

Définition 1.2.1 *Soit H un espace de Hilbert réel séparable muni du produit scalaire* $(.,.)$ *et de la norme* $|.|_0$*. Soit E un espace de Fréchet nucléaire réel qui s'injecte de manière continu et à image dense dans H. Soit* E^* *le dual topologique de E. On construit le triplet de Gelfand suivant :*

$$E \longrightarrow H \simeq H^* \longrightarrow E^*$$

où H^* *est le dual topologique de H, notons que l'isomorphisme topologique* $H \simeq H^*$ *est dû à Riesz. La dualité entre E et* E^* *est définie de manière à prolonger le produit scalaire dans H :*

$$< h, \xi >= (h, \xi)\,;\, h \in H, \xi \in E$$

Remarque 1.2.2 *On peut obtenir un autre triplet de Gelfand en complexifiant le triplet précédent : Soit* $E_{\mathbb{C}} = E + iE$ *le complexifié de E. Le complexifié* H_C *de H est muni du produit scalaire :*

$$(h_1, h_2)_C = (\bar{h_1}, h_2)$$

On obtient alors le triplet de Gelfand complexe suivant :

$$E \longrightarrow H_C \simeq H'_C \longrightarrow E^*$$

Comme exemple on peut considérer le triplet de Gelfand suivant :

$$S(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow S'(\mathbb{R})$$

1.2.1 Espaces Gaussiens

La mesure de Lebesgue joue un rôle important dans l'analyse en dimension finie, puisque c'est la seule mesure, à une constante prés, qui vérifie les deux propriétés suivantes :
1) elle est invariante par les translations.
2) elle associe une mesure finie aux ensembles bornés.
Cependant une telle mesure ne peut exister dans les espaces de dimension infinie, en effet soit H un espace de Hilbert séparable et réel, et soit $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une base orthonormée de H. Supposons que la mesure Gaussienne vit sur H. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}\,;\ \int_H e^{i(x,h_n)} d\mu(x) = e^{-\frac{|h_n|^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

de plus d'après les propriétès des espaces de Hilberts on a : $(x, h_n) = x_n$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = 0$. D'autre part en appliquant le théorème de convergence dominée de Lebesgue on obtient: $1 = e^{-\frac{1}{2}}$ ce qui est absurde. Donc la mesure Gaussienne en dimension infinie ne vit pas sur un espace de Hilbert.
Soit E un espace nucléaire complet reel, et E^* son dual topologique fort. Afin de définir une mesure de probabilité sur E^*, on considère la tribu $\mathcal{B}_c$ engendrée par les ensembles cylindriques de la forme :

$$C_{\xi_1,\dots,\xi_n,B} = \Big\{x \in E^*/\Big(\langle x,\xi_1\rangle, \dots, \langle x,\xi_n\rangle\Big) \in B\Big\}$$

où B est un Borélien de $\mathbb{R}^n$, et $\xi_1, \dots, \xi_n \in E$. $\mathcal{B}_c$ coincide avec la tribu Borélienne de E^*.

Définition 1.2.3 *Soit E un espace nucléaire complet réel, et φ une fonction,*

$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}.$$

La fonction φ est dite définie positive si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}, \forall\, x_1, \dots, x_n \in E, on\, a : \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_j \bar{\alpha_k} \varphi(x_j - x_k) \geq 0$$

Définition 1.2.4 *On appelle fonction caractéristique toute fonction $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant:*
1) φ est continue sur E.
2) $\varphi(0) = 1$
3) φ est définie positive

Théorème 1.2.5 *(Théorème de Bochner Minlos)* [14]
Soit E un espace nucléaire complet réel, et φ une fonction caractéristique sur E, alors il existe une mesure de probabilité μ unique sur l'espace mesurable $(E^*, \mathcal{B}_c)$ telle que :

$$\varphi(\xi) = \hat{\mu}(\xi) = \int_{E^*} \exp(i\langle x,\xi\rangle) d\mu(x), \forall\, \xi \in E.$$

Exemple 1.2.6 *Soit $D(I\!R)$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivable et à support compact et $D'(I\!R)$ son dual topologique. La fonction définie sur $D(I\!R)$ par :*

$$L(\varphi) = \exp\Big(\int_{I\!R}(e^{i\varphi(t)} - 1)dt\Big),$$

est une fonction caractéristique. Alors d'après le théorème de Bochner Minlos, il existe une unique mesure de probabilité π sur les Boréliens de $D'(I\!R)$ tel que $L(\phi) = \hat{\pi}$. Cette mesure est appelée mesure de poisson.

Remarque 1.2.7 *On montre par la suite que pour tout $\sigma \geq 0,$ la fonction :*

$$C_\sigma(\xi) = e^{-\frac{\sigma^2|\xi|^2}{2}}, \xi \in E$$

est une fonction caractéristique sur E.

Définition 1.2.8 *La mesure μ_σ correspondante à C_σ est appelée mesure Gaussienne de variance σ^2. Si $\sigma = 1$ on l'appelle mesure Gaussienne standard et on la note simplement par μ.*

Définition 1.2.9 *L'espace de probabilité $(E^*, \mathcal{B}_c, \mu)$, où $\mathcal{B}_c$ est la tribu engendrée par les ensembles cylindriques est appelé espace Gaussien standard, .*

Lemme 1.2.10 *Soient $\Big\{\xi_1, ..., \xi_n\Big\}$ un système orthonormé de E par rapport au produit scalaire de H. Alors l'image de la mesure Gaussienne μ par l'application :*

$$x \longmapsto \Big(\langle x, \xi_1\rangle, ..., \langle x, \xi_n\rangle\Big) \in I\!R^n \,;\, x \in E^*,$$

est le produit des mesures Gaussiennes standard sur $I\!R$, c'est à dire

$$(\frac{1}{\sqrt{2\pi}})^n \exp\Big(-\frac{1}{2}(t_1^2 + ... + t_n^2)\Big)dt_1...dt_n.$$

Preuve :
Soit ν la mesure image de μ, comme ν est une mesure de probabilité sur $I\!R^n$, alors ν est caractérisée par sa transformée de fourier $\hat{\nu}$ définie par : $\forall\, s_1, ..., s_n \in I\!R$ on a :

$$\hat{\nu}(s_1, ..., s_n) = \int_{-\infty}^{\infty} ... \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} s_k t_k\Big)d\nu(t)$$

avec $t = (t_1, ..., t_n)$.
Donc :

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(s_1, ..., s_n) &= \int_{E^*} \exp\Big(i\sum_{k=1}^{n} s_k\langle x, \xi_k\rangle\Big)d\mu(x)\\ &= \int_{E^*} \exp\Big(i\langle x, \sum_{k=1}^{n} s_k\xi_k\rangle\Big)d\mu(x).\end{aligned}$$

Par suite :

$$\begin{aligned}\hat{\nu}(s_1,...,s_n) &= \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\Big|\sum_{k=1}^{n} s_k\xi_k\Big|^2\Big)\\ &= \exp\Big(-\tfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} s_k^2\Big)\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Lemme 1.2.11 *Soient $\{\xi_1,...,\xi_n\} \subset E$ un système orthonormé par rapport au produit scalaire de H et $f_1,...,f_n$ des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$ par rapport à la mesure Gaussienne en dimension 1. Alors :*

$$\int_{E^*} f_1(\langle x,\xi_1\rangle)...f_n(\langle x,\xi_n\rangle)d\mu(x) = \prod_{k=1}^{n}\int_{E^*} f_k(\langle x,\xi_k\rangle)d\mu(x)$$

Preuve :
La preuve est immédiate d'après le lemme (1.2.10).

Corollaire 1.2.12 *Pour tout $f \in H_C$, la fonction $\langle .,f\rangle \in L^2(\mu)$. De plus si $\xi,\xi_1,...,\xi_n \in H_C, n=1,2,...$ on a les formules suivantes :*

$$\int_{E^*} |\langle x,\xi\rangle|^2 d\mu(x) = |\xi|^2 \tag{1.1}$$

$$\int_{E^*} \exp\left(\langle x,\xi\rangle\right)d\mu(x) = \exp\left(\frac{\langle\xi,\xi\rangle}{2}\right) \tag{1.2}$$

$$\int_{E^*} \langle x,\xi\rangle^{2n} d\mu(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}\langle\xi,\xi\rangle^n \tag{1.3}$$

1.2.2 Polynômes de Wick

Soit E un espace nucléaire complet réel, on désigne par E^* son dual et E_C son complexifié, et soit $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$) l'espace formé par les combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto < x,\xi_1 > ... < x,\xi_n > = < x^{\otimes^n}, \xi_1\otimes\xi_2\otimes...\otimes\xi_n > ;\ x \in E^*, \xi_1,...,\xi_n \in E(resp.\, \xi_1,...,\xi_n \in E_C).$$

Et comme

$$< x^{\otimes^n}, \xi_1 \otimes ... \otimes \xi_n > = < x^{\otimes^n}, \xi_1 \odot ... \odot \xi_n > ,$$

alors, d'après la formule de polarisation, l'espace $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$) coincide avec l'espace formé par l'ensemble des combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto < x^{\otimes^n}, \xi^{\otimes^n} > ;\ x \in E^*,\ \xi \in E(resp.\, \xi \in E_C).$$

Remarque 1.2.13 *Notons que : $\mathcal{P}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) + i\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$*

Définition 1.2.14 *Un élément de* $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{R})\Big(resp.\, \mathcal{P}(\mathbb{C}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n(\mathbb{C})\Big)$ *est appelé polynôme cylindrique sur l'espace* E^*.

Remarque 1.2.15 *Malgré l'importance des polynômes cylindriques, les expressions précédentes de ces polynômes ne sont pas utiles, parce qu'elle ne vérifient pas la relation d'orthogonalité dans* $L^2(\mu)$. *D'ou la nécessitée d'introduire d'autres polynômes qui admettent entre eux des relations d'orthogonalités, dits polynômes ordonnés de Wick.*

En faisant correspondre au couple $(\xi, \eta) \in E \times E$ le nombre $\langle \xi, \eta \rangle$, on aura d'après le théorème (1.1.14), l'existance d'un unique $\tau \in E^{\otimes^2}$ vérifiant :

$$\langle \tau, \xi \otimes \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle.$$

Définition 1.2.16 τ *est appelé opérateur trace.*

Proposition 1.2.17
Soient $\Big\{e_i\Big\}_{i=0}^{\infty}$ *une base orthonormée de H, alors :*

$$\forall w \in E \bigotimes E, \langle \tau, w \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \langle e_i \otimes e_i, w \rangle.$$

De plus on a :

$$\tau = \sum_{i=0}^{\infty} e_i \otimes e_i.$$

Définition 1.2.18 *Pour tout* $x \in E^*$ *et* $n = 0, 1, 2, ...$ *on définit :* $x^{\otimes^n} :\in (E^{\odot^n})^*$ *par la relation d'itération:*
$: x^{\otimes^0} := 1$
$: x^{\otimes^1} := x$
$: x^{\otimes^n} := x \odot : x^{\otimes^{(n-1)}} : -(n-1)\tau \odot : x^{\otimes^{(n-2)}} :, \, n \geq 2.$

Proposition 1.2.19
Pour tout $x \in E^*$, *on a :*

$$: x^{\otimes^n} := \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!2^k} \tau^{\odot^k} \odot x^{\otimes^{(n-2k)}}$$

$$x^{\otimes^n} = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k} \tau^{\odot^k} \odot : x^{\otimes^{(n-2k)}} :$$

On note $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})(resp.\, \mathcal{Q}_n(\mathbb{C}))$ l'espace des combinaisons linéaires finies des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto \langle : x^{\otimes^n} :, \xi \otimes ... \otimes \xi_n \rangle \, ,$$

telle que, $x \in E^*$ et $\xi_1, ..., \xi_n \in E(resp.\, \xi_1, ..., \xi_n \in E_C)$.
Autrement :

$$\mathcal{Q}_n(\mathbb{R}) = \Big\{ x \longmapsto \langle : x^{\otimes^n} :, \xi^{\otimes^n} \rangle \, , x \in E^*, \, \xi \in E \Big\}$$

d'après la propositon précédente on a :

Corollaire 1.2.20 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_k(\mathbb{R}) \; et \; \sum_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(\mathbb{C}) = \sum_{k=0}^{n} \mathcal{Q}_k(\mathbb{C}).$$

Par conséquent on a :

Définition 1.2.21 $\forall \phi \in \mathcal{P}(\mathbb{R})(resp.\, \phi \in \mathcal{P}(\mathbb{C}))$ *on a :*

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle : x^{\otimes^n} :, f_n \rangle \,,$$

avec $f_n \in E^{\odot^n}(resp.\, f_n \in E_C^{\odot^n})$ et $f_n \neq 0$ pour un nombre finie de n.
Le polynôme ϕ est appelé polynôme ordonné de Wick.

Remarque 1.2.22 *On note $(L^2) = L^2(E^*, \mu)$ et la norme de tout $\phi \in (L^2)$ est définie par :*

$$\|\phi\|_0 = \Big(\int_{E^*} \|\phi\|^2 d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Le produit scalaire dans (L^2) est défini par :

$$(f, g)_0 = \int_{E^*} \bar{f}(x) g(x) d\mu(x) \,;\; f, g \in (L^2).$$

On peut aussi définir les polynômes ordonnés de Wick par : Pour $x \in E^*, \xi \in E$ tel que, $\xi \neq 0$, on pose :

$$: < x, \xi >^n := <: x^{\otimes^n} :, \xi^{\otimes^n} >= \Big(\frac{|\xi|_0}{\sqrt{2}} \Big)^n H_n \Big(\frac{< x, \xi >}{\sqrt{2} |\xi|_0} \Big).$$

Où $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-t^2})$; $n \geq 0$, est le polynôme d'Hermite classique d'ordre n.

Proposition 1.2.23
Soient ϕ, ψ deux polynômes de Wick tels que :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, \phi_n > ; \phi_n \in E^{\odot^n},$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, \psi_n > ;\; \psi_n \in E^{\odot^n},$$

et $\phi_n = \psi_n = 0$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors on a :

$$< \phi, \psi >_{(L^2)} = \int_{E^*} \bar{\phi}(x) \psi(x) d\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n! < \phi_n, \psi_n > \; et \; \|\phi\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |\phi_n|_0^2.$$

Corollaire 1.2.24 *Tout $\phi \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$, est exprimé d'une manière unique comme un polynôme ordonné de Wick.*

1.2.3 Isomorphisme de Wiener-Itô-Ségal et espace de Fock

On considère le cas particulier de polynôme de Wick :

$$\phi(x) =<: x^{\otimes^n} :, f > ; x \in E^*$$

où $f \in E_C^{\odot^n}$ de la forme $f = \eta^{\otimes^n}$, $\eta \in E_C$.
d'après la proposition précédente on a : $\phi \in (L^2) = L^2(E^*, \mu, \mathbb{C})$, et $\|\phi\|^2 = n!|f|_n^2$. On se propose de définir le polynôme de Wick précédent pour $f \in H_C^{\odot^n}$.
Comme $E_C^{\odot^n}$ est dense dans $H_C^{\odot^n}$, il existe alors $f^{(j)}$ une suite de $E_C^{\odot^n}$ tel que :

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} |f^{(j)} - f| = 0.$$

On pose $\phi_j(x) =<: x^{\otimes^n}, f^{(j)} >$, on a alors :

$$\lim_{j,k \longrightarrow \infty} \|\phi_j - \phi_k\|^2 = n! \lim_{j,k \longrightarrow \infty} |f^{(j)} - f^{(k)}|^2 = 0.$$

Donc $(\phi_j)_j$ est une suite de cauchy dans $L^2(\mu)$, et comme $L^2(\mu)$est complet, il existe $\phi \in (L^2)$ tels que :

$$\lim_{j \longrightarrow \infty} \|\phi_j - \phi\|_{L^2(\mu)} = 0.$$

ϕ est indépendant du choix de la suite $(f^{(j)})_j$. En posant $\phi(x) =<: x^{\otimes^n} :, f >$, on vérifie facilement que :

$$\|\phi\|_{L^2(\mu)}^2 = n!|f|^2 , \; f \in H_C^{\odot^n}.$$

Soit $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})(resp. \mathcal{H}_n(\mathbb{C}))$ le complété de $\mathcal{Q}_n(\mathbb{R})(resp. \mathcal{Q}_n(\mathbb{C}))$ par rapport à l'espace $L^2(E^*, \mu, \mathbb{R})(resp. L^2(E^*, \mu, \mathbb{C}))$.

Proposition 1.2.25
$\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ coincide avec l'espace des fonctions de la forme :

$$x \longmapsto <: x^{\otimes^n} :, f > ; \; f \in H^{\odot^n}.$$

Proposition 1.2.26
Les polynômes $\mathcal{P}(\mathbb{R})(resp. \mathcal{P}(\mathbb{C}))$ forment un sous-espace dense dans $L^2(E^*, \mu, \mathbb{R})$ respectivement dans $L^2(E^*, \mu, \mathbb{C})$.

Théorème 1.2.27 *(Décomposition de Wiener-Itô)* [32]
On a les égalités suivantes :

$$L^2(E^*, \mu, \mathbb{R}) = \sum_n \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$$

$$L^2(E^*, \mu, \mathbb{C}) = \sum_n \mathcal{H}_n(\mathbb{C})$$

Preuve :
Étant donné $n, m \in I\!N$ tels que $n \neq m$, il résulte de la proposition (1.2.23) que

$$\mathcal{Q}_n(I\!R) \perp \mathcal{Q}_m(I\!R)$$

par suite :

$$\mathcal{H}_n(I\!R) \perp \mathcal{H}_m(I\!R).$$

D'autre part d'après le corollaire(1.2.24)on a :

$$\mathcal{P}(I\!R) = \sum_n \mathcal{P}_n(I\!R) = \sum_n \mathcal{Q}_n(I\!R) \subset \sum_n \mathcal{H}_n(I\!R).$$

Mais, comme $\mathcal{P}(I\!R) \subset L^2(E^*, \mu, I\!R)$ est un sous-espace dense(d'après la proposition précédente), alors on obtient la décomposition orthogonale de $L^2(E^*, \mu, I\!R)$.
De de la même manière on prouve la deuxième égalité.

Définition 1.2.28 *Soit H un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'une norme $|.|$. Soit :*

$$\Gamma(H) = \Big\{ \vec{f} = \big(f_n\big)_{n=0}^{\infty} ;\, f_n \in H^{\odot n} / \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2 < \infty \Big\},$$

munie de la norme :

$$\|\vec{f}\|^2_{\Gamma(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2.$$

L'espace de Hilbert $\Gamma(H)$ est appelé espace de Fock symétrique sur H.

Théorème 1.2.29 *(Wiener-Itô-Ségal)* [32]
$\forall \phi \in L^2(E^*, \mu, \mathbb{C})$, il existe une unique suite $\vec{f} = \big(f_n\big)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_C)$ telle que :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n > .$$

Inversement, $\forall \vec{f} = \big(f_n\big)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_C), \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n >$, définit un élément de $L^2(E^*, \mu, \mathbb{C})$. Dans ce cas, on a :

$$\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|^2 = \|f\|^2_{\Gamma(H_C)}.$$

Remarque 1.2.30 *Le théorème précédent prouve qu'on a un isomorphisme isométrique:*

$$L^2(E^*, \mu, I\!R) \cong \Gamma(H).$$

Et de même ,

$$L^2(E^*, \mu, \mathbb{C}) \cong \Gamma(H_C).$$

Définition 1.2.31 *L'isomorphisme canonique établi dans la remarque précédente est appelé isomorphisme de Wiener-Itô-Ségal et l'expression:*

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n >$$

est appelée développement de Wiener-Itô-Ségal de la fonction $\phi \in L^2(E^*, \mu, \mathbb{C})$.

Proposition 1.2.32
Soit $\left\{e_j\right\}_{j=0}^{\infty}$ *une base orthonormée de H, alors :*

$$\left\{ \quad \sqrt{\frac{n!}{n_0!n_1!...}}\, e_0^{\otimes^{n_0}} \odot e_1^{\otimes^{n_1}} \odot ... \odot e_k^{\otimes^{n_k}} ...; n_0 + n_1 + ... = n \right\}$$

forme une base orthonormée de $H^{\odot n}$.
De plus

$$\left\{ \quad \left(0, ..., 0, \frac{e_0^{\otimes^{n_0}} \odot e_1^{\otimes^{n_1}} \odot ...}{\sqrt{n_0!n_1!...}}, 0, ...\right); n_0 + n_1 + ... = n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est une base orthonormée de $\Gamma(H)$.

1.2.4 Espace des fonctions testes et fonctions généralisées

Par la suite on se propose de construire un espace X de fonctions testes et son dual X^* de fonctions généralisées telle qu'on a le triplet de Gelfand :

$$X \subset (L^2) \subset X^*$$

où $(L^2) = L^2(S'(\mathbb{R}), \mu)$ et μ étant la mesure Gaussienne standard sur $S'(\mathbb{R})$.
Soit A l'opérateur défini par :

$$A = 1 + x^2 - \frac{d^2}{dx^2}.$$

Pour $\phi \in (L^2)$ donnée par :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n >$$

sa norme dans (L^2) est :

$$\|\phi\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!|f_n|_0^2.$$

On considère l'opérateur $\Gamma(A)$ sur (L^2) défini par :

$$\Gamma(A)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes} :, A^{\otimes^n} f_n > . \tag{1.4}$$

On définit le domaine de $\Gamma(A)$ par :

$$Dom(\Gamma(A)) = \Big\{\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n > \ / f_n \in Dom(A^{\otimes^n}) \ et \ \sum_{n=0}^{\infty} n! |A^{\otimes^n} f_n|_0^2 < \infty\Big\}$$

De plus :

$$\|\Gamma(A)\|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |A^{\otimes^n} f_n|_0^2.$$

Définition 1.2.33 *L'opérateur $\Gamma(A)$ est appelé "second quantization de A" et il a les mêmes propriétés que A(voir [32]).*

On pose maintenant :

$$(S_p) \equiv \{\phi \in (L^2) \,/\, \|\phi\|_p < \infty\}$$

où $\|\phi\|_p = \|\Gamma(A)^p \phi\|_0$.
La norme $\|.\|_p$ dérive du produit scalaire sur (S_p) :

$$(\phi,\, \psi)_p = (\Gamma(A)^p \phi,\, \Gamma(A)^p \psi)_0$$

où $(.,\, .)_0$ est le produit scalaire de (L^2). Alors (S_p) est un espace de Hilbert pour $\|.\|_p$. On obtient aussi une suite croissante de normes :

$$\|.\|_p \ \le \ \|.\|_{p+1} \,\forall\, p \ge 0,$$

et donc une suite décroissante d'espaces de Hilberts :

$$(S_{p+1}) \hookrightarrow (S_p).$$

On pose $(S) \equiv \lim proj_{p \longrightarrow \infty}(S_p)$. Alors (S) est un espace nucléaire et (S_p) peut être regardé comme le complété de (S) relativement à $\|.\|_p$.

Définition 1.2.34 *On note $(S)^*$ le dual topologique de (S). Alors (S) est appelé espace des fonctions testes et $(S)^*$ est appelé espace des fonctions généralisées.*

Remarque 1.2.35 *On a :*

$$(S)^* \cong \bigcup_{p \ge 0} (S_p)^* \cong \lim ind_{p \longrightarrow \infty}(S_p)^*$$

est la norme de $(S_p)^*$ est donnée par :

$$\|\Phi\|_{-p} = \|\Gamma(A)^{-p} \Phi\|_0 \,;\, p \ge 0.$$

On obtient donc le triplet de Gelfand :

$$(E) = (S) \subset (L^2) \subset (S)^* = (E)^*$$

la forme bilinéaire canonique de $(E)^*$ et (E) sera notée par : $\ll . \gg$ telle que :

$$\ll \phi,\, \psi \gg = (\bar{\phi},\, \psi)_{(L^2)} \,;\, \forall \phi \in (L^2)\,,\, \psi \in (E).$$

Théorème 1.2.36 [32]
$\forall \phi \in (L^2)$ donnée par :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n > \; ; \; x \in E^* \, , \; (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \Gamma(H_{\mathbb{C}}).$$

Alors $\phi \in (E)$ si et seulement si $f_n \in E_{\mathbb{C}}^{\odot^n}$ $\forall \, n = 0, 1, 2, \ldots$ et

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2 < \infty \, \forall p \geq 0.$$

Dans ce cas :

$$\|\phi\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |f_n|_p^2 \, ; \; p \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.2.37 [32]
$\forall \, \Phi \in (E)^*$ il existe un unique $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\odot^n})^*$ telle que pour tout $\phi \in (E)$ on a :

$$\ll \Phi \, , \phi \gg = \sum_{n=0}^{\infty} n! < F_n, \; f_n > .$$

Inversement, étant donnée une suite $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ telle que $F_n \in (E_{\mathbb{C}}^{\odot})^*$ et $\sum_{n=0}^{\infty} n! |F_n|_{-p}^2 < \infty$ pour tout $p \geq 0$. Alors la fonction Φ, définie par

$$\ll \Phi, \; \phi \gg = \sum_{n=0}^{\infty} n! < F_n, \; f_n >$$

est dans $(E)^*$ pour $\phi \in (E)$ et dans ce cas :

$$\|\Phi\|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! |F_n|_{-p}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \Big| (A^{-p})^{\otimes^n} F_n \Big|_0^2 < \infty.$$

1.2.5 La transformation chaotique(transformée S)

La transformation chaotique S est une extension de l'isométrie de Wiener-Itô-Ségal, définie sur l'espace des fonctions généralisées.

Définition 1.2.38 *Soit H un espace de Hilbert et E un espace nucléaire. Pour $\xi \in H_C$ la fonction $\phi_\xi \in (L^2)$ définie par le développement de Wiener-Itô :*

$$\phi_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!} > ; \; x \in E^*. \tag{1.5}$$

est dite vecteur exponentiel ou état cohérent.

Proposition 1.2.39
Soit H un espace de Hilbert réel alors $\{\phi_\xi\,;\,\xi\in H\}$ *est une famille libre de* $\Gamma(H)$.

Preuve:
On suppose que H est muni d'une norme $|.|$.
Soit $\xi_1,...,\xi_N\in H$, distincts deux à deux telque :

$$\sum_{j=1}^{N}a_j\phi_{\xi_j}=0\,;\ a_j\in I\!R, j=1,...,N.$$

Montrons que : $a_j=0\,,\,\forall j=1,...,N.$
Puisque $\xi_1,...,\xi_N$ sont deux à deux distincts, il existe $\eta\in H$ telque :

$$<\xi_1-\xi_k,\eta>\neq o,\,\forall j\neq 0.$$

Alors :

$$\begin{aligned}0&=\sum_{j=1}^{N}a_j<\phi_{\xi_j},\phi_{t\eta}>\\&=\sum_{j=1}^{N}a_j\Big(\sum_{n=0}^{\infty}n!<\frac{\xi_j^{\otimes^n}}{n!},\frac{(t\eta)^{\otimes^n}}{n!}>\Big)\\&=\sum_{j=1}^{N}a_j\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<\xi_j,t\eta>^n\\&=\sum_{j=1}^{N}a_je^{t<\xi_j,\eta>}\,;\,t\in I\!R.\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d^m}{dt^m}\Big(\sum_{j=1}^{N}a_je^{t<\xi_j,\eta>}\Big)_{|t=0}=0\,;\,m=0,1,2,...$$

Par suite :

$$\begin{pmatrix}1&...&1\\<\xi_1,\eta>&...&<\xi_N,\eta>\\\vdots&&\vdots\\<\xi_1,\eta>^{N-1}&...&<\xi_N,\eta>^{N-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_N\end{pmatrix}=0$$

Le déterminant de cette matrice est donc égale à :

$$\Pi_{1\leq k<j\leq N}<\xi_j-\xi_k,\eta>\neq 0$$

donc $a_1=a_2=...=a_N=0.$

Définition 1.2.40 *La transformation chaotique ou transformée S de* $\Phi\in(E)^*$ *est la fonction sur* E_C *définie par :*

$$S\Phi(\xi)=\ll\Phi,\phi_\xi\gg,\,\xi\in E_C$$

Lemme 1.2.41 *Soit $\Phi \in (E)^*$ donnée par le développement de Wiener-Itô :*

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, F_n > .$$

Alors :

$$S\Phi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} < F_n, \xi^{\otimes^n} > ; \, \xi \in E_C,$$

où la série converge absolument.

Preuve :
Par définition on a :

$$S\Phi(\xi) = \ll \Phi, \phi_\xi \gg = \sum_{n=0}^{\infty} n! < F_n, \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!} > = \sum_{n=0}^{\infty} < F_n, \xi^{\otimes^n} > .$$

De plus supposons : $\|\Phi\|_{-p} < \infty$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Big| < F_n, \xi^{\otimes^n} > \Big| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |F_n|_{-p} |\xi|_p^n \\ &\leq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} n! |F_n|_{-p}^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|_p^{2n}}{n!} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\Phi\|_{-p} \exp(\tfrac{|\xi|_p^2}{2}) < \infty. \end{aligned}$$

Donc la série converge absolument. Dès discussions précédentes on a prouvé :

Lemme 1.2.42 *Soit $\Phi \in (E)^*$. Si $\|\Phi\|_{-p} < \infty$ pour $p \in \mathbb{R}$, alors :*

$$|S\Phi(\xi)| \leq \|\Phi\|_{-p} \exp(\frac{|\xi|_p^2}{2}) ; \, \xi \in E_C.$$

Théorème 1.2.43 [32]
Soit $\xi, \eta \in E_C$ et $\Phi \in (E)^*$. Alors :

$$z \longmapsto S\Phi(z\xi + \eta) ; \, z \in \mathbb{C},$$

est entière.

Preuve :
Soient $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, F_n >$ on a : pour $p \geq 0$

$$\|\Phi\|_{-p}^2 < \infty.$$

D'après le lemme (1.2.41)on a :

$$\begin{aligned} S\Phi(z\xi+\eta) &= \sum_{n=0}^{\infty} < F_n, (z\xi+\eta)^{\otimes^n} > \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k < F_n, \xi^{\otimes^k} \otimes \eta^{\otimes^{(n-k)}} > \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} < F_{n+k}, \xi^{\otimes^k} \otimes \eta^{\otimes^n} >)z^k. \end{aligned}$$

Donc, il suffit uniquement de montrer que le rayon de convergence R de cette dernière série est infinie. On a :

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k\longrightarrow\infty} \Big| \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} < F_{n+k}, \xi^{\otimes^k} \otimes \eta^{\otimes^n} > \Big|^{\frac{1}{k}}.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} < F_{n+k}, \xi^{\otimes^k} \otimes \eta^{\otimes^n} > \Big| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!n!} |F_{n+k}|_{-p} |\xi|_p^k |\eta|_p^n \\ &\leq \tfrac{|\xi|_p^k}{k!} (\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)! |F_{(n+k)}|_{-p}^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{n=0}^{\infty} (n+k)! |\eta|_p^{2n})^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|\Phi\|_{-p} \tfrac{|\xi|_p^k}{k!} (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!n!} |\eta|_p^{(2n)})^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalitée suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!n!} t^n \leq (t+k)^k e^t$$

pour $t \geq 0$, $k \geq 0$, on trouve :

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} < F_{n+k}, \xi^{\otimes^n} \otimes \eta^{\otimes^n} > \Big| \leq |\Phi\|_{-p} \frac{|\xi|_p^k}{k!} (|\eta|_p^2 + k)^{\frac{k}{2}} \exp(\frac{|\eta|_p^2}{2}).$$

En considérant l'inégalité : $\frac{k^k}{k!} \leq e^k$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{R} &\leq |\xi|_p \limsup_{k\longrightarrow\infty} \{ (|\eta|_p^2 + k)^{\frac{k}{2}} \exp(\tfrac{|\eta|_p^2}{2}) \} \\ &\leq |\xi|_p \limsup_{k\longrightarrow\infty} \{ e^k (|\eta|_p^2 + k)^{\frac{k}{2}} \}^{\frac{1}{k}} \\ &\leq e|\xi|_p \limsup_{k\longrightarrow\infty} \{ \tfrac{(|\eta|_p^2+k)^{\frac{1}{2}}}{k} \} = 0, \end{aligned}$$

d'où le résultat.

1.2.6 Processus stochastique et mouvement Brownien

Dans la suite on rappelle les propriétés essentielles des processus stochastiques et particulièrement on s'intéresse aux propriétés du mouvement Brownien. Pour plus de d'étails voir ([17],[19]).

Définition 1.2.44 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé, et T un ensemble d'indices ordonnés, par exemple : $T = [0, \infty[$ ou $T \subset I\!R$.*
On appelle processus stochastique, une famille X de variables aléatoires indexée par T, définie sur Ω et à valeurs dans $I\!R^d$, $d \geq 1$:

$$X = \{X_t, t \in T\}.$$

Pour tout $t \in T$ fixé, on a une variable aléatoire $w \longmapsto X_t(w) = X(t, w)\,, w \in \Omega$. D'autre part pour $w \in \Omega$ fixé, la trajectoire de X est la fonction $t \longmapsto X_t(w)$. Alors, on peut identifier tout $w \in \Omega$ fixé à sa trajectoire $t \longmapsto X_t(w) = w(t)$ définie sur T à valeurs dans $I\!R^d$. Ainsi, on peut considérer Ω comme un sous ensemble de $\tilde{\Omega}$, avec :

$$\tilde{\Omega} = (I\!R^d)^T$$

qui est l'ensemble des fonctions définies sur T à valeurs dans $I\!R^d$. Par suite le processus X est considéré comme une variable aléatoire $X : \Omega \longrightarrow \tilde{\Omega}$, et dont la distribution est la mesure de probabilité sur l'espace probabilisable $\left(\tilde{\Omega}, \mathcal{B}_c(\tilde{\Omega})\right)$, où $\mathcal{B}_c(\tilde{\Omega})$ est la tribu cylindrique de $\tilde{\Omega}$. Cette tribu est engendrée par l'ensemble $\mathcal{C}$ de tous les ensembles cylindriques de la forme :

$$C_{t_1,...,t_n} = \left\{x \in \tilde{\Omega} / x(t_1) \in B_1, ..., x(t_n) \in B_n\right\},\ n \in I\!N,\ t_1, t_2, ..., t_n \in T,$$

où $B_1, ..., B_n$ sont des boréliens de $I\!R^d$.
La tribu cylindrique coincide avec la tribu borélienne de $\tilde{\Omega}$, quand $\tilde{\Omega}$ est munie de la topologie produit(voir [14]).

Un exemple fondamental de processus stochastique est le mouvement Brownien :

Définition 1.2.45 *Un processus stochastique $\{B_t, t \geq 0\}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ est appelé mouvement Brownien ou processus de Wiener s'il vérifie :*
1) $B(0, w) = B_0(w) = 0$, pour presque tout $w \in \Omega$.
2) $\{B(t, .), t \geq 0\}$ est un système Gaussien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ c'est à dire que : pour tout $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$, la variable aléatoire $X = (B_{t_1}, ..., B_{t_n})$ a une distribution Gaussienne. En particulier, B_t est une variable aléatoire Gaussienne pour $t \geq 0$.
3) $\forall\, t \geq 0, \forall h \in I\!R$ tel que $t + h > 0$, la variable aléatoire $w \longmapsto [B(t + h, w) - B(t, w)]$ est Gaussienne d'espérance nulle et de variance $\sigma^2 = |h|$.

Conséquence 1.2.46
1) L'espérance de B_tB_s vérifie : $E(B_tB_s) = t \wedge s = \min(t,s)$.
2) Pour presque tout $w \in \Omega$, la fonction $t \longmapsto B(t,w)$ est continue.
3) Presque sûrement les trajectoires du mouvement Brownien ne sont différentiables en aucun point (voir [14]).

Exemple 1.2.47 *Soit le triplet de Gelfand :*

$$S(I\!R) \hookrightarrow L^2(I\!R, dt) \hookrightarrow S'(I\!R),$$

pour $t \geq 0$ et $x \in S'(I\!R)$ posons :

$$\begin{cases} B(t,x) &= \langle x, 1_{[0,t[} \rangle \text{ si } t > 0 \\ \\ B(0,x) &= 0 \end{cases}$$

où $1_{[0,t[} \in L^2(I\!R, dt)$ est la fonction caractérisique de l'intervalle $[0,t[$, et $\langle , \rangle$ est la forme bilinéaire de dualité définie sur $S(I\!R) \times S'(I\!R)$ qui prolonge le produit scalaire dans $L^2(I\!R, dt)$.
Alors, le processus $\{B(t,x)/\, t \geq 0\,,\, x \in S'(I\!R)\}$ est un mouvement Brownien.
Si une fonction $f \in L^2(I\!R, dt) \subset S'(I\!R)$, alors on a :

$$B(t,f) = \int_0^t f(s)ds.$$

Remarque 1.2.48 *Le bruit blanc $\dot{B}(t,f)$ est la dérivée au sens des distributions du mouvement Brownien :*

$$\dot{B}(t,f) = \frac{\partial B}{\partial t}(t,f).$$

Chapitre 2

Opérateur de bruit blanc sur les espaces C-K-S

2.1 Espace Gaussien complexe

Soit E un espace nucléaire complet réel, H un espace de Hilbert telle que l'injection de E dans H soit continue et à image dense. On définit le triplet de Gelfand :

$$E \subset H \simeq H^* \subset E^*$$

où H est identifié à son dual H^* par le théorème de Riesz. En particulier on s'intéresse par la suite au triplet de Gelfand :

$$E \equiv S(\mathbb{R}) \subset H \equiv L^2(\mathbb{R}) \subset E^* \equiv S'(\mathbb{R}). \tag{2.1}$$

où $S(\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions à décroissance rapide et $S'(\mathbb{R})$ est son dual topologique, c'est à dire l'espace des distributions tempérées. On note par $\langle .,. \rangle$ la forme bilineaire canonique sur $E^* \times E$ et par $|.|_0$ la norme de H.

Proposition 2.1.1
pour $\sigma \geq 0$,

$$C_\sigma(\xi) = \exp(-\frac{\sigma^2 |\xi|_0^2}{2}) \, , \, \xi \in E$$

est une fonction caractéristique sur $S(\mathbb{R})$.

Preuve :
Il est facile de voir que C_σ est continue sur $S(\mathbb{R})$ et que $C_\sigma(0) = 1$.
Montrons que C_σ est définie positive. Soient alors $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}$ et $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n \in E$ et soit V le sous espace de $S(\mathbb{R})$ engendré par $\xi_1, ..., \xi_n$ avec la norme $|.|_0$. Soit μ_V la mesure Gaussienne standard sur V (l'existance de μ_V est assurée par le théorème de Bochner). Alors pour $\xi \in V$ on a:

$$\int_V \exp(i\langle \xi, x \rangle) d\mu_V(x) = \exp(-\frac{\sigma^2 |\xi|_0^2}{2}).$$

Donc,

$$\sum_{j,k=1}^{n} z_j C(\xi_j - \xi_k)\bar{z}_k = \sum_{j,k=1}^{n} \int_V z_j \exp(i\langle \xi_j - \xi_k, x\rangle)\bar{z}_k d\mu_V(x)$$
$$= \int_V \Big| \sum_{j=1}^{n} z_j \exp(i\langle \xi_j, \xi_k\rangle)\Big|^2 d\mu_V(x) \geq 0.$$

D'après le théorème de Bochner Minlos, il existe une unique mesure de probabilité μ sur E^* vérifiant

$$C_\sigma(\xi) = \int_{E^*} e^{i\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)$$

et La mesure de probabilité μ de fonction caractéristique C_σ est appelée mesure Gaussienne de variance σ^2.

Soit μ' la mesure Gaussienne standard sur E^* de variance $\sigma^2 = \frac{1}{2}$ uniquement determinée par la fonction caractéristique :

$$e^{-\frac{|\xi|_0^2}{4}} = \int_{E^*} e^{i\langle \xi, x\rangle} \mu'(dx)\,,\ \xi \in E.$$

Si $E_{\mathbb{C}}$ est le complexifié de E c'est à dire : $E_{\mathbb{C}} = E + iE$ alors on note la forme bilineaire sur $E^*_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}}$ par :

$$|\xi|_0^2 =< \bar{\xi}, \xi >\,;\ \xi \in H_{\mathbb{C}}.$$

Compte tenu de l'isomorphisme topologique :

$$E^*_{\mathbb{C}} \cong E^* \times E^*$$

on définit une mesure de probabilité $\nu = \mu' \times \mu'$ sur $E^*_{\mathbb{C}}$ par :

$$\nu(dz) = \mu'(dx)\mu'(dy)\,;\ z = x + iy \in E^*_{\mathbb{C}}.$$

Définition 2.1.2 *L'espace de probabilité $(E^*_{\mathbb{C}}, \nu)$ est dit espace Gaussien complexe.*

Remarque 2.1.3 *Soit H un espace de Hilbert réel avec norme $|.|$. Soit l'espace de Fock symétrique sur H :*

$$\Gamma(H_C) = \{\phi = (f_n)_{n=0}^{\infty}\,;\ f_n \in H_{\mathbb{C}}^{\odot^n}\,;\ \sum_{n=o}^{\infty} n!|f_n|^2 < \infty\},$$

munie de la norme Hilbertienne : $\|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!|f_n|^2$.

- Pour $\xi \in E_C$, on pose

$$\phi_\xi = (1, \xi, \frac{\xi^{\otimes 2}}{2!}, ..., \frac{\xi^{\otimes n}}{n!}, ...),$$

alors :

$$\|\phi_\xi\|^2_{\Gamma(H)} = \sum_{n=0}^{\infty} n! \Big|\frac{\xi^{\otimes^n}}{n!}\Big|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\xi|^{2n}}{n!} = e^{|\xi|^2} < \infty,$$

donc $\phi_\xi \in \Gamma(H_C)$. *L'isomorphisme de Wiener-Itô-Ségal est uniquement déterminé par la correspondance :*

$$\Psi_\xi(x) \equiv \exp(\sqrt{2}(x,\xi) - \frac{\langle \xi, \xi \rangle}{2}) \longleftrightarrow \phi_\xi \equiv (1, \xi, \frac{\xi^{\otimes^2}}{2!}, ..., \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!}, ...), \xi \in E_C. \qquad (2.2)$$

Où ϕ_ξ *est le vecteur exponentiel ou état cohérent.*

Notons que si $\xi, \eta \in E_C$ alors on a :

$$\ll \phi_\xi, \phi_\eta \gg_{\Gamma(H_C)} = e^{<\xi,\eta>}$$

En effet :

$$\ll \phi_\xi, \phi_\eta \gg_{\Gamma(H_C)} = \sum_{n=o}^{\infty} n! < \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!}, \frac{\eta^{\otimes^n}}{n!} > = \sum_{n=0}^{\infty} (< \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!}, \frac{\eta^{\otimes^n}}{n!} >) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{< \xi, \eta >^n}{n!}) = e^{<\xi,\eta>}$$

2.2 Introduction aux espaces C-K-S

Soit H un espace de Hilbert et $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de nombres positifs, on pose :

$$\Gamma_\alpha(H) = \Big\{ \phi = (f_n)_{n=0}^{\infty} \,;\, f_n \in H^{\odot^n} \,;\, \|\phi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! \alpha(n) |f_n|^2 < \infty \Big\}.$$

Alors $\Gamma_\alpha(H)$ est un espace de Hilbert.
Tout le long de ce travail on suppose que la suite $\alpha = \Big\{\alpha_n\Big\}_{n=0}^{\infty}$ satisfait les conditions suivantes :

(A_1) $\quad \alpha(0) = 1 \quad$ et $\quad \inf_n \alpha(n) > 0.$

(A_2) $\quad G_\alpha(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(n) t^n}{n!}$, a un rayon de convergence infini.

(A_3) $\quad \tilde{G_\alpha}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{t^n n^{2n}}{n! \alpha(n)} \inf_{s>0} (\frac{G_\alpha(s)}{s^n}) \Big)$, a un rayon de convergence positif.

(A_4) $\quad \exists\, C_1 > 0$ tel que $\alpha(n)\alpha(m) \leq C_1^{n+m} \alpha(n+m) \,;\, n, m \in I\!N.$

(A_5) $\quad \exists\, C_2 > 0$ tel que $\alpha(n+m) \leq C_2^{n+m} \alpha(n)\alpha(m) \,;\, n, m \in I\!N.$

(A_6) $\quad \{\alpha(n)\}$ est croissante.

Remarque 2.2.1 *Les conditions* (A_1), (A_3) *sont utilisées pour la caractérisation de la Transformée S,(voir [9]), et* (A_4), (A_6) *pour la théorie des opérateurs de bruit blanc,(voir[7]).*

Soit l'opérateur :

$$A = 1 + t^2 - \frac{d^2}{dt^2}.$$

Pour $n \in I\!N$ soit $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ et $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{(\pi)}}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)$, respectivement le niéme polynôme d'Hermite et la niéme fonction d'Hermite associée. Alors on sait que $\left\{e_n, n \geq 0\right\}$ est une base orthonormée de $L^2(I\!R)$, et on a les propriétés suivantes:

Proposition 2.2.2 [32]
(1) $\forall\, n \in I\!N$, $Ae_n = (2n+2)e_n$, *par suite le spectre de* A *est* $Sp(A) = \left\{2n+2, n \geq 0\right\}$.
(2) $\forall\, p > \frac{1}{2}$, A^{-p} *est un opérateur de Hilbert-Schmidt de* $L^2(I\!R)$.

Preuve :
La première relation s'obtient facilement par un calcul directe. Montrons la deuxième relation :

$\|A^{-p}\|^2_{H.S} = \sum_{n=0}^{\infty} |A^{-p}e_n|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)^{2p}} < \infty$, pour tout $p > \frac{1}{2}$, et donc A^{-p} est un opérateur de Hilbert-Schmidt.

Pour tout $f \in L^2(I\!R, dt)$, et $p \geq 0$, soit :

$$|f|_p^2 = |A^p f|_0^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+2)^{2p} (f, e_n)^2$$

où $(,)$ et $|.|_0$ sont respectivement le produit scalaire et la norme dans $L^2(I\!R, dt)$. Soit $S_p(I\!R) = \left\{f \in L^2(I\!R, dt) / |f|_p < \infty\right\}$, alors $S_p(I\!R)$ est un espace de Hilbert. Posons :

$$S(I\!R) = \cap_{p \geq 0} S_p(I\!R)$$

alors $S(I\!R)$ muni de la topologie limite projective des espaces de Hilbert $S_p(I\!R)$ est un espace de Fréchet nucléaire. L'espace $S'(I\!R)$ dual de $S(I\!R)$ s'écrit alors :

$$S'(I\!R) = \cup_{p \geq 0} S_{-p}(I\!R)$$

où $S_{-p}(I\!R)$ est le dual topologique de $S_p(I\!R)$, et dont la norme est notée $|.|_{-p}$. Pour tout $f \in S_{-p}(I\!R)$ on a :

$$|f|_{-p} = |A^{-p} f|_0,\ p \geq 0$$

$S'(I\!R)$ est muni de la topologie limite inductive des espaces de Hilberts $S_{-p}(I\!R)$. On obtient alors le triplet de Gelfand suivant :

$$S(I\!R) \hookrightarrow L^2(I\!R, dt) \simeq (L^2(I\!R, dt))' \hookrightarrow S'(I\!R) \tag{2.3}$$

Étant donnée une suite de nombres positifs $\alpha = \left\{\alpha(n)\right\}_{n=0}^{\infty}$ qui satisfait les conditions : $(A_1) - (A_2) - (A_3)$ posons :

$$\Gamma_\alpha(E) = \cap_{p \geq 0} \Gamma_\alpha(E_p) = \lim_{p \to \infty} proj \Gamma_\alpha(E_p)\,,\ pour\ E = S(I\!R). \tag{2.4}$$

Proposition 2.2.3
Muni de la famille de normes :

$$\|\phi\|_{p,+}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\alpha(n)|f_n|_p^2\,,\ \phi = (f_n)\ \in\ \Gamma_\alpha(E),\ p \geq 0.$$

$\Gamma_\alpha(E)$ *est un espace nucléaire.*

Preuve :

On a les injections suivantes :

$$\Gamma_\alpha(E) \hookrightarrow \Gamma_\alpha(E_p) \hookrightarrow \Gamma(H_C) \simeq (\Gamma(H_C))^* \hookrightarrow (\Gamma_\alpha(E_p))^* \hookrightarrow (\Gamma_\alpha(E))^*$$

Pour montrer que $\Gamma_\alpha(E)$ est un espace nucléaire il suffit donc de montrer que :

$$\forall\, p \geq 0, \exists\, q > p$$

tel que l'injection

$$i_{qp} : \Gamma_\alpha(E_q) \longrightarrow \Gamma_\alpha(E_p)$$

est de type Hilbert-Schmidt. Posons :

$$\xi_n = \frac{1}{(2n+2)^q\sqrt{\alpha(n)n!}} e_n.$$

$(\xi_n)_n$ est une base orthonormée de $\Gamma_\alpha(E_q)$ en effet :

$$\begin{aligned}
\ll \xi_n, \xi_m \gg_{\Gamma_\alpha(E_q)} &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\alpha(n)(A^q\xi_n, A^q\xi_m)_0 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\alpha(n)(2n+2)^q(2m+2)^q}{\sqrt{n!\alpha(n)m!\alpha(m)}(2n+2)^q(2m+2)^q}(e_n, e_m)_0 \\
&= \delta_{nm}.
\end{aligned}$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} n!\alpha(n)|\xi_n|_p^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n!\alpha(n)\left|A^p\xi_n\right|_0^2 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\alpha(n)(2n+2)^{2p}}{(2n+2)^{2q}n!\alpha(n)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)^{2(q-p)}} < \infty
\end{aligned}$$

si et seulement si $q - p > \frac{1}{2}$ c'est à dire : $q > p + \frac{1}{2}$. Notons par $\Big(\Gamma_\alpha(E)\Big)^*$ le dual fort de $\Gamma_\alpha(E)$. Alors :

$$\Big(\Gamma_\alpha(E)\Big)^* = \bigcup_{p\geq 0} \Gamma_{\alpha^{-1}}(E_{-p}) \cong \lim_{p\to\infty} ind\Gamma_{\alpha^{-1}}(E_{-p}). \tag{2.5}$$

$\Big(\Gamma_\alpha(E)\Big)^*$ est muni de la famille de normes :

$$\|\Phi\|^2_{-p,\alpha^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!|F_n|^2_{-p}}{\alpha(n)} \; ; \; \Phi = (F_n) \in \Big(\Gamma_\alpha(E)\Big)^*.$$

On note dans la suite :

$$W = \Gamma_\alpha(E) \; et \; (E) = \Gamma(E)$$

est donc d'après (2.4) et (2.5) on obtient le triplet de Gelfand :

$$W \subset \Gamma(H_C) \subset W^* \tag{2.6}$$

ce triplet est appelé triplet de Cochrans-Kuo-Sengupta où triplet CKS ([9]), associé à la suite des nombres $\Big\{\alpha(n)\Big\}_{n\geq 0}$. La forme $\mathbb{C}$-bilineaire canonique sur $W^* \times W$ est notée par $\ll .,. \gg$. Pour $\Phi = (F_n) \in W^*$ et $\psi = (f_n) \in W$ on a :

$$\ll \Phi, \psi \gg = \sum_{n=0}^{\infty} n! < F_n, f_n >$$

il en résulte que :

$$\Big| \ll \Phi, \psi \gg \Big| \leq \|\Phi\|_{-p,-} \|\psi\|_{p,+}$$

où

$$\|\Phi\|^2_{-p,-} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!|F_n|^2_{-p}}{\alpha(n)} \; ; \; \Phi = (F_n) \in W^*.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \Big| \ll \Phi, \psi \gg \Big| = \Big| \sum_{n=0}^{\infty} n! < F_n, f_n > \Big| \; &\leq \; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\sqrt{\alpha(n)}| < F_n, f_n > |}{\sqrt{\alpha(n)}} \\ &\leq \; \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!|F_n|^2_{-p}}{\alpha(n)} \Big)^{\frac{1}{2}} \times \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!|f_n|^2_p}{\alpha(n)} \Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(d'après l'inégalité de Hölder)

Dans la suite on va donner deux théorèmes de caractérisation des fonctions tests et généralisées (voir [9]). Soit $\phi \in (L^2)$ donnée par la représentation de Wiener-Itô, en identifiant (L^2) avec son dual(Riesz) on obtient les injections continues :

$$W \subset \Gamma_\alpha(E_p) \subset (L^2) \subset (\Gamma_\alpha(E_p))^* \subset W^* \; ; \; p \geq 0.$$

Proposition 2.2.4
Pour $\xi \in E_{\mathbb{C}}$; $p \geq 0$ on a :

$$\|\phi_\xi\|^2_{p,\alpha} = G_\alpha(|\xi|^2_p),$$

où G_α est la fonction exponentielle engendrée par la suite $\{\alpha(n)\}_{n\geq 0}$ c'est à dire :

$$G_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n!} z^n \; ; \; z \in \mathbb{C}.$$

Théorème 2.2.5 [9]
On suppose que la suite $\{\alpha(n)\}_{n\geq 0}$ *satisfait les conditions* (A_1) *et* (A_2).
Soit $\Phi \in W^*$. *Alors la transformée* S *de* Φ, $F = S\Phi$, *satisfait les conditions suivantes :*
1) Pour ξ , $\eta \in E_{\mathbb{C}}$ *la fonction* $F(z\xi + \eta)$ *est une fonction entière en* $z \in \mathbb{C}$.
2) Il existe des constantes $K, a, p \geq 0$ *tel que :*

$$|F(\xi)| \leq KG_\alpha(a|\xi|_p^2)^{\frac{1}{2}} \, , \, \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

Réciproquement supposons que la condition (A_3) *est vérifiée soit* F *la fonction sur* $E_{\mathbb{C}}$ *qui satisfait les conditions (1) et (2) ci dessus. Alors il existe une unique fonction* $\Phi \in W^*$ *telle que :* $F = S\Phi$.

Théorème 2.2.6 [9]
On suppose que la suite $\{\alpha(n)\}_{n\geq 0}$ *satisfait la condition* (A_1).
Soit $\phi \in W$. *Alors la transformée* S *de* ϕ, $F = S\phi$, *satisfait les conditions suivantes :*
1) Pour tout $\xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}$ *la fonction* $F(z\xi + \eta)$ *est une fonction entière en* $z \in \mathbb{C}$.
2) Pour tout a *et* $p \geq 0$ *il existe* $K \geq 0$ *telle que :*

$$|F(\xi)| \leq KG_{\frac{1}{\alpha}}(a|\xi|_{-p}^2)^{\frac{1}{2}} \; ; \, \xi \in E_{\mathbb{C}}.$$

Réciproquement supposons la condition (A_3) *vérifiée et soit* F *la fonction sur* $E_{\mathbb{C}}$ *qui satisfait les conditions (1) et (2) ci dessus. Alors il existe une unique fonction* $\phi \in W$ *telle que :* $F = S\phi$.

Exemple 2.2.7 *On donne trois exemples qui correspondent respectivement aux espaces de Hida-Kubo-Takenaka(voir [25]), Kondratiev-Streit(voir [24]) et les espaces CKS(voir [9]).*
1) Dans le cas particulier où la suite $\Big\{\alpha(n)\Big\}_{n\geq 0}$ *est donnée par :* $\alpha(n) \equiv 1$, *alors le triplet (2.6) donne le triplet* $(E) \subset (L^2) \subset (E)^*$ *qui constitue l'espace de Hida-Kubo-Takenaka.*
2) Dans le cas où la suite $\Big\{\alpha(n)\Big\}_{n\geq 0}$ *est donnée par :* $\alpha(n) = (n!)^\beta \, , \beta \in \, [0, 1]$. *Alors le triplet (2.6) donne le triplet* $(E)_\beta \subset (L^2) \subset (E)^*_\beta$, *qui constitue l'espace de Kondratiev-Streit.*
3) (Les nombres de Bell) : Pour chaque entier $k \geq 2$, *on considère la k-ieme fonction exponentielle itérée :* $\exp_k(z) = \exp(\exp(...(\exp(z))))$ *qui est une fonction entière, et a le développement en série entière :*

$$\exp_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_k(n)}{n!} z^n.$$

Les nombres de Bell d'ordre k $\Big\{b_k(n)\Big\}_{n\geq 0}$ *sont définis par :*

$$b_k(n) = \frac{B_k(n)}{\exp_k(0)}, n \geq 0.$$

2.2.1 Espaces C-K-S définis sur des espaces complexes Gaussiens

Rappelons que :

$$W \subset \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset W^*$$

est un triplet de Gelfand. Alors on peut obtenir aussi le triplet suivant :

$$W \otimes W \subset \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \otimes \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \subset (W \otimes W)^*.$$

D'autre part on sait que :

$$E^*_{\mathbb{C}} \simeq E^* \times E^*,$$

c'est à dire :

$$(\phi \otimes \psi)(x + iy) = \phi(x)\psi(y)\,;\; x, y \in E^*,\ \phi, \psi \in L^2(E^*, \mu').$$

On aura alors les isomorphismes suivants :

$$\Gamma(H_{\mathbb{C}}) \otimes \Gamma(H_{\mathbb{C}}) \cong L^2(E^*, \mu') \otimes L^2(E^*, \mu') \cong L^2(E^*_{\mathbb{C}}, \nu).$$

Proposition 2.2.8
Combinant les résultats précédents on obtient le triplet de Gelfand suivant :

$$D \subset L^2(E^*_{\mathbb{C}}, \nu) \subset D^*,$$

où D est regardé comme l'espace des fonctions continues sur $E^*_{\mathbb{C}}$.

Pour plus de d'étails sur les propriétés des fonctions de D voir([30],[37].)

Remarque 2.2.9 *En générale un opérateur continu de W vers W^* est dit opérateur du bruit blanc et il est intérréssant de caractériser l'ensemble de ces opérateur noté $\mathcal{L}(W, W^*)$.*
Notons que $\mathcal{L}(W, W)$ et $\mathcal{L}(W, \Gamma(H_C))$ sont deux sous espaces de $\mathcal{L}(W, W^*)$.

2.2.2 Opérateur différentiel de Hida

On va dans la suite introduire un opérateur fondamental dans le calcul de bruit blanc.

Théorème 2.2.10 ([32])*(Version continue)*
Pour chaque $\phi \in W$ il existe une unique fonction continue $\tilde{\phi}$ sur E^* tel que : $\phi(x) = \tilde{\phi}(x)$ pour presque tout $x \in E^*$.
De plus $\tilde{\phi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n >$ et cette série converge absolument $\forall x \in E^*$.

Définition 2.2.11 *Soit $y \in E^*$, on appelle opérateur de dérivation l'opérateur D_y défini par :*

$$D_y \phi(x) = \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\phi(x + \epsilon y) - \phi(x)}{\epsilon}\,;\; \forall x \in E^*.$$

Théorème 2.2.12 ([32])
Soit $\phi \in W$ donnée par le développement de Wiener-Itô :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n > ; \; f_n \in E_C^{\odot^n}, x \in E^*.$$

Alors pour $y \in E^*$ la série :

$$D_y\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n <: x^{\otimes^{(n-1)}} :, < y, f_n >>= \sum_{n=1}^{\infty} n <: x^{\otimes^{(n-1)}} :, y \odot_1 f_n >$$

converge absolument et dans (E).

Définition 2.2.13 *On appelle opérateur différentiel de Hida tout opérateur qui s'écrit sous la forme :*

$$\partial_t = D_{\delta_t}$$

où $\delta_t \in S'(I\!R)$ est la distribution de Dirac en $t \in I\!R$.

Proposition 2.2.14
Pour $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ et ϕ_ξ le vecteur exponentiel défini dans (1.4) on a :

$$D_y\phi_\xi =< y, \xi > \phi_\xi, y \in E^*$$

Preuve :
Le vecteur exponentiel ϕ_ξ est par définition donné par :

$$\phi_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, \frac{\xi^{\otimes^n}}{n!} >$$

D'après le théorème précédent on a :

$$\begin{aligned} D_y\phi_\xi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n <: x^{\otimes^{(n-1)}} :, y \odot_1 \left(\frac{\xi^{\otimes^n}}{n!}\right) > \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} < y, \xi ><: x^{\otimes^{(n-1)}} :, \frac{\xi^{\otimes^{(n-1)}}}{(n-1)!} > \\ &= < y, \xi > \phi_\xi(x). \end{aligned}$$

En langage d'espace de Fock (voir [32]) :
∂_t est appelé opérateur d'annihilation et $\partial_t^* \in \mathcal{L}(W^*, W^*)$ est appelé opérateur de création.

Théorème 2.2.15 [32]
Soit $\phi \in W$ donnée par le développement de Wiener-Itô :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, f_n > .$$

Alors pour $y_1, ..., y_m \in E^*$ *on a :*

$$D_{y_1}...D_{y_m}\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, (y_1 \odot ... \odot y_m) \odot_m f_{m+n} > .$$

Preuve :
La preuve se fait par recurrence sur m ; en effet :

$$D_{y_1}\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, y_1 \odot_1 f_{n+1} >,$$

le résultat est donc vrai pour $m = 1$.
Supposons que :

$$D_{y_1}...D_{y_m}\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, (y_1 \odot ... \odot y_m) \odot_m f_{m+n} >,$$

et montrons que

$$D_{y_1}...D_{y_{m+1}}\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m+1)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, (y_1 \odot ... \odot y_{m+1}) \odot_{m+1} f_{m+n+1} > .$$

Or

$$\begin{aligned}
D_{y_1}...D_{y_{m+1}}\phi(x) &= D_{y_1}(D_{y_2}...D_{y_{m+1}}\phi(x)) \\
&= D_{y_1}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, (y_2 \odot ... \odot y_{m+1}) \odot_{m+1} f_{m+n} > \Big) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{(n-1)!} <: x^{\otimes^{n-1}} :, (y_1 \odot y_2 ... \odot y_{m+1}) \odot_{m+1} f_{m+n} > \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m+1)!}{n!} <: x^{\otimes^n} :, (y_1 \odot ... \odot y_{m+1}) \odot_{m+1} f_{n+m+1} > .
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.2.3 Opérateurs intégraux à noyau

On a introduit l'opérateur différentiel ∂_t. Maintenant on va développer dans ce paragraphe une théorie générale sur les opérateurs qui s'expriment en fonction des opérateurs ∂_t et ∂_t^*.

Lemme 2.2.16 [32] *Soit* $\phi, \psi \in W$, *on pose*

$$\eta_{\phi,\psi}(s_1, ..., s_l, t_1, ..., t_m) = \ll \partial_{t_1}...\partial_{t_m}\phi, \partial_{s_1}...\partial_{s_l}\psi \gg .$$

On a alors $\forall\, p > 0 \,\exists\, c > 0$ *telle que :*

$$|\eta_{\phi,\psi}|_p \leq c\|\phi\|_p\|\psi\|_p.$$

Théorème 2.2.17 [32]
Soit $k \in \left(E_C{}^{\otimes(l+m)}\right)^*$, *il existe un opérateur linéaire continu* $\Xi_{l,m}(k) \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *tel que :*

$$\ll \Xi_{l,m}(k)\phi, \psi \gg = < k, \eta_{\phi\psi} > ; \ \phi, \ \psi \in W$$

où

$$\eta_{\phi\psi}(s_1, ..., s_l, t_1, ..., t_m) = \ll \partial_{t_1}, ..., \partial_{t_m}\phi, \partial_{s_1}, ..., \partial_{s_l}\psi \gg .$$

De plus pour $p \geq 0$ *tel que* $|k|_{-p} < \infty$ *on obtient :*

$$\|\Xi_{l,m}(k)\phi\|_{-p} \leq c|k|_{-p}\|\phi\|_p, \ c \geq 0.$$

Définition 2.2.18 *Un opérateur intégral à noyau avec une distribution* $k_{l,m} \in \left(E_C{}^{\otimes(l+m)}\right)^*$ *est un opérateur de la forme :*

$$\Xi_{l,m}(k_{l,m}) = \int_{I\!R^{l+m}} k_{l,m}(s_1, ..., s_l, t_1, ..., t_m)\partial^*_{s_1}...\partial^*_{s_l}\partial_{t_1}...\partial_{t_m} ds_1...ds_l dt_1...dt_m.$$

Pour plus de d'étails(voir [32] chapitre 4).

Proposition 2.2.19
Soit $\phi = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in W$. *Alors pour* $k \in \left(E_C{}^{\otimes(l+m)}\right)^*$ *on a :*

$$\Xi_{l,m}(k)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!}\langle : x^{\otimes(n+l)} :, k \otimes_m f_{n+m}\rangle.$$

En particulier pour tout $\xi \in E_C$ *on a :*

$$\Xi_{l,m}(k)\phi_\xi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle : x^{\otimes(l+n)} :, (k \otimes_m \xi^{\otimes^m}) \otimes \xi^{\otimes^n}\rangle.$$

Pour la démonstration voir ([32] page 35).

Théorème 2.2.20 [7]
Un opérateur intégrale à noyau $\Xi_{l,m}(k_{l,m}) \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *pour* $k_{l,m} \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes(l+m)})^*$. *De plus chaque* $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *admet un developpement en série :*

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}(k_{l,m})$$

où la série converge dans $\mathcal{L}(W, W^*)$.
Notons que $\mathcal{L}(W, W^*)$ *contient tous les opérateurs bornés sur* $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$.

Proposition 2.2.21 [8], [32]
Soit $k \in \left(E_C^{\otimes(l+m)}\right)^*$.
1) $\Xi_{l,m}(k) \in \mathcal{L}(W, W)$ *si et seulement si* $k \in E_C^{\otimes^l} \bigotimes (E_C^{\otimes^m})^*$.
2) $\Xi_{l,m}(k) \in \mathcal{L}(W, \Gamma(H_C))$ *si et seulement si* $k \in H_C^{\otimes^l} \bigotimes (E_C^{\otimes^m})^*$.

Preuve :
Avant de donner la preuve de cette proposition on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.2.22 [32] *Soit* $k \in \left(E_C^{\otimes(l+m)}\right)^*$. *Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*
i) $k \in \left(E_C^{\otimes^l}\right) \bigotimes \left(E_C^{\otimes^m}\right)^*$.
ii) Pour $p \geq 0$*, il existe* $c \geq 0$ *et* $q \geq 0$ *telle que :*

$$\Big| < k, g \otimes f > \Big| \leq c|g|_{-p}|f|_{p+q},$$

pour $g \in E_C^{\otimes^l}$ *et* $f \in E_C^{\otimes^m}$.

Supposons maintenant que : $k \in \left(E_C^{\otimes^l}\right) \bigotimes \left(E_C^{\otimes^m}\right)^*$ et montrons que $\Xi_{l,m}(k) \in \mathcal{L}(W, W)$. Soit alors $\phi = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in W$. On sait d'après la proposition(2.2.19) que :

$$\Xi_{l,m}(k)\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} \langle : x^{\otimes(n+l)} :, k \otimes_m f_{n+m} \rangle.$$

Par conséquent on a :

$$\Big\|\Xi_{l,m}(k)\phi\Big\|_p^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (l+n)! \Big(\frac{(n+m)!}{n!}\Big)^2 \Big|k \otimes_m f_{n+m}\Big|_p^2 \leq c\|\phi\|_{p+q}^2.$$

Réciproquement si $\Xi_{l,m}(k)$ est un opérateur continu sur W. Alors pour $p \geq 0$ il existe $c \geq 0$ et $q \geq 0$ telle que :

$$\|\Xi_{l,m}(k)\phi\|_p \leq c\|\phi\|_{p+q} \,;\, \phi \in W.$$

Maintenant on considère

$$\phi(x) = \langle : x^{\otimes^m} :, f \rangle \; et \; \psi(x) = \langle : x^{\otimes^l} :, g \rangle \,;\, f \in {E_C}^{\otimes^m} \,;\, g \in {E_C}^{\otimes^l}.$$

Par définition on a :

$$\ll \Xi_{l,m}(k)\phi, \psi \gg = l!m! \langle k, g \otimes f \rangle$$

Par conséquent on a :

$$| < k, g \otimes f > | \leq c|g|_{-p}|f|_{p+q}.$$

D'après le lemme précédent on déduit que :

$$k \in \left(E_C^{\otimes^l}\right) \bigotimes \left(E_C^{\otimes^m}\right)^*.$$

2.2.4 Symbole des opérateurs

Comme les vecteurs exponentiels $\left\{\phi_\xi\,;\,\xi\in E_C\right\}$ constituent un sous espace dense de W. on a la définition suivante :

Définition 2.2.23 *On appelle symbole de $\Xi\in\mathcal{L}(W,W^*)$ la fonction sur $E_C\times E_C$ définie par :*

$$\hat{\Xi}(\xi,\eta)=\ll \Xi\phi_\xi,\phi_\eta\gg\,;\,\xi,\eta\in E_C.$$

De plus on a :

$$\ll \Xi\phi_\xi,\phi_\eta\gg=\ll \phi_\xi,\Xi^*\phi_\eta\gg$$

on obtient alors :

$$\hat{\Xi}(\xi,\eta)=S(\Xi\phi_\xi)(\eta)=S(\Xi^*\phi_\eta)(\xi).$$

En particulier le symbole de l'opérateur intégrale à noyau est donné par :

$$\hat{\Xi}_{l,m}(\xi,\eta)=\ll \Xi_{l,m}(k)\phi_\xi,\phi_\eta\gg=<k,\eta^{\otimes^l}\otimes\xi^{\otimes^m}>e^{<\xi,\eta>}\,;\,\xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}.$$

En effet
On sait d'après la proposition (2.2.19) que :

$$\begin{aligned}
\Xi_{l,m}\phi_\xi(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}<:x^{\otimes^{(l+n)}}:,(k\otimes_m\xi^{\otimes^m})\otimes\xi^{\otimes^n}> \\
&= \sum_{n=l}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}<:x^{\otimes^n}:,(k\otimes_m\xi^{\otimes^m})\otimes\xi^{\otimes^{(n-l)}}>.
\end{aligned}$$

D'autre part :

$$\phi_\eta(x)=\sum_{n=0}^{\infty}<:x^{\otimes^n}:,\frac{\eta^{\otimes^n}}{n!}>,$$

par suite :

$$\begin{aligned}
\hat{\Xi}_{l,m}(\xi,\eta) &= \ll \Xi_{l,m}(k)\phi_\xi,\phi_\eta\gg \\
&= \sum_{n=l}^{\infty}n!\frac{1}{n!}\frac{1}{(n-l)!}<(k\otimes_m\xi^{\otimes^m})\otimes\xi^{\otimes^{(n-l)}},\eta^{\otimes^n}> \\
&= \sum_{n=l}^{\infty}\frac{1}{(n-l)!}<k\otimes_m\xi^{\otimes^m},\eta^{\otimes^l}><\xi,\eta>^{n-l} \\
&= <k,\eta^{\otimes^l}\otimes\xi^{\otimes^m}>e^{<\xi,\eta>}\,;\,\xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.24
Si $\Xi\in\mathcal{L}(W,W^*)$, alors pour $\xi,\xi_1,\eta,\eta_1\in E_{\mathbb{C}}$ la fonction

$$z,w\longmapsto\hat{\Xi}(z\xi+\xi_1,w\eta+\eta_1)\,;\,z,w\in\mathbb{C}$$

est une fonction entière sur $\mathbb{C}^2$. De plus il existe $a\geq 0$, $k\geq 0$ et $p\in\mathbb{R}$ tel que :

$$|\hat{\Xi}(\xi,\eta)|\leq a\exp(k(|\xi|_p^2+|\eta|_p^2))\,;\,\xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}.$$

Preuve :
Par définition on a :

$$\hat{\Xi}(z\xi+\xi_1, w\eta+\eta_1) = S(\Xi\phi_{z\xi+\xi_1})(w\eta+\eta_1) = S(\Xi^*\phi_{w\eta+\eta_1})(z\xi+\xi_1).$$

Le fait que Ξ est entière sur $\mathbb{C}^2$ découle du théorème (1.2.43).
D'autre part il existe $c \geq 0$, $p \geq 0$ telle que :

$$\|\Xi\phi\|_{-p} \leq c\|\phi\|_p\,;\ \phi \in W.$$

Et on a :

$$(\phi, \psi) \longmapsto \ll \Xi\phi, \psi \gg$$

est une forme bilineaire, par conséquent $\exists\, c \geq 0$, $p \geq 0$ tel que :

$$| \ll \Xi\phi, \psi \gg | \leq c\|\phi\|_p\|\psi\|_p.$$

Ensuite on considère l'opérateur symbole de Ξ ;

$$|\hat{\Xi}(\xi, \eta)| = | \ll \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \gg | \leq \|\Xi\phi_\xi\|_{-p}\|\phi_\eta\|_p \leq c\|\phi_\xi\|_p\|\phi_\eta\|_p.$$

Sachant que : $\|\phi_\xi\|_p = \exp(\frac{|\xi|_p^2}{2})$, on obtient :

$$|\hat{\Xi}(\xi, \eta)| \leq c \exp(\frac{1}{2}(|\xi|_p^2 + |\eta|_p^2)).$$

Une conséquence de la proposition précédente est le théorème de caractérisation des symbole des opérateurs :

Théorème 2.2.25 [7]
Soit $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$. Alors le symbole $\theta = \hat{\Xi}$ de Ξ satisfait :
(O_1) $\forall\, c \geq 0$ *et* $p \geq 0$ *on a :*

$$|\hat{\Xi}(\xi, \eta)|^2 \leq c\, G_\alpha(|\xi|_p^2) G_\alpha(|\eta|_p^2)\,;\ \xi\,,\, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

(O_2) *Pour* ξ, ξ_1, η, $\eta_1 \in E_{\mathbb{C}}$ *la fonction* $(z, w) \longmapsto \theta(z\xi+\xi_1, w\eta+\eta_1)$ *est entière sur* $\mathbb{C}^2$, *et réciproquement Une fonction* $\theta\,:\, E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{C}$ *est le symbole d'un opérateur* $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *si et seulement si les deux conditions* (O_1) *et* (O_2) *sont satisfaites. Dans ce cas :*

$$\|\Xi\phi\|^2_{-(p+q),\,-} \leq c\, \tilde{G_\alpha^2}(\|A^{-q}\|^2_{H.S})\|\phi\|^2_{p+q,\,+}\,;\ \phi \in W$$

où on prendra $q > \frac{1}{2}$ *tel que :*

$$\tilde{G_\alpha^2}(\|A^{-q}\|^2_{H.S}) < \infty.$$

Ce choix est toujours possible dès que :

$$\|A^{-q}\|_{H.S} \longrightarrow 0 \text{ quand } q \longrightarrow \infty.$$

Remarque 2.2.26 *Notons que* $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ *n'est pas uniquement déterminé par les éléments* $\{\hat{\Xi}(\xi, \xi)\,;\, \xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ *ni par* $\{\hat{\Xi}(\bar{\xi}, \xi)\,;\, \xi \in E_{\mathbb{C}}\}$. *En effet si on fixe* $\zeta \in E_{\mathbb{C}}$ *et on considère l'opérateur*

$$\Xi\phi = (< \zeta,\, f_1 >, f_0\zeta,\, 0, ...)$$

où $\phi = (f_0,\, f_1,\, ...) \in W$. *Alors*

$$\Xi \in \mathcal{L}(W,\, W) \text{ et } \hat{\Xi}(\xi,\, \eta) =< \xi,\, \zeta > - < \eta,\, \zeta >\,;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

Par conséquent

$$\hat{\Xi}(\xi,\, \xi) = 0\, \forall\, \xi \in E_{\mathbb{C}}\, mais\, \Xi \neq 0.$$

Chapitre 3

Représentation diagonale par rapport aux états cohérents et condition d'unitaritée

3.1 Représentation diagonale par rapport aux états cohérents

Définition 3.1.1 *Soit $z \in E^*_{\mathbb{C}}$ le vecteur exponentiel $\phi_z \in W^*$ est défini par : Pour tout $\varphi \in W$*

$$\ll \phi_z, \varphi \gg = \sum_{n=0}^{\infty} < z^{\otimes^n}, \varphi_n >$$

où

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} <: x^{\otimes^n} :, \varphi_n >$$

On définit aussi l'opérateur $Q_z \in \mathcal{L}(W, W^*)$ par :

$$Q_z \phi = \ll \phi_{\bar{z}}, \phi \gg \phi_z \,;\, \phi \in W,$$

L'application $z \longmapsto Q_z$ est continue.
Il est facile de voir que :

$$\hat{Q}_z(\xi, \eta) = \ll Q_z \phi_\xi, \phi_\eta \gg = e^{<\bar{z}, \xi> + <z, \eta>}, z \in E^*_{\mathbb{C}}.$$

On notera dans la suite

$$q_{\xi, \eta}(z) = \hat{Q}_z(\xi, \eta)\,;\, z \in E^*_{\mathbb{C}}\,,\, \xi\ \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

Lemme 3.1.2 *Pour ξ, $\eta \in E_{\mathbb{C}}$ et x, $y \in E^*$ on a*

$$q_{\xi, \eta}(x + iy) = e^{<x, \xi+\eta>} e^{<y, i(-\xi+\eta)>} = e^{<\xi, \eta>} \psi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}(x) \psi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}(y)\,;\, z = x + iy \in E^*_{\mathbb{C}},$$

où $\psi_a(x) = e^{\sqrt{2}<x, a> - \frac{<a, a>}{2}}$, $\forall\, a \in E_{\mathbb{C}}$.

En d'autre terme :

$$q_{\xi,\,\eta} = e^{<\xi,\,\eta>}\psi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \otimes \psi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}.$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 3.1.3
Pour $\xi,\,\eta \in E_{\mathbb{C}}$. On a

$$q_{\xi,\,\eta} \in W \otimes W \cong D.$$

Preuve :
Il suffit de montrer que $\psi_\xi(x) \in W$ ce ci est évident car les vecteurs exponentiels sont dense dans W et on sait que l'isomorphisme de Wiener-Itô-Ségal est uniquement déterminé par la correspondance(2.2).

Lemme 3.1.4 *Pour $w \in D^*$ il existe un unique opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(W,\,W^*)$ telle que :*

$$\hat{\Xi}(\xi,\,\eta) = \ll \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \gg = \ll w,\, q_{\xi,\,\eta} \gg;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.1}$$

Preuve :
Par définition on a :

$$\begin{aligned} |\ll w,\, q_{\xi,\,\eta} \gg|^2 &= \left| e^{<\xi,\,\eta>} \ll w,\, \psi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \otimes \psi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \gg \right|^2 \\ &\le e^{2|<\xi,\,\eta>|}\|w\|^2_{-p}\left\|\psi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}\right\|^2_p\left\|\psi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}\right\|^2_p \\ &= e^{2|<\xi,\,\eta>|}\|w\|^2_{-p}G_\alpha(|\tfrac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}|^2_p)G_\alpha(|\tfrac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}|^2_p), \end{aligned}$$

où $p \ge 0$ est choisie tel que : $\|w\|_{-p} < \infty$. Les conditions (A_4), (A_5) et (A_6) sur la suite $(\alpha(n))_{n\ge 0}$, impliquent que pour tout $t, s \ge 0$

$$G_\alpha(s+t) \le G_\alpha(C_2 s)G_\alpha(C_2 t)\,;\, G_\alpha(s)G_\alpha(t) \le G_\alpha(C_1(s+t))$$

et

$$e^s G_\alpha(t) \le G_\alpha(s+t).$$

De plus pour tout $\xi \in E_{\mathbb{C}}$ et $q \ge 0$ $|\xi|_p \le 2^{-q}|\xi|_{p+q}$. On obtient alors :

$$|\ll w,\, q_{\xi,\,\eta} \gg|^2 \le \|w\|^2_{-p}G_\alpha(|\xi|^2_{p+q})G_\alpha(|\eta|^2_{p+q}).$$

D'après le théorème de caractérisation des symboles des opérateurs on déduit le résultat.

Remarque 3.1.5 *L'opérateur Ξ ainsi défini par :*

$$\ll \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \ll w,\, q_{\xi,\,\eta} \gg \tag{3.2}$$

est représenté formellement sous forme intégrale :

$$\Xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z)Q_z\nu(dz), \tag{3.3}$$

et cette forme est dite représentation diagonale par rapport aux états cohérents.

Théorème 3.1.6 [36]
Chaque opérateur dans $\mathcal{L}(W, W^*)$ admet une unique représentation diagonale par rapport aux états cohérents.

Preuve :
Soit $\Xi \in \mathcal{L}(W,\, W^*)$ on considère :

$$\theta(\xi,\, \eta) = \ll \Xi\phi_{\frac{(\xi+i\eta)}{\sqrt{2}}},\, \phi_{\frac{(\xi-i\eta)}{\sqrt{2}}} \gg e^{-<\frac{\xi+i\eta}{\sqrt{2}},\, \frac{\xi-i\eta}{\sqrt{2}}>}\, ;\, \xi,\, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.4}$$

Compte tenu de la preuve du lemme précédent, il existe $A \in \mathcal{L}(W,\, W^*)$ telle que :

$$\theta(\xi,\, \eta) = \ll A\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg;\, \xi,\, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.5}$$

On changeant les paramètres dans (3.4) et (3.5) on obtient :

$$\ll \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \ll A\phi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}},\, \phi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \gg e^{<\xi,\, \eta>}\, ;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

Choisissons $w \in (W \otimes W)^*$ qui correspond à $A \in \mathcal{L}(W,\, W^*)$, moyennant l'isomorphisme canonique $(W \otimes W)^* \cong \mathcal{L}(W,\, W^*)$. Alors :

$$\ll \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \ll w,\, \phi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \otimes \phi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}} \gg e^{<\xi,\, \eta>}\, ;\, z = x + iy \in E^*_{\mathbb{C}}. \tag{3.6}$$

Comme

$$q_{\xi,\, \eta}(x+iy) = \ll Q_z\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \psi_{\frac{(\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}(x)\psi_{\frac{i(-\xi+\eta)}{\sqrt{2}}}(y)e^{<\xi,\, \eta>}\, ;\, z = x+iy.$$

Par conséquent l'écriture (3.6) est représentée formellement sous la forme :

$$\ll \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) \ll Q_z\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg \nu(dz)$$

qui prouve que Ξ admet une représentation diagonale par rapport aux états cohérents donnée par :

$$\Xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z)Q_z\nu(dz).$$

L'unicité découle du fait que w est uniquement déterminé par le symbole de Ξ. En effet il est facile de voir que pour $w \in D^*$

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z)Q_z\nu(dz) = 0$$

si et seulement si

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z)e^{<\bar{z},\, \xi>+<z,\, \eta>}\nu(dz) = 0\, ;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}.$$

Par dérivation on obtient :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) < \bar{z},\, \xi >^l < z,\, \eta >^m \nu(dz) = 0\, pour\, l, m \geq 0\, et\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}$$

ce qui prouve l'unicité de la représentation diagonale d'états cohérents.
Un cas particulier du théorème précédent est la résolution de l'identitée :

Théorème 3.1.7
Pour $z \in E^*_{\mathbb{C}}$ on a :

$$I = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} Q_z \nu(dz).$$

Preuve :
Soit $\Xi = \displaystyle\int_{E^*_{\mathbb{C}}} Q_z \nu(dz)$. D'après la formule

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},\xi>+<z,\eta>} \nu(dz) = e^{<\xi,\eta>},\ \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}\ ;\ z = x + iy \in E^* + iE^*$$

et la relation (3.1) le symbole de Ξ est donné par :

$$\begin{aligned}
\hat{\Xi}(\xi,\eta) &= \ll \Xi\phi_\xi, \phi_\eta \gg \\
&= \textstyle\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \ll Q_z\phi_\xi, \phi_\eta \gg \nu(dz) \\
&= \textstyle\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},\xi>+<z,\eta>} \nu(dz) \\
&= e^{<\xi,\eta>} \\
&= \ll \phi_\xi, \phi_\eta \gg .
\end{aligned}$$

Donc :

$$\Xi = I.$$

Exemple 3.1.8 *Soit a_t et a_t^* les opérateurs d'annihilation et de création au point $t \in \mathbb{R}$, alors ils sont exprimés respectivement sous la forme :*

$$a_t = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} z(t) Q_z \nu(dz) \text{ et } a_t^* = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \bar{z}(t) Q_z \nu(dz), \tag{3.7}$$

où $z(t) =< z,\, \delta_t >$ est le bruit blanc complexe, pour plus de d'étails(voir [14]).

3.2 Commentaires et exemples

Pour $y \in E^*_{\mathbb{C}}$, on considère l'opérateur intégrale à noyau :

$$\Xi_{0,1}(y) = \int_{\mathbb{R}} y(t) a_t dt. \tag{3.8}$$

Il est clair que $\Xi \in \mathcal{L}(W, W)$. Pour $y \in E^*$ on écrit encore $D_y = \Xi_{0,1}(y)$, où D_y est l'opérateur différentiel :

$$D_y\phi(x) = \lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{\phi(x + \theta y) - \phi(x)}{\theta}\ ;\ \phi \in W,\ x \in E^*.$$

En particulier, $a_t = D_{\delta_t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. On montre maintenant que :

Proposition 3.2.1
Pour $y \in E^*$ on a :

$$\Xi_{0,1}(y) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z,\, y > Q_z \nu(dz). \tag{3.9}$$

Preuve :
Par définition $w(z) =< z,\, y >\in D^*$, l'opérateur :

$$\Xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z,\, y > Q_z \nu(dz) \in \mathcal{L}(W, W^*),$$

est caractérisé par :

$$\hat{\Xi}(\xi,\, \eta) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z,\, y > e^{<\bar{z},\xi>+<z,\eta>} \nu(dz)\ ,\ \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.10}$$

Pour montrer la relation (3.9), on utilise la formule :

$$\int_{E^*} < x,\, \xi > e^{<x,\eta>} \mu'(dx) = \frac{1}{2} < \xi,\, \eta > e^{\frac{<\eta,\,\eta>}{4}}\ ;\ \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}},$$

et la relation (3.10) pour obtenir :

$$\hat{\Xi}(\xi,\, \eta) =< y,\, \eta > e^{<\xi,\,\eta>} = \hat{\Xi}_{0,1}(y)(\xi,\, \eta)\,;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}},$$

ce qui montre la relation (3.9). De la même manière on a :

$$\Xi_{0,m}(k) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z^{\otimes m},\, k > Q_z \nu(dz)\,;\, k \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes m})^*. \tag{3.11}$$

Exemple 3.2.2 *Pour $y \in E^*$ l'opérateur de translation T_y est défini par :*

$$T_y \phi(x) = \phi(x + y)\,;\, \phi \in W.$$

Alors $T_y \in \mathcal{L}(W, W)$ et $T_y = \exp(D_y)$(voir [32]), et par suite on d'après (3.11) que :

$$T_y = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<z,y>} Q_z \nu(dz)\ et\ T_y^* = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},y>} Q_z \nu(dz)$$

où L'opérateur adjoint $T_y^* \in \mathcal{L}(W^*, W^*)$ est relié au produit de Wick il est utilisé pour exprimer la solution de l'équation différentiel stochastique, (voir[16]).

L'unicité de la propriétée énoncée dans le théorème (3.1.6) n'est pas vérifiée par les fonctions de bruit blanc. En effet soit $\Phi \in W^*$, $\phi \in W$ alors $\phi \longmapsto \Phi\phi \in W^*$ est une application linéaire continue. Par suite chaque $\Phi \in W^*$ est regardée comme un opérateur de multiplication. Soit alors :

$$\Phi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) Q_z \nu(dz) \tag{3.12}$$

la représentation diagonale de cet opérateur, par les conditions : $\Phi\phi = \Phi$ et
$Q_z\phi_0 = \phi_z$ on a :

$$\Phi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) \phi_z \nu(dz), \tag{3.13}$$

qui est une fonction généralisée. D'autre part comme les vecteurs exponentiels $\left\{\phi_z, z \in E_{\mathbb{C}}\right\}$ constituent une famille dense de W alors ils donnent naissance a des représentations diagonales différents de fonctions de bruit blanc. Par exemple:

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},\xi>} \phi_z \nu(dz) = \phi_\xi,$$

qui est vérifiée par la transformée S, de plus la représentation (3.13) est canonique dans le sens que le noyau $w(z)$ est uniquement déterminé et que la représentation diagonale de l'opérateur de multiplication associé est donnée par la formule (3.12) avec le même $w(z)$.

Exemple 3.2.3 *La fonction :*

$$\phi_\xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<z,\xi>+<\bar{z},\xi>-<\xi,\xi>} \phi_z \nu(dz)\,;\, \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

est une représentation canonique par rapport aux états cohérents.

Remarque 3.2.4 *Le bruit blanc classique* $W_t(x) =< x, \delta_t >\in W^*$ *et le bruit blanc quantique* $\left\{a_t, a_t^*\right\}$ *sont reliés par :* $W_t = a_t + a_t^*$ *où* W_t *est regardé comme opérateur de multiplication. Donc compte tenu de la relation (3.7) on a :*

$$W_t = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \Big(z(t) + \bar{z}(t)\Big)\phi(z)\nu(dz)$$

qui est la représentation canonique du bruit blanc classique.

3.3 Quelques applications

Pour $\Phi \in W^*$ sa transformée S est la fonction sur $E_{\mathbb{C}}$ définie par :

$$S\Phi(\xi) =\ll \Phi, \phi_\xi \gg\,;\, \xi \in E_{\mathbb{C}},$$

de plus la transformée S de $\phi \in W$ devient une fonction définie sur $E^*_{\mathbb{C}}$ par:

$$S\phi(z) =\ll \phi_z, \phi \gg\,;\, z \in E^*_{\mathbb{C}}.$$

Dans ce sens la formule d'inversion de la transformée S est donnée par le théorème suivant, par l'utilisation de la mesure complexe du bruit blanc.

Théorème 3.3.1
Pour $\phi \in W$ *on a :*

$$\phi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} S\phi(\bar{z})\phi_z \nu(dz).$$

Preuve :
Soit $\psi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} S\phi(\bar{z})\phi_z \nu(dz)$, il est facile de voir que $\psi \in W$ et sa transformée S est donnée par :

$$\begin{aligned} S\psi(\xi) &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} S\phi(\bar{z}) S\phi_z(\xi)\nu(dz) \\ &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \ll \phi_{\bar{z}},\, \phi \gg \ll \phi_z,\, \phi_\xi \gg \nu(dz) \\ &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \ll Q_z\phi,\, \phi_\xi \gg \nu(dz). \end{aligned}$$

Or d'après le théorème (3.1) on a :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \ll Q_z\phi, \phi_\xi \gg \nu(dz) = \ll \phi, \phi_\xi \gg = S\phi(\xi).$$

Donc $\phi = \psi$ car la transformée S est bijective.

Soit $O(E;H)$ le groupe de tous les isomorphismes linéaires topologiques g de E telle que: $|g\xi|_0 = |\xi|_0$ pour tous $\xi \in E$. Autrement $O(E;H)$ est le groupe des automorphismes du triplet de Gelfand :

$$E \subset H \subset E^*.$$

Définition 3.3.2 *Un opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ est dit invariant par rotation si :*

$$\Gamma(g)\Xi = \Xi\Gamma(g)\,;\, g \in O(E;H),$$

où $\Gamma(g)$ est la seconde quantization de g définie par la formule (1.4).

Proposition 3.3.3
Soit $w \in D^*$, alors l'opérateur :

$$\Xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w(z) Q_z \nu(dz),$$

est invariant par rotation si et seulement si $\Gamma(g)^* w = w$, pour $g \in O(E;H)$.

Preuve:
Notons d'abord que :

$$\Gamma(g)Q_z = Q_{gz}\Gamma(g)\,;\, g \in O(E;H)\,,\, z \in E^*_{\mathbb{C}}.$$

De plus dès que :

$$\Gamma(g)\phi_{\bar{z}} = \phi_{g\bar{z}} = \phi_{\bar{gz}}$$

on a :

$$\begin{aligned} \Gamma(g)Q_z\phi &= \ll \phi_{\bar{z}}, \phi \gg \phi_{gz} \\ &= \ll \phi_{\bar{gz}}, \Gamma(g)\phi \gg \phi_{gz} \\ &= Q_{gz}\Gamma(g)\phi. \end{aligned}$$

Compte tenu de l'invariance par rotation de la mesure $\nu = \mu' \times \mu'$, on déduit le résultat(voir [14] et [32]).

Remarque 3.3.4 *1) On considère les deux opérateurs qui génèrent tous les opérateurs invariants par rotation :*

$$N = \Xi_{1,1}(\tau) = \int_{I\!R} a_t^* a_t dt\,;\; \Delta_G = \Xi_{0,2}(\tau) = \int_{I\!R} a_t^2 dt$$

le premier est dit opérateur nombre de particule et le second "Laplacien de Gross".

2) L'opérateur "trace" admet un developpement en série de Fourier:

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (e_n \otimes e_n) \tag{3.14}$$

dans $(E \otimes E)^*$, *où* $\{e_n\}_{n=0}^{\infty} \subset E$ *est une base orthonormée de* H*(voir [32]).*

Définition 3.3.5 *on définit maintenant* $< z \otimes \bar{z}, \tau >_{ren}$ *par :*

$$< z \otimes \bar{z}, \tau >_{ren} = \sum_{n=0}^{\infty} (< z, e_n >< \bar{z}, e_n > -1).$$

$w(z) =< z \otimes \bar{z}, \tau >_{ren} \in D^*$ et il est regardé comme une norme euclidienne en dimension infinie(avec renormalisation).

Proposition 3.3.6
Les représentations diagonales par rapport aux états cohérents de l'opérateur nombre de particule et celle du Laplacien de Gross sont données respectivements par :

$$N = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z \otimes \bar{z}, \tau >_{ren} Q_z \nu(dz) \tag{3.15}$$

$$\Delta_G = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z \otimes z, \tau > Q_z \nu(dz) \tag{3.16}$$

Preuve:
La preuve de (3.16) est immédiat d'après (3.11).
Montrons (3.15) : Soit $w_n(z) =< z,\, e_n >< \bar{z},\, e_n >=< x,\, e_n >^2 + < y,\, e_n >^2$; $z = x + iy$.
On considère :

$$\Xi_n = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w_n(z) Q_z \nu(dz),$$

alors $\Xi \in \mathcal{L}(W, W^*)$ et il est caractérisé par le symbole

$$\hat{\Xi}_n(\xi,\, \eta) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z,\, e_n >< \bar{z},\, e_n > e^{<\bar{z},\xi> + <z,\eta>} \nu(dz),$$

et compte tenu de la formule :

$$\int_{E^*} < x,\, e_n >^2 e^{<x,\zeta>} \mu'(dx) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < e_n,\, \zeta >^2) e^{\frac{<\zeta,\zeta>}{4}}\,;\; \zeta \in E_{\mathbb{C}},$$

on obtient :

$$\hat{\Xi}_n(\xi,\,\eta) = (< e_n,\, \xi >< e_n,\, \eta > +1)e^{<\xi,\,\eta>}. \tag{3.17}$$

D'autre part on a :

$$\hat{\Xi}_{1,1}(e_n \otimes e_n)(\xi, \eta) =< e_n \otimes e_n, \eta \otimes \xi > e^{<\xi,\eta>}. \tag{3.18}$$

Donc d'après (3.17) et (3.18) on déduit que :

$$\Xi_n = \Xi_{1,1}(e_n \otimes e_n) + I.$$

Finallement en tenant compte de (3.14) on conclut que :

$$\begin{aligned} N = \Xi_{1,1}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \Xi_{1,1}(e_n \otimes e_n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\Xi_n - I) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{E^*_{\mathbb{C}}} (w_n(z) - 1) Q_z \nu(dz) \\ &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z \otimes \bar{z}, \tau >_{ren} Q_z \nu(dz). \end{aligned}$$

3.4 Condition d'unitaritée

Pour discuter l'unitaritée de l'opérateur Ξ sur l'espace de Fock $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ on a besoin du produit scalaire hermitien: $<<< \phi, \psi >>> = \ll \bar{\phi}, \psi \gg$.
Pour un opérateur Ξ on note par Ξ^+ son adjoint relativement au produit scalaire hermitien ci dessus. On vérifie que : $\Xi^+ \phi = \overline{\Xi^+ \bar{\phi}}$; $\phi \in W$.

Définition 3.4.1 *1) $\Xi \in \mathcal{L}(W, W)$ est dit isométrie sur $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ si $\Xi^+\Xi = I$.*
2) $\Xi \in \mathcal{L}(W, W)$ est dit unitaire si Ξ ainsi que Ξ^+ sont des isométries c'est à dire si $\Xi^+ \in \mathcal{L}(W, W)$ et $\Xi^+\Xi = \Xi\Xi^+ = I$.

Remarque 3.4.2 *Puisque les vecteurs exponentiels $\{\phi_\xi, \xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ constituent un sous espace dense de W et par conséquent de $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$, la condition $\Xi^+\Xi = I$ est équivalente à :*

$$<<< \Xi\phi_\xi, \Xi\phi_\eta >>> = <<< \phi_\xi, \phi_\eta >>> ;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}},$$

qu'on peut l'écrire aussi :

$$\ll \overline{\Xi\phi_{\bar{\xi}}}, \Xi\phi_\eta \gg = \ll \phi_\xi, \phi_\eta \gg = e^{<\xi,\eta>} \;;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.19}$$

De même dès que $\Xi^+ \in \mathcal{L}(W, W)$ la condition $\Xi\Xi^+ = I$ est équivalente à :

$$\ll \overline{\Xi^+\phi_{\bar{\xi}}}, \Xi^+\phi_\eta \gg = \ll \phi_\xi, \phi_\eta \gg = e^{<\xi,\eta>} \;;\, \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.20}$$

Considérons l'equation (3.19) et compte tenu du théorème (3.1), cette expression devient :

$$\begin{aligned} \ll \overline{\Xi\phi_{\bar{\xi}}}, \Xi\phi_\eta \gg &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \ll \overline{\Xi\phi_{\bar{\xi}}}, \phi_{\bar{z}} \gg \ll \phi_z, \Xi\phi_\eta \gg \nu(dz) \\ &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\Xi\phi_{\bar{\xi}}, \phi_z \gg} \ll \Xi\phi_\eta, \phi_z \gg \nu(dz) \\ &= \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(\bar{\xi}, z)} \hat{\Xi}(\eta, z)\nu(dz). \end{aligned}$$

De la même façon l'equation (3.20) devient :

$$\ll \overline{\Xi^+\phi_{\bar{\xi}}}, \Xi^+\phi_\eta \gg = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(z, \bar{\xi})} \hat{\Xi}(z, \eta)\nu(dz),$$

où on a utilisé le fait que la mesure ν est invariante par la transformation :$z \longmapsto \bar{z}$.

Compte tenu de cette remarque on a le théorème suivant :

Théorème 3.4.3

1) Un opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(W, W)$ est une isométrie sur $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ c'est à dire $\Xi^+\Xi = I$ si et seulement si :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \hat{\Xi}(\bar{\xi}, z)\hat{\Xi}(\eta, z)\nu(dz) = e^{<\xi,\eta>} \;;\; \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.21}$$

2) Un opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(W, W)$ avec $\Xi^+ \in \mathcal{L}(W, W)$ est unitaire sur $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ c'est à dire $\Xi^+\Xi = \Xi\Xi^+ = I$ si et seulement si :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(\bar{\xi}, z)}\hat{\Xi}(\eta, z)\nu(dz) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(z, \bar{\xi})}\hat{\Xi}(z, \eta)\nu(dz) = e^{<\xi,\eta>} \;;\; \xi, \eta \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.22}$$

Dans la suite on donne un exemple de résolution déquations différentielles sur un espace Gaussien.

Pour $k \in (E^{\otimes m}_{\mathbb{C}})^*$ et $B \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ on associe un opérateur $G_{k,B} \in \mathcal{L}(W, W)$ définie par :

$$G_{k,B}\phi_\xi = e^{<k,\xi^{\otimes m}>}\phi_{B\xi} \;;\; \xi \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.23}$$

Le fait que $G_{k,B} \in \mathcal{L}(W, W)$ provient du théorème de caractérisation par les symboles des opérateurs.

Proposition 3.4.4

Si $k, k' \in (E^{\otimes m}_{\mathbb{C}})^*$; $B, B' \in \mathcal{L}(W, W)$ on a :

$$G_{k',B'}G_{k,B} = G_{k+(B^{\otimes m})^*k', B'B}.$$

Preuve:

On a :

$$\begin{aligned} G_{k',B'}G_{k,B}\phi_\xi &= G_{k',B'}e^{<k,\,\xi^{\otimes m}>}\phi_{B\xi} \\ &= e^{<k,\,\xi^{\otimes m}>}G_{k',B'}\phi_{B\xi} \\ &= e^{<k,\,\xi^{\otimes m}>}e^{<k',\,B^{\otimes m}\xi^{\otimes m}>}\phi_{B'B\xi} \\ &= e^{<k,\,\xi^{\otimes m}>}e^{<k'(B^{\otimes m})^*,\,\xi^{\otimes m}>}\phi_{B'B\xi} \\ &= e^{<k+k'(B^{\otimes m})^*,\,\xi^{\otimes m}>}\phi_{B'B\xi} \\ &= G_{k+(B^{\otimes m})^*k',\,B'B}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation (3.23) on a :

$$\hat{G}_{k,B}(\xi,\eta) = e^{<k,\,\xi^{\otimes m}>+<B\xi,\,\eta>},$$

par suite d'après la formule

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},\,\xi>+<z,\,\eta>}\nu(dz) = e^{<\xi,\,\eta>}\ ;\ \xi,\eta\ \in E_{\mathbb{C}}$$

on a :

$$\begin{aligned}\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{G}_{k,B}(\bar{\xi},z)}\hat{G}_{k,\,B}(\eta,z)\nu(dz) &= e^{<\bar{k},\,\xi^{\otimes m}>+<k,\,\eta^{\otimes m}>}\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<z,\,B\eta>+<\bar{z},\,\overline{B\bar{\xi}}>}\nu(dz)\\ &= \exp\left(<\bar{k},\,\xi^{\otimes m}>+<k,\eta^{\otimes m}>+<B\eta,\,\overline{B\bar{\xi}}>\right).\end{aligned}$$

Par conséquent d'après le théorème (3.4.5) la condition d'isomètrie est équivalente à :

$$\exp\left(<\bar{k},\,\xi^{\otimes m}>+<k,\eta^{\otimes m}>+<B\eta,\,\overline{B\bar{\xi}}>\right) = e^{<\xi,\,\eta>}\ ;\ \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}},$$

qui est encore équivalente au fait que $k=0$, *et* $B^+B = I$.

Proposition 3.4.5 *L'opérateur* $G_{k,B}$ *est une isométrie sur* $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ *si et seulement si* $k=0$ *et* B *est une isométrie sur* $H_{\mathbb{C}}$*. De plus,* $G_{k,B}$ *est unitaire sur* $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ *si et seulement si* $k=0$ *et* B *est unitaire sur* $H_{\mathbb{C}}$*.*

Remarque 3.4.6 *Le théorème* (3.4.5) *n'est pas applicable sur l'exemple :* $U_t = e^{iB(t)}$ *où* $\{B(t)\}$ *est le mouvement Brownien standard. Notons que* $\{U_t\}$ *est l'unique solution de l'equation différentiel stochastique :*

$$dU = iUdB - \frac{1}{2}Udt,\ U_o = I.$$

Et si $\hat{U}_t$ *est le symbole de* U_t *alors on vérifie que :*

$$\hat{U}_t(\xi,\eta) = exp\Big(-\frac{t}{2} + i < 1_{[0,t]},\xi+\eta > + <\xi,\eta>\Big)\ ;\ \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.24}$$

Définition 3.4.7 *Un opérateur* Ξ *est dit régulier si son symbole* $\hat{\Xi}$ *admet une extension d'une fonction sur* $E_{\mathbb{C}}\times E^*_{\mathbb{C}}$ *comme fonction sur* $L^2(E^*_{\mathbb{C}})$*.*

Exemple 3.4.8 U_t *est un opérateur régulier.*

Théorème 3.4.9
Supposons que $\Xi\in\mathcal{L}(W,\Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ *est régulier. Alors* Ξ *est une isométrie sur* $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ *si et seulement si :*

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(\bar{\xi},z)}\hat{\Xi}(\eta,z)\nu(dz) = e^{<\xi,\eta>}\ ;\ \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.25}$$

Si de plus $\Xi^*\in\mathcal{L}(W,\Gamma(H_{\mathbb{C}}))$ *est régulier. Alors* Ξ *est un opérateur unitaire sur* $\Gamma(H_{\mathbb{C}})$ *si et seulement si :*

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(\bar{\xi},z)}\hat{\Xi}(\eta,z)\nu(dz) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \overline{\hat{\Xi}(z,\bar{\xi})}\hat{\Xi}(z,\eta)\nu(dz) = e^{<\xi,\eta>}\ ;\ \xi,\eta\in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.26}$$

3.5 Représentation des fonctions de bruit blanc par rapport aux états cohérents

On sait que la famille des vecteurs exponentiels $\{\phi_\xi\,;\,\xi \in E_{\mathbb{C}}\}$ est lineairement indépendante et on utilisant la transformée S on a :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<\bar{z},\xi>}\phi_z \nu(dz) = \phi_\xi\,;\,\xi \in E_{\mathbb{C}}. \tag{3.27}$$

et elle est aussi due à l'unicité de la représentation diagonale par rapport aux états cohérents (d'après le théorème (3.4.5)).
On va spécifier par la suite une représentation particulière des fonctions de bruit blanc. Dans la preuve de ([32, chapitre 3,5]) on peut voir que la multiplication point par point de deux fonctions tests de bruit blanc nous donne une forme bilineaire continue de $W \times W$ vers W. Par conséquent pour $\Phi \in W^*$ on associe un opérateur de multiplication noté par:

$$\ll \Phi\phi, \psi \gg = \ll \Phi, \phi\psi \gg\,;\,\phi, \psi \in W.$$

De plus l'injection :

$$W^* \longrightarrow \mathcal{L}(W, W)$$

est continue.

Proposition 3.5.1
Soit $\Gamma(\sqrt{2}) \in \mathcal{L}(W, W)$ la second quantization de l'opérateur scalaire $\sqrt{2}I$. Alors on a :

$$\Gamma(\sqrt{2})\phi_\xi = \phi_{\sqrt{2}\xi}\,;\,\xi \in E_{\mathbb{C}}$$

et

$$\Gamma(\sqrt{2}) \subset (\Gamma(\sqrt{2}))^* \in \mathcal{L}(W^*, W^*).$$

Théorème 3.5.2
Soit $\Phi \in W^*$, la représentation diagonale par rapport aux états cohérents de Φ est donnée par :

$$\Phi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w_\Phi(z) Q_z \nu(dz) \tag{3.28}$$

où

$$w_\Phi(z) = \Gamma(\sqrt{2})^* \Phi\Big(\frac{z + \bar{z}}{\sqrt{2}}\Big). \tag{3.29}$$

Preuve :
D'après ([36,Théorème 5.2]), il suffit de trouver $\tilde{w} \in (W \otimes W)^*$ telle que :

$$\begin{aligned}
\ll \tilde{w}, \phi_\xi \otimes \phi_\eta \gg &= \ll \Phi\phi_{\frac{(\xi+i\eta)}{\sqrt{2}}}, \phi_{\frac{(\xi-i\eta)}{\sqrt{2}}} \gg e^{-\frac{(\xi+i\eta,\,\xi-i\eta)}{2}} \\
&= \ll \Phi, \Phi\phi_{\frac{(\xi+i\eta)}{\sqrt{2}}} \phi_{\frac{(\xi-i\eta)}{\sqrt{2}}} \gg e^{-\frac{<\xi+i\eta,\,\xi-i\eta>}{2}} \\
&= \ll \Phi, \phi_{\sqrt{2}\xi} \gg \\
&= \ll \Phi, \Gamma(\sqrt{2})\phi_\xi \gg \\
&= \ll \Gamma(\sqrt{2})^*\Phi, \phi_\xi \gg \\
&= \ll (\Gamma(\sqrt{2})^*\Phi \otimes \phi_0, \phi_\xi \otimes \phi\eta \gg .
\end{aligned}$$

On prend donc : $\tilde{w} = (\Gamma(\sqrt{2})^*\Phi) \otimes \phi_0$.
Soit $w_\Phi \in D^*$ l'élément correspondant à $\tilde{w}$, par l'isomorphisme $D^* \cong (W \otimes W)^*$ qui prolonge la correspondance donnée dans (2.2), on a :

$$w_\Phi(z) = \Gamma(\sqrt{2})^*\Phi(\sqrt{2x})\phi_0(y) = \Gamma(\sqrt{2})^*\Phi(\sqrt{2}x).$$

Le résultat (3.29) découle.

Remarque 3.5.3 *Considérons l'action de (3.28) sur le vacuum ϕ_0. Dès que $\Phi\phi_0 = \Phi$ et $Q_z\phi_0 = \phi_z$, on obtient :*

$$\Phi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} w_\Phi(z)\phi_z\nu(dz). \tag{3.30}$$

La représentation d'états cohérents de Φ donnée dans (3.30) est dite : représentation canonique.

Considérons comme exemple le cas où, $\Phi = \phi_\xi$, alors la relation (3.29) devient :

$$\begin{aligned}
w_\Phi(z) &= \Gamma(\sqrt{2})^*\phi_\xi\Big(\tfrac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\Big) \\
&= \phi_{\sqrt{2}\xi}\Big(\tfrac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\Big) \\
&= e^{<z+\bar{z},\,\xi>-<\xi,\,\xi>}.
\end{aligned}$$

Par conséquent on a l'opérateur de multiplication :

$$\phi_\xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<z+\bar{z},\,\xi>-<\xi,\,\xi>} Q_z\nu(dz)$$

et sa représentation canonique est donnée par :

$$\phi_\xi = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} e^{<z,\,\xi>+<\bar{z},\,\xi>-<\xi,\,\xi>} \phi_z\nu(dz).$$

Exemple 3.5.4 *La représentation canonique par rapport aux états cohérents du bruit blanc classique est donnée par :*

$$W_t = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \Big(z(t) + \bar{z}(t) \Big) \phi_z \nu(dz),$$

qui est vérifiée par l'identitée des opérateurs :

$$W_t = a_t + a_t^*$$

où

$$a_t = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} z(t) Q_z \nu(dz) \, et \, a_t^* = \int_{E^*\mathbb{C}} \bar{z}(t) Q_z \nu(dz),$$

sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création au point $t \in I\!R$.

Remarque 3.5.5 *On peut écrire :*

$$W_t = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} \bar{z}(t) \phi_z \nu(dz),$$

mais cette écriture n'est pas canonique.

De cette discussion on note une identitée plus générale tel que :

$$\int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z^{\otimes^m}, \, k > \phi_z \nu(dz) = 0 \; ; \; k \in (E_{\mathbb{C}}^{\otimes^m})^* \, , \; m \geq 1,$$

en effet cette dernière écriture provient de la représentation diagonale d'état cohérent de l'opérateur intégrale à noyau :

$$\Xi_{0,\, m}(k) = \int_{E^*_{\mathbb{C}}} < z^{\otimes^m}, \, k > Q_z \nu(dz).$$

Chapitre 4

Opérateurs définis sur les espaces des fonctions holomorphes

Dans ce chapitre on va introduire des espaces de fonctions tests $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ où θ est une fonction de Young. Ensuite on va considérer des opérateurs linéaires continus définis sur $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ et sur $F_\theta(E^*)$ respectivement.

4.1 Fonction de Young

Définition 4.1.1 *On appelle fonction de Young toute fonctions $\theta : I\!R_+ \longrightarrow I\!R_+$ continue, convexe et croissante qui satisfait :*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\theta(x)}{x} = +\infty \text{ et } \theta(0) = 0.$$

Pour une fonction de Young θ on définit aussi sa fonction conjuguée par :

$$\theta^*(x) = \sup_{t \geq 0}\{tx - \theta(t)\}.$$

On remarque que θ^* est encore une fonction de Young de plus $(\theta^*)^* = \theta$. Pour plus de d'étails sur les fonctions de Young (voir[28]).

Soit θ une fonction de Young et $m > 0$. Soit $(B, \|.\|)$ un espace de Banach complexe, on définit l'espace de Banach suivant :

$$Exp(B, \theta, m) = \{f \in H(B) \,;\, \|f\|_{\theta,m} = \sup |f(z)|e^{-\theta(m\|z\|)} \,;\, z \in B < +\infty\} \tag{4.1}$$

où $H(B)$ désigne l'espace des fonctions entières sur l'espace B. Soit E un espace de Fréchet nucléaire complexe, dont la topologie peut être définie par une famille croissante de normes Hilbertienne $\{|.|_p \,,\, p \in I\!N\}$, et soit E^* son dual topologique. Pour tout $p \in I\!N$ on notera par E_p le complété de E lorsque celui ci est muni de la norme $|.|_p$ et par E_{-p} le dual topologique de l'espace de Hilbert E_p. Dans la suite on définit deux types d'espaces de fonctions holomorphes à croissance exponentielle sur E et sur E^* :

$$\mathcal{F}_\theta(E^*) = \cap_{p \geq 0 \,, m > 0} Exp(E_{-p} \,, \theta \,, m) \tag{4.2}$$

muni de la topologie limite projective, et où l'espace

$$\mathcal{G}_\theta(E) = \cup_{p\geq 0, m>0} Exp(E_p\,, \theta\,, m) \tag{4.3}$$

est muni de la topologie limite inductive. On note par $(\mathcal{F}_\theta(E^*))^*$ le dual topologique de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$, qu'on munit de la topologie du dual fort.

Exemple 4.1.2 *Pour tout $u \in E$ la fonction $e_u : E^* \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $e_u(z) = e^{<z,u>}$, $\forall z \in E^*$ est un élément de l'espace $\mathcal{F}_\theta(E^*)$(pour plus de d'étails voir [10]).*

Pour tout $p \geq 0$, soit $\mathcal{S}(E_p)$ l'espace des séries formelles symétriques sur E_p. Autrement dit $\vec{f} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{S}(E_p)$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in E_p^{\odot^n}$. De même pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(E_{-p})$ désigne l'espace des séries formelles symétriques sur l'espace E_{-p}. Soit $p \geq 0$ et $m > 0$, on définit l'espace de Hilbert suivant :

$$F_{\theta,m}(E_p) = \{\vec{f} \in \mathcal{S}(E_p)\,;\, \|\vec{f}\|_{\theta,p,m} = \sum_{n\geq 0} \theta_n^{-2} m^{-n} |f_n|_p^2 < \infty\}$$

où

$$\theta_n = \inf_{r>0} \frac{e^{\theta(r)}}{r^n},$$

et soit l'espace

$$F_\theta(E) = \cap_{p\geq 0, m>0} F_{\theta,m}(E_p)$$

qu'on munit de la topologie limite projective.

Proposition 4.1.3 [10]
L'espace $F_\theta(E)$ est un espace de Fréchet, nucléaire et réflexif.

Preuve:
L'espace $F_\theta(E)$ est limite projective d'espaces de Fréchet réflexifs donc il est lui même un espace de Fréchet réflexif. Soit $m > 0$ et $p \geq 0$ fixés. Pour tout $m' < m$ et $q > p$ on a $\|.\|_{\theta,p,m} \leq \|.\|_{\theta,q,m'}$ et donc on définit l'injection naturelle suivante :

$$I_{q,p}^{m,m'} : F_{\theta,m'}(E_q) \longrightarrow F_{\theta,m}(E_p)$$

le but est de trouver m' et q convenables pour que cette injection soit de type Hilbert-Schmidt. Soit $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une base Hilbertienne de E_q. Pour $n \geq 1$ fixé la famille suivante:

$$\{\sqrt{r!}\, e_{i_1}^{\otimes\alpha_1} \odot ... \odot e_{i_r}^{\otimes\alpha_r}\,;\, r = 1, ..., n\,,\, \alpha \in \mathbb{N}^r\,,\, |\alpha| = n\,;\, i_1, ..., i_r \in \mathbb{N}\}$$

constitue une base Hilbertienne de $E_q^{\odot}$ et l'injection naturelle suivante :

$$i_{q,p}^{\otimes^n} : E_q^{\odot} \longrightarrow E_p^{\odot}$$

a pour norme Hilbert-Schmidth :

$$\|i_{q,p}^{\otimes^n}\|_{H.S}^2 = \sum_{r=1}^{n} \sum_{i_1,\dots,i_r\geq 0} \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r, |\alpha|=n} |\sqrt{r!}\, e^{\otimes_{i_1}^{\alpha_1}} \odot ... \odot e^{\otimes_{i_r}^{\alpha_r}}|_p^2 = \|i_{q,p}\|_{H.S}^{2n}.$$

Comme l'espace $F_{\theta,m'}(E_q)$ est une somme Hilbertienne de $E_q^{\odot^n}$ on a :

$$\|I_{q,p}^{m,m'}\|_{H.S}^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{m'}{m})^n\|i_{q,p}\|_{H.S}^{2n}.$$

Il suffit donc de choisir $m' > 0$ tel que $(\frac{m'}{m})\|i_{q,p}\|_{H.S}^2 < 1$.
Soit $m > 0$ et $p \geq 0$, on définit l'espace de Hilbert suivant :

$$G_{\theta,m}(E_{-p}) = \{\vec{\phi} = (\phi_n)_{n\in I\!N} \in \mathcal{S}(E_{-p})\,;\, |||\vec{\phi}|||_{\theta,-p,m}^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(n!\theta_n)^2 m^n|\phi_n|_{-p}^2 < \infty\},$$

et soit l'espace

$$G_\theta(E^*) = \bigcup_{p\geq 0, m>0} G_{\theta,m}(E_{-p})$$

qu'on munit de la topologie limite inductive. Alors il est clair que le dual topologique de l'espace $F_\theta(E)$ est l'espace $G_\theta(E^*)$ pour la dualité suivante :

$$\ll \vec{\phi}, \vec{f} \gg = \sum_{n=1}^{\infty} n! < \phi_n, f_n >$$

où $< \phi_n, f_n >$ étant la dualité entre $(E^*)^{\odot^n}$ et $E^{\odot^n}$.

Proposition 4.1.4 [10]
Soit θ une fonction de Young, telle que $\lim_{+\infty}(\frac{\theta(x)}{x^2})$ existe et soit finie, alors l'espace $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ s'injecte d'une manière continu et à image dense dans $L^2(X^*, \gamma)$.

Remarque 4.1.5 *De la proposition précédente on déduit le triplet de Gelfand suivant :*

$$\mathcal{F}_\theta(E^*) \subset L^2(X', \gamma) \subset (\mathcal{F}_\theta(E^*))^*.$$

Remarque 4.1.6 *la fonction de Young θ permet de réduire les hypothèses imposées à la suite $(\alpha(n))_{n\geq 0})$ introduites dans la définition des espaces "CKS" étudié dans le chapitre deux. Par exemple l'hypothèse d'analycité sur la fonction G_α n'est pas nécessaire puisqu'on retrouve l'étude faite dans ([9]) en posant : $\theta^*(t) = Log(G_\alpha(t^2))$. De plus dans la proposition précédente on a supposé que $\frac{\theta(x)}{x^2}$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$. Cette condition est en fait plus faible que celle imposée à la suite $(\alpha(n))_{n\in I\!N}$ dans A_1 : $\inf_n \alpha(n) > 0$. En effet s'il existe $c > 0$ tel que $\alpha(n) \geq c$ pour tout $n \in I\!N$ alors $G_\alpha(t) \geq ce^t$ et par suite compte tenu de la relation $\theta^*(t) = LogG_\alpha(t^2)$ il existe $c' > 0$ tel que : $\theta^*(t) \geq c' + t^2$ pour tout $t \geq 0$ d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}(\frac{\theta(x)}{x^2}) < +\infty.$$

4.2 Opérateurs définis sur l'espace $\mathcal{F}_\theta(E^*)$

Dans ce paragraphe on developpe une théorie d'opérateurs définis sur l'espace des fonctions holomorphes $\mathcal{F}_\theta(E^*)$. On caractérise les opérateurs de convolution sur $\mathcal{F}_\theta(E^*)$.

4.2.1 Opérateurs de convolutions

Définition 4.2.1 *Un opérateur de convolution défini sur $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ sur lui même qui commute avec l'opérateur de translation.*

Proposition 4.2.2 [6]
T est un opérateur de convolution si et seulement si il existe $\phi_T \in \mathcal{F}_\theta(E^*)$ telle que :

$$T\varphi = \phi_T * \varphi\,,\, \forall \varphi \in \mathcal{F}_\theta(E^*).$$

De plus, si la distribution ϕ_T est donnée par :

$$\vec{\phi_T} = (\phi_m)_{m\geq 0} \in G_\theta \, et \, \varphi(z) = \sum_{n\geq 0} < z^{\otimes^n}\,, \varphi_n > \in \mathcal{F}_\theta(E^*)$$

alors :

$$\phi_T * \varphi(z) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} \frac{(n+m)!}{n!} < z^{\otimes^n}, < \phi_m, \varphi_{m+n} >_m > \,,$$

où $< \phi_m, \varphi_{m+n} >_m$ est la contraction à droite de ϕ_m et φ_{n+m} d'ordre m(voir [32]).

Lemme 4.2.3 *L'opérateur D_y est continu de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ vers lui même. De plus pour chaque $\varphi \in \mathcal{F}_\theta(E^*)\, p \in I\!N \, et \, m > 0$ on a :*

$$\|D_y\varphi\|_\theta\|_{\theta\,,p,\,m} \leq \sqrt{m}\theta_1|y|_{-p_y}\|\varphi\|_{\theta\,,p_yvp,\frac{m}{16}}\,,$$

où

$$p_y = \min\{p \in I\!N\,;\, y \in E_{-p}\}\, et \, p_yvp = \max(p_y, p).$$

Preuve:
Par définition de la norme $\|.\|_{\theta\,,p\,,m}$ définie sur l'espace F_θ des séries formelles on a :

$$\begin{aligned}
\|D_y\varphi\|_{\theta\,,p\,,m} &= \Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\theta_n^{-2}m^{-n}| < y\,, \varphi_{n+1} >_1 |_p^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= |y|_{-p_y}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\theta_n^{-2}m^{-n}|\varphi_{n+1}|^2_{pxp_y}\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{m}|y|_{-p_y}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\theta_{n+1}^{-2}(\frac{m}{16})^{-n-1}|\varphi_{n+1}|^2_{pvp_y}\Big[\frac{(n+1)\theta_{n+1}}{2^{2n+2}\theta_n}\Big]^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{m}|y|_{-p_y}\sup\nolimits_{n\geq 1}\Big[\tfrac{\theta_{n+1}}{2^{2n+1}\theta_n}\Big]\|\varphi\|_{\theta\,,pvp_y\,,\frac{m}{16}}.
\end{aligned}$$

Finallement, l'inégalité découle en utilisant le fait que :

$$2^{-l-k}\theta_l\theta_k \leq \theta_{l+k} \leq 2^{l+k}\theta_l\theta_k\,, \forall\, l\,, k \in I\!N^*.$$

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*))$ l'espace des opérateurs linéaires continus de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ sur lui même. Compte tenu du lemme précédent et pour tout $m \in I\!N$ l'opérateur m-linéaire défini par :

$$\begin{array}{rcccl} D & : & E^* \times ... \times E^* & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*)) \\ & & (y_1, ..., y_m) & \longmapsto & D_{y_1}...Dy_m \end{array}$$

est symétrique continu. De plus il est prolongeable par continuité sur $(E^*)^{\odot^m}$, c'est à dire

$$D : \phi_m \in (E^*)^{\odot^m} \longmapsto D_{\phi_m} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*)).$$

L'action de l'opérateur D_{ϕ_m} sur la fonction test :

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} < z^{\otimes^n}, \varphi_n >$$

est donnée par :

$$D_{\phi_m}(\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} < z^{\otimes^n}, < \phi_m, \varphi_{n+m} >_m >$$

où $< \phi_m, \varphi_{n+m} >_m$ est la contraction à droite de ϕ_m et φ_{n+m} d'ordre m (pour plus de d'étails voir [32]).

Proposition 4.2.4 [6]
Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*))$, alors T est un opérateur de convolution si est seulement si il existe $\vec{\phi} = (\phi_m)_{m\geq 0} \in G_\theta$ telle que :

$$T = \sum_{m=0}^{\infty} D_{\phi_m}.$$

4.2.2 Symbole des opérateurs

Dans cette section on définit l'application symbole sur l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*))$, puis on donne une expression de ces opérateurs en fonction des opérateurs de multiplication et de dérivation.

Définition 4.2.5 *Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*))$, le symbole $\sigma(T)$ de l'opérateur T est la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par :*

$$\sigma(T)(z, \xi) = e^{-<z,\xi>} T(e^{\xi})(z) \, \forall z \in E^* \, \xi \in E.$$

Des définitions analogues sur les symboles d'opérateurs sont introduites dans plusieurs contextes (voir [32],[40]).

Théorème 4.2.6 [6]
L'application symbole réalise un isomorphisme topologique entre $\mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*))$ et $\mathcal{F}_\theta(E^*) \otimes \mathcal{G}_{\theta^*}(E)$. Plus précisement, on a l'isomorphisme :

$$\begin{array}{rcccl} \sigma & : & \mathcal{L}(\mathcal{F}_\theta(E^*), \mathcal{F}_\theta(E^*)) & \longrightarrow & \mathcal{F}_\theta(E^*) \otimes \mathcal{G}_{\theta^*}(E) \\ & & T & \longmapsto & \sigma(T)(z, \xi) = \sum_{l,m} < K_{l,m}, z^{\otimes^l} \otimes \xi^{\otimes^m} > . \end{array}$$

Exemple 4.2.7 *1) Soit $\phi_m \in E^{*\odot^m}$, alors :*

$$\begin{array}{rcl}\sigma(D_{\phi_m})(z\,,\xi) & = & e^{-<z\,,\xi>}D_{\phi_m}(\phi_\xi)(z)\\ & = & e^{-<z\,,\xi>} < \phi_m\,,\xi^{\otimes^m} > e^{<z\,,\xi>}\\ & = & < \phi_m\,,\xi^{\otimes^m} > .\end{array}$$

En particulier, le symbole de l'opérateur de convolution $T_\phi = \sum_{m=0}^{\infty} D_{\phi_m}$ est donnée par :

$$\begin{array}{rcl}\sigma(T_\phi)(z\,,\xi) & = & e^{-<z\,,\xi>}\sum_{m=0}^{\infty} D_{\phi_m}(\phi_\xi)(z)\\ & = & \sum_{m=0}^{\infty} < \phi_m\,,\xi^{\otimes^m} >\\ & = & \hat{\phi}(\xi)\end{array}$$

où $\hat{\phi}(\xi)$ est la transformation de Laplace de la distribution $\phi \in \mathcal{F}_\theta(E^*)$ donnée par :

$$\hat{\phi}(\xi) = \ll \phi\,,\phi_\xi \gg ;\, \forall \xi \in E$$

Par conséquent l'opérateur T_ϕ peut être exprimé comme suit :

$$T_\phi = \sum_{m=0}^{\infty} D_{\phi_m} = \sum_{m=0}^{\infty} < \phi_m\,,D^{\otimes^m} > = \sigma(T_\phi)(z\,,D)\,;\, z \in E^*.$$

Lemme 4.2.8 *Soit $p \in I\!R$ fixé. Il existe un unique isomorphisme*

$$\begin{array}{rcccc}\psi & : & E_p & \longrightarrow & E_{-p}\\ & & \xi & \longmapsto & \xi^*\end{array}$$

telle que : $< \xi^*, \eta > = < \xi, \eta >_p\,;\, \xi, \eta \in E_p$, où $< .,. >_p$ est le produit scalaire Hermitien de l'espace de Hilbert E_p.

Preuve :
Soit $\xi \in E_p$, on considère l'application $\eta \longmapsto < \xi, \eta >_p$ où $\eta \in E_p$. Cette application est linéaire continue par définition donc il existe un unique $\xi^* \in E_{-p}$ telle que :
$< \xi, \eta >_p = < \xi^*, \eta >$. Il est facile de voir que $(\alpha\xi + \beta\eta)^* = \bar{\alpha}\xi^* + \bar{\beta}\eta^*$.
De plus cette application est une isométrie dès que :

$$|\xi^*|_{-p} = \sup_{|\eta|_p \leq 1} | < \xi^*, \eta > | = \sup_{|\eta|_p \leq 1} | < \xi, \eta >_p | = |\xi|_p.$$

Finallement l'application $\xi \longmapsto \xi^*$ est surjective qui peut être vérifiée par le théorème de Riesz.

Remarque 4.2.9 *Soit e_i une base orthonormée de E_p. Alors le développement en série de Fourier de $\xi \in E_p$ est de la forme :*

$$\xi = \sum_i < e_i^*, \xi > e_i \,,$$

et on a :

$$|\xi|_p^2 = \sum_i | < e_i^*, \xi > |^2.$$

De plus e_i^* devient une base orthonormée de E_{-p}. Le développement en série de Fourier de $f \in E_{-p}$ est de la forme :

$$f = \sum_i < f, e_i > e_i^*,$$

et on a

$$|f|_{-p}^2 = \sum_i | < f, e_i > |^2.$$

Notons aussi que : $< e_i^*, e_j >= \delta_{ij}$.

Proposition 4.2.10
$\mathcal{G}_\theta(E)$ est identifié avec l'espace des fonctions $g : E \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que $\exists\, p \geq 0 \,, \delta > 0$ pour lesquel g admet une extension $g_p \,:\, E_p \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est entière et :

$$\|g_p\|_{\theta,p,\delta} \equiv \sup_{z \in E_p} |g_p(z)| e^{-\theta(\delta |z|_p)} < +\infty.$$

De plus la fonction g est entière sur E.

Preuve :
Soient $|.|_p \,,\, p \in \mathbb{N}$ une suite de normes Hilbertienne qui détermine la topologie de E telle que :

$$|\xi|_0 \leq |\xi|_1 \leq |\xi|_2 \leq ... \,;\, \xi \in E.$$

On doit montrer que la construction de $\mathcal{F}_\theta(E^*)$ et $\mathcal{G}_\theta(E)$ ne dépend pas de la suite $|.|_p$ choisie .
L'application $\pi : E \longrightarrow E_p$ est continue et à image dense . Par dualité $\pi^* : E_p^* \longrightarrow E^*$ est une injection continue . La norme dual est définie par :

$$|f|_{-p} = \sup_{|x|_p \leq 1} | < \pi^* f, x > | \,;\, f \in E_p^*.$$

Proposition 4.2.11
$\mathcal{F}_\theta(E^*)$ est fermé pour la multiplication point par point. De plus la multiplication point par point réalise une application bilinéaire de $\mathcal{F}_\theta(E^*) \times \mathcal{F}_\theta(E^*)$ vers $\mathcal{F}_\theta(E^*)$.

Preuve :
Soit $f, g \in \mathcal{F}_\theta(E^*)$, de la relation $\frac{1}{2}\theta(x) = \frac{1}{2}(\theta(x) + \theta(0)) \geq \theta(\frac{1}{2}x)$ on déduit que :

$$|f(z)g(z)| e^{-\theta(\delta|z|_{-p})} \leq |f(z)| e^{-\theta(\frac{\delta}{2}|z|_{-p})} |g(z)| e^{-\theta(\frac{\delta}{2}|z|_{-p})}.$$

On prend le maximum sur E_{-p} on obtient :

$$\|fg\|_{\theta,\,-p,\,\delta} \leq \|f\|_{\theta,\,-p,\,\frac{\delta}{2}} \|g\|_{\theta,\,-p,\,\frac{\delta}{2}}.$$

Proposition 4.2.12
$\mathcal{G}_\theta(E)$ est fermé pour la multiplication point par point . De plus la multiplication point par point réalise une application bilinéaire de $\mathcal{G}_\theta(E) \times \mathcal{G}_\theta(E)$ vers $\mathcal{G}_\theta(E)$.

Preuve :
Supposons $f, g \in \mathcal{G}_\theta(E)$. Alors par définition $\exists\, p \geq 0,\ \delta > 0$ et une fonction $f_p : E_p \longrightarrow \mathbb{C}$ qui étend f telle que :

$$\|f\|_{\theta,\,p\,,\delta} = \sup |f_p(z)|e^{-\theta(\delta|z|_p)} < \infty.$$

De la même façon pour g $\exists\, q \geq 0,\ \delta' > 0$ et une fonction entière $g_q : E_q \longrightarrow \mathbb{C}$ qui étend g telle que :

$$\|g\|_{\theta,\,q,\,\delta'} = \sup_{z\in N_q} |g_q(z)|e^{-\theta(\delta'|z|_q)} < \infty.$$

On doit supposer que $p \leq q$. Alors on a :

$$E \subset E_q \subset E_p.$$

Soit $f_q = f_p\,|_{E_q}$, alors f_q est Gâteau holomorphe sur E_q. De plus puisque $|z|_p \leq |z|_q$ on a :

$$|f_q(z)| = |f_p(z)| \leq \|f\|_{\theta,\,p,\,\delta}\, e^{\theta(\delta|z|_p)} \leq \|f\|_{\theta,\,p,\,\delta}\, e^{\theta(\delta|z|_q)}\,;\ z \in E_q.$$

Par suite f_q est locallement bornée sur E_q et par conséquent f_q est entière sur E_q. Alors $f_q g_q$ étend fg qui est entière sur E_q. De plus :

$$\begin{aligned} |f_q(z)g_q(z)| &\leq \|f\|_{\theta,\,p,\,\delta}\, e^{\theta(\delta|z|_q)}\|g\|_{\theta,\,q,\,\delta}\, e^{\theta(\delta'|z|_q)} \\ &\leq \|f\|_{\theta,\,p,\,\delta}\|g\|_{\theta,\,q,\,\delta}\, e^{\theta(2(\delta+\delta')|z|_q)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\|fg\|_{\theta,\,pvq,\,2(\delta+\delta')} \leq \|f\|_{\theta,\,p,\,\delta}\|g\|_{\theta,\,q,\,\delta'}.$$

4.3 Opérateurs définis sur l'espace $F_\theta(E)$

On s'intéresse par la suite à l'etude des opérateurs définis de $F_\theta(E)$ vers $F_\theta(E)^*$. L'espace de ces opérateurs est noté par $\mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)$.

4.3.1 Symbole et noyaux

Le théorème de noyau prouve qu'il ya un isomorphisme entre

$$\mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)\, et\, \Big(F_\theta(E) \otimes F_\theta(E)\Big)^*.$$

Définition 4.3.1 *Soit $\Xi \in \mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)$ et $\Xi^k \in \Big(F_\theta(E) \otimes F_\theta(E)\Big)^*$.*
Ξ^k est dit noyau de Ξ si

$$\ll \Xi\phi,\, \psi \gg = \ll \Xi^k,\, \phi \otimes \psi \gg\,;\ \phi, \psi \in F_\theta(E).$$

Définition 4.3.2 *Soit $\Xi \in \mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)$ le symbole de Ξ est la fonction $\hat{\Xi}$ définie par :*

$$\hat{\Xi}(\xi,\, \eta) = \ll \Xi\phi_\xi,\, \phi_\eta \gg = \ll \Xi^k,\, \phi \otimes \phi_\eta \gg ;\, \xi, \eta \in E.$$

Remarque 4.3.3 *Puisque les vecteurs exponentiels $\{\phi_\xi\, ;\, \xi \in E\}$ constitue un sous espace dense de F_θ, un opérateur $\Xi \in \mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)$ est uniquement déterminé par son symbole.*

4.3.2 Fonctions holomorphes à deux variables

Soient M et N deux espaces de Fréchet nucléaires munis de la famille des normes Hilbertiennes $\{|.|_{M,p}\}$ et $\{|.|_{N,p}\}$ respectivement.
Soit $M_p \oplus N_p$ la somme directe de M_p et N_p c'est à dire l'espace de Hilbert muni de la norme :

$$|\xi \oplus \eta|^2_{M_p \oplus N_p} = |\xi|^2_H + |\eta|^2_K\, ;\, \xi \in H\, ,\, \eta \in K.$$

Alors la somme directe de M et N est par définition :

$$M \oplus N = \lim_{p \longrightarrow \infty} proj(M_p \oplus N_p).$$

De plus

$$(M \oplus N)^* = M^* \oplus N^* = \lim_{p \longrightarrow \infty} ind(M_{-p} \oplus N_{-p}).$$

Définition 4.3.4 *Soit la fonction*

$$f : M \times N \longrightarrow \mathbb{C}.$$

On dit que f est entière à deux variables si et seulement si :
i) $z \longmapsto f(z,\, w)$ est entière pour $w \in N$ fixé.
ii) $w \longmapsto f(z,\, w)$ est entière pour $z \in M$ fixé.

4.3.3 Developpement en série de chaos des opérateurs

Soit $\Xi \in \mathcal{L}(F_\theta(E),\, (F_\theta(E))^*)$, on considère le developpement de Taylor du symbole $\hat{\Xi} \in \mathcal{G}_{\theta^*}(E \oplus E)$:

$$\hat{\Xi}(\xi,\, \eta) = \sum_{l,m=0}^{\infty} < \lambda_{l,m},\, \eta^{\otimes^l} \otimes \xi^{\otimes^m} > ;\, \lambda_{l,m} \in (E^{\otimes^{(l+m)}})^*.$$

On obtient :

$$\Xi = \sum_{l,m=0}^{\infty} \Xi_{l,m}$$

qui est dit developpement en série de chaos de $\Xi \in \mathcal{L}(F_\theta(E),\, F_\theta(E)^*)$.

Lemme 4.3.5 *On suppose que la fonction de Young θ satisfait $\lim_{x\longmapsto\infty}\frac{\theta(x)}{x^2}<\infty$, alors il existe $a>0$ et $b>0$ tel que :*

$$\theta_n \leq a(\frac{2be}{n})^{\frac{n}{2}}.$$

Preuve :
Si $\lim_{x\longmapsto\infty}\frac{\theta(x)}{x^2}<\infty$, alors il existe $a>0$ et $b>0$ tel que :

$$e^{\theta(r)} \leq ae^{br^2}\,,\, r\geq 0.$$

On obtient :

$$\theta_n = \inf_{r>0}(\frac{e^{\theta(r)}}{r^n}) \leq \inf_{r>0}(\frac{ae^{br^2}}{r^n}) = a(\frac{2be}{n})^{\frac{n}{2}}.$$

Proposition 4.3.6 *On suppose que la fonction de Young θ satisfait $\lim_{x\longmapsto\infty}\frac{\theta(x)}{x^2}<\infty$, alors $F_\theta(E)\subset\Gamma(H)$ où l'inclusion est continue et à image dense.*

Preuve :
Pour $\phi=(f_n)$ on a :

$$\|\phi\|_0^2=\sum_{n=0}^{\infty}n!\|f_n\|_0^2=\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n^2\delta^n n!\theta_n^{-2}\delta^{-n}\|f_n\|_0^2.$$

D'après le lemme précédent on a :

$$\theta_n^2\delta^n n! \leq a^2(\frac{2be}{n})^n\delta^n n! = a^2(2be)^n\sqrt{n}\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}.$$

Par la formule de Stirling :

$$\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}} \longrightarrow \sqrt{2\pi}\, quand\, n \longrightarrow \infty.$$

Par suite pour $\delta<(2b)^{-1}$ on a :

$$M^2 \equiv \sup_{n\geq 0}\theta_n^2\delta^n n! < \infty.$$

D'où

$$\|\phi\|_0^2 \leq M^2\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n^{-2}\delta^{-n}\|f_n\|_0^2 = M^2\|\phi\|_{+,0,\delta}^2$$

ce qui prouve que $F_\theta(E)$ est un sous espace dense de $\Gamma(H)$.
Dans ce cas on a le triplet de Gelfand :

$$F_\theta(E)\subset\Gamma(H)\subset F_\theta(E)^*.$$

Remarque 4.3.7 *Les espaces $\mathcal{L}(F_\theta(E),\,F_\theta(E))$ et $\mathcal{L}(F_\theta(E)^*,\,F_\theta(E)^*)$ sont des sous espaces de $\mathcal{L}(F_\theta(E),\,F_\theta(E)^*)$.*
Les opérateurs bornés sur $\Gamma(H)$ forment aussi un sous espace de $\mathcal{L}(F_\theta(E),\,F_\theta(E)^*)$. Notons aussi qu'un opérateur de $\mathcal{L}(F_\theta(E),\,F_\theta(E)^*)$ est dit opérateur de bruit blanc.

Bibliography

[1] **S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev and L. Streit :** *How to generalize white noise analysis to non-Gaussian measures, in"Dynamics of complex and irregular Systems(Ph. Blanchard, L. Streit, M. Sirugue-Collin and D.Testard, Eds.),"* pp.120-130, World Scientific, 1993.

[2] **S. Albeverio, Yu. G. Kondratiev and L. Streit :** *Non-Gaussian infinite dimensional analysis,* J. Funct. Anal. 138(1996), 311-350.

[3] **Y. M. Berezanky and Y. G. Kondratiev :** *"Spectral Methods in Infinite-Dimensional Analysis",* Kluwer Academic, 1995.

[4] **M. Ben Chrouda, H. Ouerdiane :** *Algebras of Operators on Holomorphic Functions and Applications.* Mathematical Physics, Analysis and Geometry, Vol. 5, No. 1, 65-76(2002).

[5] **M. Ben Chrouda, M. El Oued and H. Ouerdiane :** *Convolution Calculus and Applications to Stochastic Differential Equations.* Soochow Journal of Mathematics, Vol. 28, No. 4, pp. 375-388(2002).

[6] **M. Ben Chrouda :** *Thèse de Doctorat présenté à la faculté des sciences de Tunis, Novembre 2002.*

[7] **D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata :** *Higher powers of quantum white noises in terms of integral kernel operators,* Infinite Dimen. Anal. Quantum Prob. 1(1998), 533-559.

[8] **D. M. Chung, U. C. Ji and N. Obata :** *Normal-ordered white noise differential equations II : Regularity properties of solutions, to appear in "Prob. Theory and Math. Stat.(B. Grigolionis et al. Eds.)",*VSP/TEV, 1999.

[9] **W. G. Cochran, H-H. Kuo and A. Sengupta :** *A new class of white noise generalized functions, infinite Dimen. Anal.* Quantum Prob. 1(1998), 43-67.

[10] **R. Gannoun, R. Hchaichi, H. Ouerdiane and A. Rezgui :** *Un théorème de dualié entre espaces de fonctions holomorphes à croissance exponentielle.* Journal of Functional Analysis. Vol. 171, No. 1, pp. 1-14. (2000).

[11] **R. Gannoun , R. Hchaichi,P. Krée et H. Ouerdiane :** *Division de fonction holomorphes à croissance θ-exponentielle.* Preprint, Bibos No : E 00-01-04, (2000).

[12] **R. J. Glauber :** *Coherent and incoherent states of the radiation field,* Phys. Rev. 131(1993), 2766-2788.

[13] **T. Hida :** *"analysis of Brownian Functinals", Carletons Math. Lect. Notes, no. 13,* Carleton University, Ottawa, 1975.

[14] **T. Hida :** *"Brownian Motion",* Springer-Verlag, 1980.

[15] **T. Hida, H-H. Kuo, J. Potthoff and L. Streit :** "White Noise", Kluwer Academic, 1993.

[16] **H. Holden, B. Øksendal, J. Ubøe and T. Zhang :** *"Stochastic Partiel Differential Equations",* Birkhuser, 1996.

[17] **J. Jacod and A. Shryaev :** *"Limit Theorems for stochastic Processes",* Springer, Berlin, (1987).

[18] **F. Jondral :** *Some remarks about generalized functionals of complex white noise,* Nagoya Math. J. 81(1981), 113-122.

[19] **J. R. Klauder :** *The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary C-numbers,* Ann. Phys. 11(1960), 123-168.

[20] **J. R. Klauder and B. S. Skagerstam :** *"Coherent States",* World Scientific, 1985.

[21] **J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan :** *"Fundamentals of Quantum Optics",* W. A. Benjamin, Inc., 1968.

[22] **Ju. G. Kondratiev :** *Nuclear spaces of entire functions in problems of infinite-dimensional analysis,* Soviet Math. Dokl. 22(1980), 588-592.

[23] **Ju. G. Kondratiev and L. Streit :** *Spaces of white noise distibutions : Constructions, descriptions, applications I,* Rep. Math. Phys. 33(1993), 341-366.

[24] **I. Kubo and S. Takenaka :** *Calculus on Gaussian white noise I,* Proc. Japan Acad. 56A (1980), 376-380.

[25] **I. Kubo and Y. Yokoi :** *Generalized functions and functionals in fluctuation analysis, in "Mathematical Approach to Fluctuations II(T. Hida. Ed.),"*pp. 203-230, World Scientific, 1995.

[26] **H-H-Kuo :** *"White Noise Distribution Theory",* CRC Press, 1996.

[27] **M. A. Krasnosel'skii and Ya.B.Rutickii :** *"Convex Functions and Orlicz Spaces",* P. Noordhoff Ltd .,1961

[28] **P. Kree et H. Ouerdiane :** *Holomorphy and Gaussian Analysis.* Publications no 37 de l'Institut de Mathématiques de Jussieu. UMR 9994 CNRS, Octobre(1996), France

[29] **I. Karatzas and S. Shreve :** *"Brownian Motion and Stochastic Calculus-2nd edition",* Springer, Berlin(1991).

[30] **Y-J-Lee :** *Analytic version of test functionals, Fourier transform and a characterisation of measures in white noise calculus,* J. Funct. Anal. 100(1991), 359-380.

[31] **Y-J-Lee :** *Integrale representation of second quantization and its application to white noise analysis,* J. Funct. Anal. 133 (1995), 253-276.

[32] **N. Obata :** *"White Noise Calculus and Fock Space",* Lect. Notes in Math. Vol. 1577, Springer-Verlag, 1994.

[33] **N. Obata :** *A note on Hida's whiskers and complex white noise, in "Analysis on Infinite Dimensional Lie Groups and Algebras(H. Heyer and J. Marion, Eds.),"* pp. 321-336, World Scientific, 1998.

[34] **N. Obata :** *Complex white noise and coherent state représentations,* to appear in the commemorative volume of T. Hida, 1999.

[35] **N. Obata :** *Complex white noise and normal-ordered white noise equations,* preprint, 1999.

[36] **N. Obata :** *Coherent state representation in white noise calculus,* to appear in Can. Math. Soc. Proceedings series(the Commemorative volume of S. Albeverio), 2000.

[37] **H. Ouerdiane :** *Fonctionnelles analytiques avec condition de croissance, et application à l'analyse gaussienne,* Japan. J. Math. 20(1994), 187-198.

[38] **H. Ouerdiane :** *Fonctionnelles analytiques avec condition de croissance, et application à l'analyse gaussienne.* Japanese Journal of Mathematics, Vol. 20, No.1, pp. 187-198(1994). Japon.

[39] **H. Ouerdiane :** *Holomorphie en dimension infinie. Application à l'Analyse gaussienne et aux Probabilités.* Thèse d'Etat à l'université de Tunis II. Faculté des Sciences de Tunis, Avril(1994).

[40] **H. Ouerdiane :** *Noyaux et symboles d'opérateurs sur des fonctionnelles analytiques gaussiennes.* Japenese Journal of Mathematics, Vol. 21, No. 1, pp. 223-234(1995). Japon.

[41] **H. Ouerdiane :** *Algèbres nucléaires et équations aux dérivées partilles stochastiques.* Nagoya Journal of Mathematics Vol. 151(1998), 107-127. Japon.

[42] **H. Ouerdiane :** *Distributions gaussiennes et Equations aux derivées partielles stochastiques.* Mathematical Physics and Stochastics Analysis. (In honour of Ludwig Streit), pp. 318-331. S. Albeverio et al. (Eds.). Word Scientific (2000).

[43] **H. Ouerdiane and A. Rezgui :** *Représentations intégrales de fonctionnelles analytiques.* In Stochastics Process, Physics and Geometry : New interplays. Canadian Math. Society. Conference Proceedings, Vol. 28, pp. 283-290.(2000).

[44] **E. C. G. Sudarshan :** *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams,* Phys. Rev. Lett. 10(1963), 277-279.

[45] **Y. Yokoi :** *Simple setting for white noise calculus using Bargmann space and Gauss transform,* Hiroshima Math. J. 25(1995), 97-121.